

THE HARTLEY TRANSFORM

by

Ronald N. Bracewell

Professor of Electrical Engineering
Stanford University

OXFORD UNIVERSITY PRESS • NEW YORK
CLARENDON PRESS • OXFORD
1986

Р.Брейсуэлл

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ

Теория и приложения

Перевод с английского канд. техн. наук
А. И. Папкова
под редакцией д-ра техн. наук, проф.
И. С. Рыжака



Москва «Мир» 1990

ББК 32.841
Б87
УДК 621.37

Брейсуэлл Р.
Б87 Преобразование Хартли: Пер. с англ.—М.: Мир,
1990.—175 с., ил.
ISBN 5-03-001632-5

Книга видного американского специалиста по теоретической радиотехнике является первой в мире монографией, посвященной преобразованию Хартли. Как и преобразование Фурье, оно может применяться для спектрального анализа и различных видов обработки сигналов. В книге устанавливается связь между преобразованиями Фурье и Хартли, приводятся основные теоремы и методы вычисления свертки, показаны преимущества преобразования Хартли при обработке сигналов. Изучаются методы цифровой фильтрации, а также быстрое и оптическое преобразования Хартли.

Для специалистов, занимающихся проблемами обработки сигналов и спектрального анализа, а также аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Б $\frac{2302020100-200}{041(01)-90}$ 116-90

ББК 32.841

Редакция литературы по электронике

ISBN 5-03-001632-5 (русск.)
ISBN 0-19-503969-6 (англ.)

© 1986 by Oxford University Press, Inc.
© перевод на русский язык, Папков А. И., 1990

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию советского читателя книга профессора Станфордского университета принадлежит к оксфордской серии по техническим наукам и является первой в мировой литературе монографией, посвященной преобразованию Хартли. Как и преобразование Фурье, оно может применяться для спектрального анализа и различных видов обработки сигналов. Данный вид преобразования назван в честь Р. Хартли, опубликовавшего в 1942 г. статью о паре интегральных преобразований — прямом и обратном, — использующих введенную им функцию $\cos \theta = \sin \theta + \cos \theta$. До начала 1980-х годов эти результаты оставались в забвении, пока к ним не привлёк внимание исследователей Р. Брейсуэлл, разработавший основы теории как непрерывного, так и дискретного преобразования Хартли, а также один из вариантов его быстрого преобразования.

Непрерывный прогресс в области обработки информации связан с задачами всевозрастающей сложности. Такие задачи желательно решать в реальном или текущем времени (т. е. достаточно быстро) с одновременным применением экономичных методов и средств реализации. Быстродействие и экономичность достигаются как развитием технологии и организацией средств обработки (СБИС, процессоры сложной архитектуры с высокой степенью распараллеливания и т. п.), так и совершенствованием алгоритмов обработки сигналов.

Обращение к преобразованию Хартли обусловлено ситуацией, сложившейся в ряде методов обработки информации, в частности использующих вещественные последовательности данных (одномерных и двумерных). Обработку таких данных желательно осуществлять в области вещественных чисел с помощью взаимно симметричных прямого и обратного преобразований. В отличие от преобразования Фурье, отображающего вещественные функции в комплексную область, и несимметричного по i (происходит изменение знака при переходе от прямого к обратному преобразованию) преобразование Хартли осуществляет прямое и обратное преобразования только в вещественной области и обладает указанной симметрией.

Книга написана в сжатой, компактной форме, но очень информативна, так как содержит изложение всех основных аспектов непрерывного и дискретного одномерного и двумерного преобразований Хартли. Такой стиль изложения требует от читателя особого внимания и усилий, однако он будет вознагражден, получив взамен богатство идей.

В настоящее время преобразование Хартли находит широкое применение при разработке двумерных и трехмерных быстрых преобразований, быстрых алгоритмов интерполяции и т. д. В этом

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

— Вы, уж верно, знаете латынь?
— Да, но вы говорите так, как будто я ее не знаю.

*Мольер. Мещанин во дворянстве**

Гармонический анализ, в который вносит вклад данная книга, имеет удивительную историю, у истоков которой стоял, как часто считается, Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), известный своим утверждением о том, что произвольная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. Много работ как в математике, так и в физике было посвящено попыткам опровергнуть это утверждение. Часть достижений XIX в. в области математического анализа, который оперирует такими основополагающими понятиями, как непрерывность и предел, ставшими на сегодняшний день традиционными, возникли в связи с проблемами рядов Фурье. Что касается физики, то достаточно привести мнение лорда Кельвина: «Теорема Фурье—это не только один из наиболее блестящих результатов в современном математическом анализе, но и необходимый инструмент анализа почти всякого неясного вопроса в современной физике».

Достаточно рассмотреть формулу

$$x/2 = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots,$$

полученную Леонардом Эйлером (1707–1783), чтобы осознать тот факт, что в эволюционном процессе всегда есть предшественники. В подтверждение можно привести пример из II в. н. э., когда Клавдий Птолемей (грек из Александрии) использовал эту же основную идею. Тригонометрическая сумма вида

$$z(t) = a_1 \exp [i\omega_1(t - t_1)] + a_2 \exp [i\omega_2(t - t_2)] + a_3 \exp [i\omega_3(t - t_3)] + \dots$$

является в конечном счете только комплексным представлением суммы вращающихся векторов, которая также может быть охарактеризована траекторией точки, движущейся по эпициклу, вращающемуся в свою очередь по деференту, центр которого перемещается по третьей окружности. Восходящая к древности идея включения дополнительного вращающегося вектора с его амплитудой, частотой и фазой необходима, чтобы лучше объяснить данные наблюдений, и лежит в основе метода расчета положений планет, который используется и поныне. Нововведением Фурье было утверждение об общем характере представления в виде суммы компонент с кратным соот-

* Перевод Н. Любимова.

ношением угловых скоростей. Как известно, это утверждение встретило решительное сопротивление со стороны выдающихся французских математиков того времени, которые вполне справедливо требовали убедительных доказательств. В конце концов спор свелся к вопросу о необходимых и достаточных условиях существования интеграла Фурье, дискуссия вокруг которого длилась более столетия. Ее кульминацией явилась разработка методов анализа обобщенных функций, что все расставило по своим местам.

Теория функций комплексной переменной существенно облегчила трактовку колебательных процессов. (Анализ переменных токов сегодня немислим без использования комплексной плоскости и множителя $\exp [i\omega t]$.) Следовательно, в теории рядов Фурье используется преимущество теории функций комплексной переменной и оказывается естественным анализ периодической функции $p(t)$ с помощью комплексных компонент $c_n \exp [i2\pi n t]$, где коэффициент c_n является теперь комплексным. Таким образом, имеем

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp [i2\pi n t],$$

и в пределе для функции $f(t)$, не являющейся периодической, справедливо выражение

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(n) \exp [i2\pi n t] dn,$$

где n —вещественное число.

В то же время хорошо известно, что можно записать соответствующее выражение для ряда без использования мнимой единицы i :

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t),$$

что и утверждал Фурье, таким образом, понятно, что использование комплексных экспонент является скорее удобной формой представления, нежели фундаментальным свойством.

Вещественное интегральное преобразование, сформулированное Хартли в 1942 г., позволяет обойтись без комплексного представления. Хотя его результат занял заметное место на страницах журнала Proceedings of the Institute of Radio Engineers (Труды Института радиоинженеров) и на него были ссылки в таких монографиях, как *S. Goldman. Frequency Analysis, Modulation and Noise*, McGraw-Hill, 1948 (имеется перевод: Гольдман С. Гармонический анализ, модуляция и шум.—М.: ИЛ, 1951) и в моей книге *R. N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 1965 (Р. Брейсуэлл. Преобразование Фурье и его применения), возобладала традиционная инерция. Вероятно, можно было бы найти более ранние, но оставленные без внимания публикации.

В гл. 2 представлено преобразование Хартли с использованием функции sas и связь с преобразованием Фурье, по аналогии с которым

соотношение

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi s x dx$$

определяется как *преобразование Хартли*. В гл. 3 в сжатой форме без вывода приводятся теоремы для преобразования Хартли.

Дальнейшим расширением является определение *дискретного преобразования Хартли*:

$$H(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \cos (2\pi v \tau / N),$$

свойства которого исследуются в гл. 4. Коэффициент N^{-1} обеспечивает равенство $H(0)$ среднему значению $f(\tau)$; это свойство полностью соответствует исходной посылке о том, что коэффициент a_0 равен постоянной составляющей периодического колебания.

Основной областью применения преобразования Хартли является цифровая фильтрация, или дискретная свертка, — тема гл. 5.

Наличие изображений, воспроизводимых или обрабатываемых на ЭВМ и отображаемых на экранах электронно-лучевых трубок, в значительной степени расширило область применения двумерного анализа, причем обнаружилось, что идея вещественного преобразования легко обобщается. Таким образом, можно получить преобразование плоскости, обеспечивающее взаимно однозначное соответствие (прямое и обратное) с другой плоскостью, на которой определен некоторый объект. Плоскость преобразования Хартли, если можно ее так назвать, помимо того, что значения, соответствующие каждой точке, вещественны, характеризуется отсутствием избыточности. В плоскости преобразования Фурье, напротив, эти величины комплексны, а значения в диаметрально противоположных точках образуют комплексно сопряженные пары. Двумерное преобразование Хартли вводится в гл. 6, где приводятся многие теоремы в обобщенной форме.

Практическим следствием внимания к вещественному дискретному преобразованию является то, что оно может быть выражено с использованием матричных операций. Возможности факторизации матриц приводят к новой факторизации матриц дискретного преобразования Фурье, следствием чего является новый быстрый алгоритм для процедур спектрального анализа и свертки, использующих вещественные члены. В гл. 7 дается обзор матриц и анализируется операция перестановки.

Гл. 8 посвящена быстрому алгоритму. Рассматриваются различные интересные аспекты быстрого спектрального анализа. Показано, каким образом практически реализуемые программы разбиваются на ряд отдельных частей, каждая из которых вносит вклад в общее время счета (машинное время) и характеризуется определенной зависимостью от анализируемой последовательности данных. Рассмотрение выходит за рамки традиционного анализа сложности и трудоемкости, выполняемого путем приближенного подсчета коли-

чества операций, и предполагает использование временной (или полосковой) диаграммы, характеризующей зависимость разбиений от объема последовательности данных. Затем специально внимание уделяется каждой полосе и делаются важные заключения относительно быстрых тригонометрических функций, быстрого вращения и быстрой перестановки. Основой нового алгоритма является вещественное преобразование, которое требует в 2 раза меньше машинного времени, чем комплексное преобразование Фурье.

Хорошо известно, что системы оптических линз могут формировать преобразование Фурье когерентного оптического излучения источника, и поэтому естествен вопрос о значении достижений последнего времени в этой области для оптики. Был предложен метод формирования двумерного вещественного представления, который рассматривается в гл. 9. На плоскости вещественного преобразования компоненты электрического поля находятся в фазе; следовательно, распределение информации полностью характеризуется изменениями амплитуд. В полном объеме результаты и последствия подобной независимости от параметра фазы, к которому невосприимчивы детекторы электромагнитного излучения короче некоторой длины волны, еще ждут исследования.

Книга завершается набором программ для ЭВМ и атласом преобразований Хартли, которые призваны оказать помощь лицам, интересующимся приложениями или обобщениями различных аспектов вещественных преобразований. Для коммерческого использования некоторых из этих программ может потребоваться лицензия или заключение соглашения с Советом посредников Станфордского университета через Отдел лицензий в области технологии, Станфорд, Калифорния 94305.

В монографию включено значительное число задач, ряд которых содержит нетрадиционные сведения в дополнение к основному содержанию глав. Однако основная цель использования этих задач связана с обучением. Они отражают мнение и опыт автора, заключающиеся в том, что небольшой числовой пример является превосходной помощью в усвоении абстрактных концепций, подобно тому как графические или геометрические упражнения расширяют наше представление в дополнение к аналитическому описанию, даже если такое описание оказывается достаточным.

Легко понять, почему математическая физика могла довольствоваться традиционным интегралом Фурье в течение времени, превышающего целое столетие. Даже введение радикально нового метода вычисления, а именно быстрого преобразования Фурье, поначалу слабо повлияло на практику вычислений, но когда пришло время компьютеров, этот метод осуществил подлинный переворот.

Когда в 1965 г. благодаря Кули и Тьюки быстрое преобразование Фурье стало доступно широкому кругу читателей, а соответствующие материалы были опубликованы в статьях методического характера и тематических выпусках журналов, эти методы получили высокую оценку специалистов в области анализа электрических сигналов. Это

вызвало удивление в кругах специалистов по методам численного анализа, где подобные методы уже были известны. Превосходная ретроспектива дана в работе Эйдемана, Барраса и Джонсона, опубликованной в Archive for History of the Exact Sciences (Архив истории точных наук), в которой прослеживаются истоки метода, берущие начало от статьи Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), написанной в 1805 г., в которой он утверждает: «Опыт убедит пользователя в том, что данный метод в значительной степени облегчит утомительный труд выполнения механических вычислений».

Интересным побочным эффектом этого исторического исследования является то, что, как оказалось, быстрый метод Гаусса для оценки суммы ряда Фурье предшествует статье, на которой базируется известность Фурье. Добавим, что статья Гаусса была опубликована много позже в собрании его сочинений *C. F. Gauss. Collected Works*, Vol. 3, Göttingen, Royal Society of Sciences, 1876, и напомним, что когда Фурье выдвинул идею представления произвольных периодических функций посредством тригонометрических рядов, выдающиеся математики, такие, как Лагранж, были с ней несогласны.

Не было очевидным, что могут существовать более оптимальные алгоритмы, пока не оказалось, что новая процедура факторизации матриц, описывающих дискретное преобразование Фурье, оказывается более быстрой, нежели быстрое преобразование Фурье. Попытки извлечь пользу из того факта, что данные могут полагаться вещественными, оказались успешными лишь отчасти, потому что программа, оперирующая вещественными данными в преобразовании Фурье, не может быть использована для обращения (обязательно комплексного по своему характеру) из области преобразования в область исходных данных. Поэтому должна быть отобрана библиотека программ как для прямого, так и для обратного преобразований, принципиально отличающихся друг от друга. Ни один тип этих программ не обладает свойством взаимности для преобразований Фурье, но пары таких программ обеспечивают экономию машинного времени ценой увеличения требуемого объема памяти.

Быстрый алгоритм, базирующийся на новой процедуре факторизации, в достаточно изящной форме позволяет решить данную задачу и рекомендуется для численного анализа. Алгоритм оперирует только с вещественными числами – единственным видом данных, которыми мы располагаем в реальном эксперименте, и непосредственно дает ответы на интересующие нас вопросы, что также обычно представляется через вещественные данные и не требует перехода в область комплексного преобразования. С тех пор как в течение полутора столетия был хорошо известен комплексный характер коэффициентов Фурье, возможно, трудно принять, что комплексные числа – изобретение человеческого разума, а не создание самой природы. Естественно, мы все признаем, что энергетический спектр, например спектр оптического сигнала, описывается вещественной функцией переменной вещественной частоты f , но возникает вопрос: не следует ли интенсивность $a_f^2 + b_f^2$ этого спектра вычислять как квадрат модуля

комплексного коэффициента $a_f + ib_f$? Разумеется, это один из способов. Другой способ, рассмотренный в данной книге, заключается в вычислении величины $[H(f)]^2 + [H(-f)]^2$, где $H(f)$ – (вещественное) преобразование Хартли. Непосредственно может быть вычислена и фаза. Нет таких задач, для которых справедливо использование комплексного преобразования Фурье и одновременно не может быть применено вещественное преобразование Хартли.

Глава 2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ

Общего одобрения достигнет тот,
кто соединил приятное с полезным.

Горацій, Наука поэзии

В своей оригинальной статье, опубликованной в журнале Proceedings of the Institute of Radio Engineers в 1942 г., Р. Хартли (1890–1970) подчеркнул строго взаимное соответствие пары интегральных формул, которые он ввел. В следующем разделе мы будем использовать обозначения автора и убедимся в полной симметрии этих формул. Однако со временем среди радиоинженеров установилась общепринятая теперь терминология, вследствие чего исходные определения Хартли приобрели несколько архаичную форму. Поэтому после точной записи соотношений в их исторически исходном виде мы перейдем к форме записи, согласующейся с практикой последних лет, и это преобразование в его современной форме будет определено как *преобразование Хартли*.

Исходная формулировка

Начнем рассмотрение с сигнала $V(t)$, который является функцией времени и может представлять собой напряжение, формируемое в оконечных устройствах телефонной линии связи. Это колебание имеет частотный спектр, который может быть определен с помощью преобразования Фурье. Существует несколько научных школ, отличающихся разным представлением преобразования Фурье, и одна из этих школ, подходы которой будут проанализированы ниже, несмотря на ее почтенный возраст, представляет надежный базис для рассмотрения изначальной формы преобразования Хартли.

Этот вариант преобразования Фурье $S(\omega)$ определяется выражением

$$S(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \exp[-i\omega t] dt,$$

где $S(\omega)$ является комплексной функцией угловой частоты ω , которая принимает только вещественные значения. Таким образом, для любого колебания $V(t)$ может быть определено преобразование Фурье $S(\omega)$ (или комплексный спектр), однозначно соответствующее этому колебанию.

Дельта-функции. Здесь следует сделать небольшое отступление. Можно найти функции, для которых вышеприведенный интеграл не

существует, и множество математических исследований было посвящено решению очень сложных задач, которые могут при этом возникать. Существует два класса задач, к которым применимы эти рассуждения. Один из них включает функции, которые не могут описывать явления реального мира и которые, кроме того, имеют незначительный (если вообще имеют) физический интерес; другой класс включает дельта-функции и их производные, играющие важную роль при анализе физических явлений, даже если эти функции имеют сложное математическое описание.* Тем не менее дельта-функции в ситуациях, где они возникают, являются одним из основных инструментов физического анализа. В данной работе мы не будем рассматривать первый класс задач, в которых функции обладают бесконечным числом неустранимых разрывов. Мы осознаем, что дельта-функции не являются функциями в обычном понимании, но принимаем термин «обобщенные функции» [M. J. Lighthill. An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge Univ. Press, 1958 (Лайтхилл М. Д. Введение в анализ Фурье и обобщенные функции)] при анализе $\delta(t)$ и $\delta'(t)$, представляющих собой единичный импульс и его производную.

Нулевые функции. Вопрос ставится следующим образом: может ли быть восстановлено исходное колебание $V(t)$ по заданной функции $S(\omega)$? Ответ на этот вопрос звучит так: в основном может. Один из путей преодоления неопределенности этого заключения состоит в предварительном ограничении класса функций теми из них, для которых ответ однозначно утвердителен. Однако следует иметь в виду возможность такой неопределенности, что оказывается полезным для понимания вопросов, связанных с разрывными функциями, анализ которых часто приводит к дополнительным сложностям. Эти аспекты будут рассмотрены ниже.

На данном этапе достаточно объяснить понятие нулевой функции. Сама по себе следующая мысль может показаться несколько нелепой, но ее следует иметь в виду: нулевая функция есть функция, интеграл от которой равен нулю независимо от выбора пределов интегрирования. Естественно, что функция, в явном виде равная нулю, является нулевой функцией. Другим видом нулевой функции является функция $\delta^0(t)$, которая по определению равна единице при $t = 0$ и нулю при всех других значениях t . Еще одной функцией этого типа является функция $\sum_i a_i \delta^0(t - t_i)$, также представляющая практический интерес. Нулевые функции не зависят от чередования их положительных и отрицательных значений, что не определяет их нулевое значение; интеграл в бесконечных пределах от модуля нулевой функции равен нулю, т. е. если $N(t)$ – нулевая функция, то $\int_{-\infty}^{\infty} |N(t)| dt = 0$.

* См. книгу: У. М. Сиберт. Цепи, сигналы, системы.–М.: «Мир», 1988, ч. 2. с. 10.–Прим. ред.

Несмотря на то что нулевые функции представляются математически корректно даже в случае разрывных функций, они не играют значительной роли в физике. При наличии на входе механической системы воздействия $N(t)$ на ее выходе будет отсутствовать какая-либо реакция.

Ясно, что сумма $V(t) + N(t)$ имеет такое же преобразование Фурье $S(\omega)$, что и $V(t)$. Поэтому, когда осуществляется попытка обращения процесса, т. е. его восстановления по заданной функции $S(\omega)$, в общем случае оказывается невозможным восстановление полной структуры колебания $V(t)$, за исключением случая отсутствия нулевых функций. В отсутствие нулевых функций колебание $V(t)$ может быть восстановлено по заданной функции $S(\omega)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$V(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp [i\omega t] d\omega.$$

Интегралы от функции cas. Хартли ввел пару формул

$$\psi(\omega) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \text{cas } \omega t dt,$$

$$V(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \text{cas } \omega t d\omega.$$

В этих соотношениях для функции cas мы будем следовать определению автора, данному им в его оригинальной статье и в соответствии с которым эта функция представляет собой сумму косинуса и синуса одного и того же аргумента

$$\text{cas } t \equiv \cos t + \sin t.$$

Таким образом, отсутствуют существенные отличия пары введенных интегралов от обычных интегральных формул преобразования Фурье, однако на практике эти различия значительны. Во-первых, функция $\psi(\omega)$ вещественна в отличие от функции $S(\omega)$. Во-вторых, обратное преобразование для его реализации требует точно такой же процедуры интегрирования, как и прямое преобразование. Наконец, $\psi(\omega)$ не является обычным преобразованием Фурье, и мы должны быть готовы к нетрадиционному характеру и свойствам этого преобразования. Значительная часть умопытельных построений относительно преобразования Фурье, а именно спектра колебания, являющегося функцией времени, непосредственно неприменима к $\psi(\omega)$, и значительная часть последующего материала посвящена выработке навыков, необходимых для уяснения различий и сходства вещественного и традиционного преобразований.

Преобразование Хартли

В определении Хартли для преобразования $\psi(\omega)$ в явном виде был включен коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$ для получения симметричного выражения. Если опустить этот коэффициент, то оба интеграла одновременно не могут быть корректными. Однако следует признать нецелесообразным сохранение пары таких специфических коэффициентов, особенно при выполнении численных расчетов. Многие авторы отреагировали на подобную ситуацию применительно к преобразованию Фурье рассмотрением функции $\sqrt{2\pi} S(\omega)$ вместо $S(\omega)$. В результате коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$ исчезает в определении прямого преобразования Фурье, однако в формуле обратного преобразования Фурье появляется коэффициент $1/2\pi$. Таким образом, эти авторы намеренно жертвуют симметрией формул. Справедливо замечание, что это дополнительная нагрузка для памяти, так как приходится запоминать, какая из формул содержит величину 2π . Один способ запоминания состоит в том, что коэффициент $1/2\pi$ стоит перед интегралом, в котором фигурирует дифференциал $d\omega$, что означает наличие величины вида $\omega/2\pi$, т. е. циклической частоты f . Отсюда естественно возникает вопрос: почему непосредственно не иметь дело с частотой? Именно к этому выводу в течение многих лет склонялось мнение разных исследователей. Приверженцев использования коэффициента $1/\sqrt{2\pi}$ в настоящее время практически уже нет, тогда как имеется достаточное количество сторонников правомерности записи $d\omega/2\pi$; но общепринятой практикой является применение множителя 2π под знаком экспоненты в интегралах для прямого и обратного преобразований. Данная процедура реализуется автоматически при использовании частоты f вместо угловой частоты ω . При этом имеем

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \text{cas } 2\pi f t dt,$$

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \text{cas } 2\pi f t df.$$

Далее $H(f)$ будет рассматриваться как преобразование Хартли функции $V(t)$, которая в свою очередь является обратным преобразованием Хартли функции $H(f)$. Естественно, прямое и обратное преобразования неразличимы.

Определенное здесь преобразование Хартли несколько отличается от исходного преобразования Хартли $\psi(\omega)$. Однако, кроме как для исторической справки, вряд ли возникнет необходимость упоминать $\psi(\omega)$ и вряд ли целесообразно именовать $\psi(\omega)$ преобразованием Хартли. Видимо, такие терминологические различия — это все, что необходимо. Вводя новые обозначения, мы добиваемся согласования с общеупотребимыми терминами, используемыми в преобразовании Фурье, что далее будет распространено и на дискретные преобразования.

Для сравнения приведем соотношения для преобразований Фурье, записанных с помощью вышеупомянутых обозначений:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \exp[-i2\pi ft] dt,$$

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \exp[i2\pi ft] df.$$

Четная и нечетная составляющие

Взаимосвязь преобразований Фурье и Хартли базируется на анализе свойства симметрии. Для пояснения этого представим $H(f)$ в виде четной и нечетной компонент $E(f)$ и $O(f)$ соответственно. Четная компонента определяется как полусумма функции $H(f)$ и ее зеркального изображения, т.е. функции $H(-f)$. Нечетная компонента определяется как полуразность этих функций и обладает свойством антисимметрии, а именно $O(-f) = -O(f)$. Любая функция может быть представлена однозначно в виде суммы четной и нечетной компонент, и, наоборот, при заданных четной и нечетной компонентах однозначно может быть восстановлена исходная функция. Одним из интересных свойств четной и нечетной компонент является равенство суммы их энергий энергии самого процесса.

Для установления связи преобразования $H(f)$ с преобразованием Фурье $F(f)$ функции $V(t)$ примем следующее определение.

Пусть $H(f) = E(f) + O(f)$, где $E(f)$ и $O(f)$ — соответственно четная и нечетная составляющие функции $H(f)$. Тогда

$$E(f) = [H(f) + H(-f)]/2 = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \cos 2\pi f t dt,$$

$$O(f) = [H(f) - H(-f)]/2 = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \sin 2\pi f t dt.$$

Эти два интеграла известны под названиями соответственно косинус- и синус-преобразование Фурье, которые в табулированном виде приводятся в литературе [A. Erdélyi. Tables of Integral Transforms, Vol. 1, McGraw-Hill, 1954. (Имеется перевод: Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.— М.: Наука, т. 1, 1969.)]

Формулы связи

При заданной функции $H(f)$ для получения преобразования Фурье $F(f)$ можно сформировать сумму $E(f) - iO(f)$:

$$E(f) - iO(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) (\cos 2\pi ft - i \sin 2\pi ft) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} V(t) \exp[-i2\pi ft] dt.$$

Таким образом, из $H(f)$ легко получить преобразование Фурье колебания $V(t)$ путем формирования зеркального изображения вида $H(-f)$ и операций суммирования функций. Вещественная часть $F(f)$ равна $E(f)$, а мнимая часть противоположна по знаку функции $O(f)$: $F_r(f) = \text{Re} F(f) = E(f)$, $F_i(f) = \text{Im} F(f) = -O(f)$.

И наоборот, из заданного преобразования Фурье $F(f)$ можно получить $H(f)$, заметив, что

$$H(f) = F_r(f) - F_i(f),$$

т.е., исходя из $F(f)$, функция $H(f)$ определяется как сумма вещественной части преобразования Фурье и ее мнимой части, взятой с обратным знаком.

Помня о том, что мнимая часть комплексной величины сама является вещественной, убеждаемся в том, что $H(f)$ представляет собой вещественную функцию, как и должно быть при условии, что исходное колебание $V(t)$ вещественно. Если бы $V(t)$ не было вещественной функцией (в этом случае $V(t)$ не могло бы представлять собой напряжение электрического колебания), то $H(f)$, а тем более $E(f)$ и $O(f)$ также не были бы вещественными. В результате можно резюмировать:

Преобразование Фурье равно разности четной составляющей преобразования Хартли и нечетной составляющей, умноженной на i ; напротив, преобразование Хартли определяется как разность вещественной и мнимой составляющих преобразования Фурье.

Примеры

С целью иллюстрации может быть получен ряд частных преобразований.

Усеченная экспонента. В качестве первого примера рассмотрим функцию вида $e^{-t}H(t)$, которая в момент времени $t = 0$ имеет единичный скачок, а затем монотонно убывает по экспоненциальному закону. В данном выражении фигурирует единичная ступенчатая функция Хевисайда $H(t)$, которая определяется следующим образом:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Заметим, что значение функции $H(0)$, т.е. $H(t)$ при $t = 0$, не определено. Причина этого заключается в следующем. Рассмотрим две функции $H_a(t)$ и $H_b(t)$, которые совпадают с $H(t)$ при $t \neq 0$, но в отличие от $H(t)$ определены при $t = 0$. Пусть $H_a(0) = a$ и $H_b(0) = b$. Тогда разность $H_a(t) - H_b(t)$ представляет собой нулевую функцию. Поскольку рассматриваются интегралы, на их величину не влияет выбор какого-либо определенного конечного значения $H(0)$. Имея это в виду, представляется более благоразумным недоопределить подын-

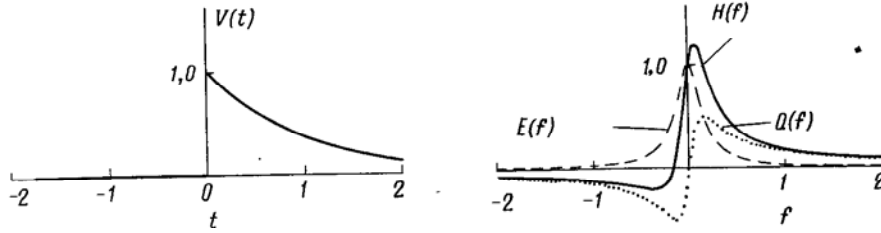


Рис. 2.1. Усеченная экспоненциальная функция $V(t) = e^{-t}H(t)$ и ее преобразование Хартли $H(f) = (1 + 2\pi f)/(1 + 4\pi^2 f^2)$. Очевидны симметрия четной компоненты $E(f)$ и ее относительно быстрое убывание (штриховая линия) и симметрия относительно начала координат нечетной составляющей $O(f)$ (пунктирная линия). Преобразование Фурье функции $e^{-t}H(t)$ имеет вид $E(f) - iO(f)$.

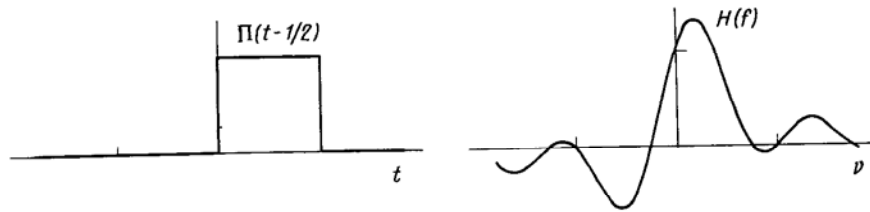


Рис. 2.2. Строблирующая функция $\Pi(t - 1/2)$ и ее преобразование Хартли.

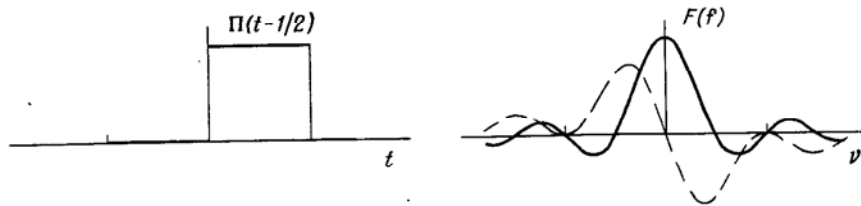


Рис. 2.3. Преобразование Фурье строблирующей функции $\Pi(t - 1/2)$; мнимая составляющая изображена штриховой линией.

тегральное выражение, чем доопределить его произвольно и тривиально.

Оцениваемый интеграл равен

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}H(t) \text{cas } 2\pi f t dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \text{cas } 2\pi f t dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cos 2\pi f t dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \sin 2\pi f t dt = \\ &= 1/(1 + 4\pi^2 f^2) + 2\pi f/(1 + 4\pi^2 f^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что четная и нечетная составляющие этого интеграла есть $E(f) = 1/(1 + 4\pi^2 f^2)$, $O(f) = 2\pi f/(1 + 4\pi^2 f^2)$.

Полученный результат иллюстрируется на рис. 2.1. Можно за-

метить, что $H(f)$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Минимум функции $H(f)$ имеет место при $2\pi f = -1 - \sqrt{2}$, максимум — при $2\pi f = \sqrt{2} - 1$, и она обращается в нуль при $2\pi f = -1$. При $f \rightarrow \pm \infty$ функция убывает как $\pm f^{-1}$.

Для сравнения с преобразованием Фурье необходим анализ четной и нечетной составляющих преобразования Хартли: четная составляющая $E(f)$ показана штриховой линией, а нечетная $O(f)$ — пунктирной. Для преобразования Фурье имеем

$$F(f) = E(f) - iO(f) = 1/(1 + 4\pi^2 f^2) - i2\pi f/(1 + 4\pi^2 f^2),$$

это известный результат, который может быть подтвержден при отдельном рассмотрении. Одна из этих составляющих является четной, а другая — нечетной. При $f \rightarrow \pm \infty$ вещественная составляющая быстро убывает как $\pm f^{-2}$, тогда как мнимая компонента убывает по абсолютной величине относительно медленно. В результате при $f \gg 1$ мнимая компонента доминирует в спектре. Например, при $f = 2$ отношение мнимой составляющей к вещественной равно 12,6.

Прямоугольный импульс. В качестве следующего примера рассмотрим сигнал $V(t) = \Pi(t - 1/2)$, изображенный на рис. 2.2 слева, где $\Pi(t - 1/2)$ — смещенная единичная прямоугольная функция, имеющая свое начало при $t = 0$. Стандартная единичная прямоугольная функция, которая часто необходима для строблирования сегментов колебаний, определяется как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0, & t < -1/2, \\ 1, & -1/2 < t < 1/2, \\ 0, & t > 1/2. \end{cases}$$

Для данного примера имеем преобразование Хартли

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t - 1/2) \text{cas } 2\pi f t dt = \int_0^1 \text{cas } 2\pi f t dt = \\ &= (1/2\pi f) [\sin 2\pi f t - \cos 2\pi f t] \Big|_0^1 = (1/2\pi f) (\sin 2\pi f - \cos 2\pi f + 1), \end{aligned}$$

которое иллюстрируется на рис. 2.2. Здесь вновь наблюдается отсутствие симметрии. Для сравнения на рис. 2.3 приводится график преобразования Фурье, определяемого выражением

$$F(f) = (\sin 2\pi f/2\pi f) - i(1 - \cos 2\pi f)/2\pi f.$$

Как обычно, вещественная часть является четной, а мнимая — нечетной функцией.

Единичный импульс. В качестве примера другого рода рассмотрим единичный импульс для момента времени $t = 1$, так что $V(t) =$

= $\delta(t - 1)$. Тогда

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 1) \cos 2\pi f t dt = \cos 2\pi f.$$

Этот результат обусловлен использованием фильтрующего свойства δ -функции, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \phi(a).$$

Другими словами, интегрирование произведения единичного импульса (δ -функции) и данной функции аннулирует («стирает») значения этой исходной функции при всех значениях аргумента, исключая то из них, при котором существует δ -функция, и восстанавливается исходная функция в точке, где локализована δ -функция.

Теорема о фильтрующем свойстве δ -функции может рассматриваться как отправная точка в теории обобщенных функций, что и делается в математическом труде Шварца [L. Schwartz. La Théorie des Distributions, Hermann, 1950 (Л. Шварц. Теория распределений)]; при другом подходе теория может быть разработана как следствие предельных операций, позаимствованных из физики. Существуют три математических правила, резюмирующие подход с позиций физических задач, в которых возникают импульсы.

1. Заменить $\delta(\cdot)$ на $\tau^{-1} \Pi(\cdot/\tau)$. [Точки в скобках означают наличие совокупности символов. Это дает возможность рассматривать $\delta(2t)$, $\delta(t - t_0)$, $\delta(\omega t - \phi)$ и в общем случае $\delta[f(t)]$.

2. Выполнить интегрирование или другую указанную операцию, что не должно представлять труда, так как $\Pi(\cdot/\tau)$ может принимать только два значения: 0 и 1.

3. Осуществить в выражении, полученном в результате выполнения п. 2, предельный переход при $\tau \rightarrow 0$.

Полученное в результате предельного перехода значение интеграла или другое выражение, содержит $\delta(\cdot)$. Применим эти правила к интегралу, который выше был определен с использованием теоремы о фильтрующем свойстве δ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 1/2) \cos 2\pi f t dt.$$

Применив правило 1, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1} \Pi[(t - 1/2)/\tau] \cos 2\pi f t dt = \tau^{-1} \int_{(1-\tau)/2}^{(1+\tau)/2} \Pi[(t - 1/2)/\tau] \cos 2\pi f t dt.$$

Пределы интегрирования могут быть изменены, как показано, потому что функция $\Pi[(t - 1/2)/\tau]$ центрирована относительно точки $t = 1/2$ и имеет длительность τ и, таким образом, не равна нулю только в интервале $[1/2 - \tau/2; 1/2 + \tau/2]$. Теперь перейдем к прави-

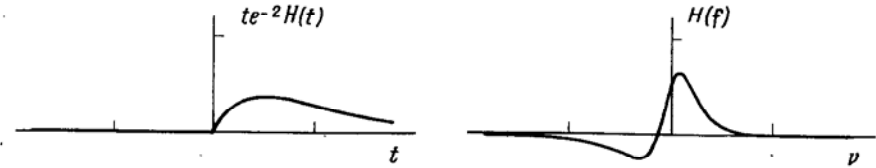


Рис. 2.4. Преобразование Хартли импульса с критическим затуханием вида $te^{-2}H(t)$.

лу 2:

$$I = \tau^{-1} \int_{(1-\tau)/2}^{(1+\tau)/2} \cos 2\pi f t dt = [\sin 2\pi f t - \cos 2\pi f t] \Big|_{(1-\tau)/2}^{(1+\tau)/2} / 2\pi f \tau = 2 \sin \pi f \tau (\cos \pi f + \sin \pi f) / 2\pi f \tau.$$

Наконец, используя правило 3, перейдем к пределу при $\tau \rightarrow 0$, в результате чего, как и выше, получим: $\cos \pi f + \sin \pi f$. Очевидно, применение теоремы о фильтрующем свойстве является менее трудоемким, однако общий подход с использованием приведенных выше трех правил всегда оказывается работоспособным и легким в практическом применении.

Импульс с критическим затуханием. Колебание $V(t) = te^{-t}H(t)$ известно как импульсная характеристика резонатора с критическим затуханием, т.е. резонатора, затухание которого не столь мало, чтобы импульсная характеристика превосходила определенный уровень, и не столь велико, чтобы было невозможно оценить инерционные характеристики системы. В данном случае (рис. 2.4) имеем

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t} H(t) \cos 2\pi f t dt = \int_0^{\infty} te^{-t} \cos 2\pi f t dt = (1 + 4\pi^2 f^2 - 4\pi^2 f^2) / (1 + 8\pi^2 f^2 + 16\pi^4 f^4).$$

При выполнении интегрирования целесообразно использовать таблицы интегралов. Другой подход заключается в применении известных теорем. Например, при известном преобразовании колебания $V(t)$ можно непосредственно получить преобразование функции $tV(t)$. В следующей главе для справки приводится ряд основных теорем.

Энергетический и фазовый спектры

Не всегда легко понять характер изменения комплексной функции, имея графики ее вещественной и мнимой частей, однако в оптике и других областях физики более привычным является использование понятия квадрата модуля преобразования, или энергетического спектра:

$$P(f) = |F(f)|^2 = [F_r(f)]^2 + [F_i(f)]^2.$$

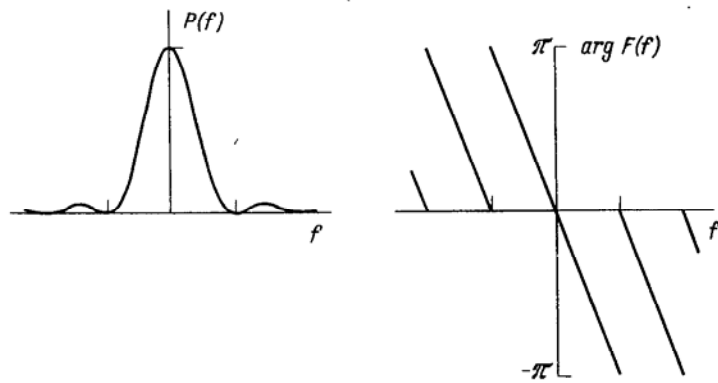


Рис. 2.5. Энергетический спектр (слева) и фазовый спектр (справа) стро-
бирующей функции $\Pi(t - 1/2)$.

Энергетический спектр является четной функцией частоты и поэтому более прост для понимания. С другой стороны, энергетический спектр содержит в себе по крайней мере половину информации об исходном колебании, так как теряется информация о фазе. Тем не менее для ряда приложений энергетический спектр может оказаться инструментом исследования, который необходим.

Энергетический спектр можно получить непосредственно из преобразования Хартли. Имеем

$$\begin{aligned} P(f) &= F_r^2 + F_i^2 = E^2(f) + O^2(f) = \\ &= (1/4)[H(f) + H(-f)]^2 + (1/4)[H(f) - H(-f)]^2 = \\ &= \{[H(f)]^2 + [H(-f)]^2\}/2. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо возведения в квадрат вещественной и мнимой частей и их суммирования при данном значении f мы возводим в квадрат и суммируем два значения преобразования Хартли для частот $+f$ и $-f$. При этом результат суммирования должен быть разделен на два, так как каждая из функций вида $H(f)$ и $H(-f)$, возведенная в квадрат, равна полиному энергетическому спектру, тогда как вещественная и мнимая части содержат по половине этой величины.

В оптике представляет затруднение измерение фазы преобразования Фурье, однако в анализе сигналов рассмотрение фазовых функций (фазочастотных характеристик) является привычной процедурой, хотя их понимание и толкование требуют определенной подготовки и опыта. Примеры энергетического спектра и фазовой функции иллюстрируются на рис. 2.5. Фазовая функция может быть непосредственно вычислена из выражения

$$\arg F(f) = \arctg [F_i(f)/F_r(f)].$$

Фаза преобразования Фурье может быть также непосредственно

получена из преобразования Хартли

$$\begin{aligned} \arg F(f) &= \arctg \{ -[H(f) - H(-f)]/[H(f) + H(-f)] \} = \\ &= \arctg [-O(f)/E(f)]. \end{aligned}$$

В объяснении характера изменения фазы при изменении частоты оказывается полезным опыт. При интерпретации фазы следует учитывать, что поведение фазы непосредственно связано с амплитудой, причем большие фазовые изменения происходят вблизи нуля амплитуды, и наоборот — незначительные изменения фазы при больших амплитудах.

Имеем следующую формулу для определения фазы преобразования Фурье через преобразование Хартли:

$$\arg F(f) = \arctg \{ [H(-f) - H(f)]/[H(f) + H(-f)] \}.$$

Полезной альтернативой одновременному представлению вещественной и мнимой частей является построение траектории на комплексной плоскости путем изображения $F_i(f)$ как функции $F_r(f)$ с обозначением на этой траектории значений частоты как параметра. Тогда для любой данной частоты амплитуда $|F(f)|$ определяет расстояние от начала координат до соответствующей точки параметрически заданной кривой, а фаза преобразования определяет угловую координату. Такая диаграмма для функции $\Pi(t - 1/2)$ изображена на рис. 2.6. Комплексная плоскость для данной диаграммы — это не плоскость из теории функции комплексной переменной, где независимая переменная оказывается комплексной величиной. Здесь независимая переменная f вещественна, однако зависимая переменная $F(f)$ является

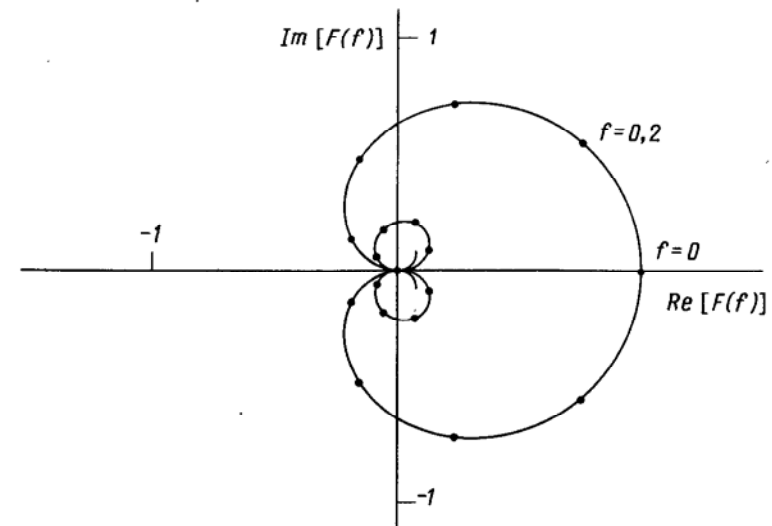


Рис. 2.6. Параметрически заданная кривая $F(f)$ на комплексной плоскости, где $|F(f)|$ и $\arg F(f)$ рассматриваются как полярные координаты. Значения параметра f фиксируются через интервалы, равные 0,2.

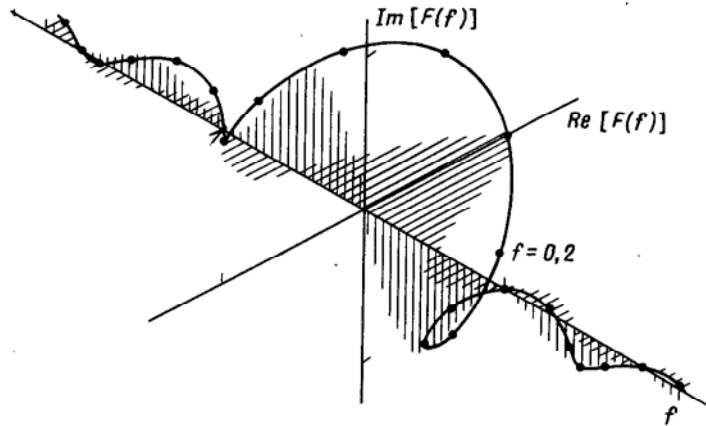


Рис. 2.7. Представление комплексного преобразования в виде скрученной кривой, параметр которой обозначен через интервалы, равные 0,2. Вещественная и мнимая части заштрихованы.

комплексной, и можно рассматривать ее вещественную и мнимую части как декартовы координаты.

Заслуживает внимания тот факт, что при движении по траектории к началу координат скорость «вычерчивания» траектории, измеряемая отношением длины дуги к частотному интервалу, уменьшается таким образом, что угловая скорость «бегущей» точки на траектории остается постоянной. Это свойство отражает линейную природу графа $\arg F(f)$; разрывы фазовой функции обусловлены прохождением траектории через начало координат.

Можно также рассматривать это преобразование в виде трехмерной винтовой траектории, для которой в данном случае можем представить только перспективную проекцию, но может быть сделана ирривольная модель этой кривой. На рис. 2.7 показана эта винтовая кривая, дополняющая наше представление еще одним измерением. Траекторию в полярных координатах можно представить в виде проекции винтовой кривой на плоскость $\text{Im}[F(f)] - 0 - \text{Re}[F(f)]$, а вещественную и мнимую части как проекции на горизонтальную и вертикальную плоскости прямоугольной системы координат соответственно.

В определенном смысле преобразование Хартли может рассматриваться как гладкая форма представления вещественного колебания. Будучи чисто вещественным, преобразование Хартли не требует других способов представления, тогда как другие способы могут быть непосредственно получены из него.

Задачи

- 2.1. Упражнения в нахождении преобразований. Найти преобразования Хартли следующих функций:
- $\sin 2t$,

- $\cos 2\pi ft$,
 - $\exp[-t/2] H(t)$,
 - $\delta(t+1)$,
 - $1/(t^2+1)$,
 - $H(t)$,
 - $H(t-1)$,
 - $H(t) - H(t-2)$,
 - $(1-t^2)[H(t+1) - H(t-1)]$,
 - $\cos(\pi/2)[H(t+1) - H(t-1)]$,
 - $1/t$,
 - $t \exp[-\pi t^2] H(t)$.
- 2.2. Упражнения в нахождении преобразований. Найти преобразования Хартли следующих функций:
- $\cos 3t$,
 - $\sin 2\pi ft$,
 - $\exp[-2t] H(t)$,
 - $\delta(2t+1)$,
 - $1/(t^2+2)$,
 - $tH(t)$,
 - $2H(t-2)$,
 - $H(t-2) - H(t-3)$,
 - $(1-t^4)[H(t+1) - H(t-1)]$,
 - $\cos^2 \pi t [H(t+1/2) - H(t-1/2)]$,
 - t^2 ,
 - $(1-4t^2)[H(t+1/2) - H(t-1/2)]$.
- 2.3. Спаренные импульсы. Колебание $V(t)$ равно нулю при $t < 0$, затем претерпевает скачок до 1 и сохраняет это значение вплоть до момента $t = 1$, уменьшается до нуля при $t = 2$, осуществляет скачок до 1 при $t = 3$ и прекращает свое существование при $t = 4$. Какой вид имеет преобразование Хартли этого колебания?
- 2.4. Импульс с критическим затуханием. Определить преобразование Хартли колебания $t \exp[-2t] H(t)$.
- 2.5. Функция $V(t)$ по определению равна e^{-t} для положительных t и $-e^t$ для отрицательных t . Показать, что преобразование Хартли этой функции есть $4\pi f / (1 + 4\pi^2 f^2)$.
- 2.6. Знаковая функция (сигнатура). Показать, что $\text{sgn } t$ имеет преобразование Хартли $1/\pi f$.
- 2.7. Функция шаха. Показать, что $\text{Ш}(t)$ имеет преобразование Хартли $\text{Ш}(f)$, где
- $$\text{Ш}(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n).$$
- 2.8. Преобразование Хартли комплексной функции. Установить связь преобразования Хартли с преобразованием Фурье функции $V(t)$.
- 2.9. Правило преобразования.
- При условии, что $V(t)$ и $H(f)$ — пара преобразований Хартли, показать, что $V(t)$ и $H(\omega/2\pi)/\sqrt{2\pi}$ удовлетворяют исходному интегралу Хартли.
 - Каково соотношение между $V(t/\sqrt{2\pi})$ и $H(\omega/\sqrt{2\pi})$?
- 2.10. Дополнительная функция. Показать, что $\cos t - \sin t = \text{cas}(-t) = \text{cas}'(t)$.
- 2.11. Свойства функции cas . Показать, что
- $\text{cas}(A+B) = \cos A \cos B + \sin A \text{cas}' B$,
 - $\text{cas}(A-B) = \cos A \text{cas}' B + \sin A \cos B$,
 - $\text{cas } A \text{ cas } B = \cos(A-B) + \sin(A+B)$,

Глава 3 ТЕОРЕМЫ

- г) $\cos A + \cos B = 2\cos(A+B)/2 \cos(A-B)/2$,
 д) $\cos A - \cos B = 2\cos(A+B)/2 \sin(A-B)/2$.
- 2.12. *Серводвигатель*. Для перевода двигателя из одного состояния в другое за минимальное время к нему прикладывается напряжение, вызывающее максимально допустимый момент вращения. Когда двигатель набирает число оборотов в два раза меньше максимального, имеет место реверс момента, а когда двигатель близок к остановке, момент вращения оказывается равным нулю. Момент представляется функцией вида $H(t) - 2H(t-1) + H(t-2)$. Определить преобразование Хартли этой функции.
- 2.13. *Один цикл*. Как компромисс между необходимой скоростью вращения и мощностью выбирается момент вида $\sin \pi t [H(t) - H(t-2)]$, реализующий применительно к предыдущей задаче стратегию «полный вперед – полный назад». Определить преобразование Хартли и сравнить его с результатом предыдущей задачи.
- 2.14. *Сохранение энергии*. Известно, что если $e(t)$ и $o(t)$ являются четной и нечетной составляющими функции $f(t)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e(t)]^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} [o(t)]^2 dt.$$

Является ли данное разложение единственным? Найти (или доказать неправомочность существования) другие представления $f(t)$, для которых справедливо то же самое правило суммирования. Исключить случай, когда для любого t одна из составляющих тождественно равна нулю.

... Чтобы избежать утомительного повторения слов «равно...», я проведу, как часто делаю в своей работе, две параллельные линии, или геометрические линии одинаковой длины, таким образом: =, так как никакие другие две линии не могут быть более равными.

Роберт Рекорд, 1557. (Первое известное использование знака равенства)

Теоремы преобразований полезны тем, что они позволяют избежать сложного математического анализа, аналогично тому, как обычные правила вычислений избавляют от необходимости повторения того, что уже было сделано. Владея рядом теорем, можно получить новые преобразования, исходя из традиционных, свести данную задачу к известной и объединить функций в более сложные формы без необходимости все выполнять с самого начала. За счет этого упрощается интегрирование функций, имеющих аналитическое описание.

Численные методы расчетов также оказываются выгодными, когда применяются теоремы, позволяющие перейти к более простым или быстрым операциям. Наконец, это обеспечивает владение необходимым аппаратом логического мышления.

Рассматриваются два класса теорем. Первый из них связан с такими процедурами, как усечение, модуляция, свертка, и другими общепринятыми операциями, которые могут выполняться над функцией. Этот класс теорем дает ответ на вопрос: какой процедуре подвергается (как видоизменяется) преобразование исходной функции? Например, каким образом изменяется преобразование функции, являющейся зеркальным изображением исходной функции? Ответ заключается в следующем: преобразование также изменяется на зеркальное, что может показаться не столько простым, сколько очевидным выводом. Тем не менее опыт показывает, что подобные знания оказываются полезными, особенно если могут быть применены соображения относительно симметрии, как в данном примере.

Второй класс теорем связан с соотношениями между функциями и их преобразованиями, что обычно может быть выражено в виде равенств. Например, интеграл от функции в бесконечных пределах равен главному значению ее преобразования. Здесь мы вновь имеем крайне простую теорему, которая однако избавляет от необходимости выполнять трудоемкое интегрирование, оказывается полезной при проверке численных расчетов и является сильным инструментом в случае, когда при решении какой-либо задачи возникает вопрос о выборе метода ее решения: аналитического или численного.

Значительная часть сведений об этих теоремах может быть сведена в таблицы, которые неизменны.

Соответствие операций

Если колебание $V(t)$ имеет преобразование Хартли $H(f)$, то каким будет это преобразование для функции $V(t/T)$, т. е. функции, получающейся из исходного колебания в результате растяжения шкалы времени в T раз? Непосредственное определение интеграла для положительных T приводит к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(t/T) \operatorname{cas} 2\pi f t dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(t') \operatorname{cas} (2\pi f T t') T dt' = T \int_{-\infty}^{\infty} V(t') \operatorname{cas} [2\pi (Tf) t'] dt' = TH(Tf).$$

Если T отрицательно, то для новой переменной $t' = t/T$ должно быть произведено изменение пределов интегрирования, вследствие чего результат равен $-TH(Tf)$. Чтобы учесть обе возможности (положительных и отрицательных T), можно сформулировать вывод следующим образом:

Если $V(t)$ имеет преобразование Хартли $H(f)$, то $V(t/T)$ имеет преобразование Хартли вида $|T|H(Tf)$.

Для сравнения приведем теорему подобия, или теорему изменения масштаба, применительно к преобразованию Фурье:

Таблица 3.1

Теоремы для преобразований Фурье и Хартли

Теорема	$V(t)$	$F(f)$	$H(f)$
Подобие	$V(t/T)$	$ T F(Tf)$	$ T H(Tf)$
Сложение	$V_1(t) + V_2(t)$	$F_1(f) + F_2(f)$	$H_1(f) + H_2(f)$
Зеркальное изображение	$V(-t)$	$F(-f)$	$H(-f)$
Сдвиг	$V(t - T)$	$\exp[-i2\pi f T]F(f)$	$\sin 2\pi Tf H(-f) + \cos 2\pi Tf H(f)$
Модуляция	$V(t) \cos 2\pi f_0 t$	$1/2 F(f - f_0) + 1/2 F(f + f_0)$	$1/2 H(f - f_0) + 1/2 H(f + f_0)$
Свертка	$V_1(t) * V_2(t)$	$F_1(f) F_2(f)$	$1/2 [H_1(f) H_2(f) - H_1(-f) H_2(-f) + H_1(f) H_2(-f) + H_1(-f) H_2(f)]$
Корреляция	$V(t) \star V(t)$	$ F(f) ^2$	$1/2 [H(f)]^2 + [H(-f)]^2$
Произведение	$V_1(t) V_2(t)$	$F_1(f) \star F_2(f)$	$1/2 [H_1(f) \star H_2(f) + H_1(-f) \star H_2(f) + H_1(f) \star H_2(-f) - H_1(-f) \star H_2(-f)]$
Производная	$V'(t)$	$i2\pi f F(f)$	$-2\pi f H(-f)$
Вторая производная	$V''(t)$	$-4\pi^2 f^2 F(f)$	$-4\pi^2 f^2 H(f)$

Если $V(t)$ имеет преобразование Фурье $F(f)$, то $V(t/T)$ имеет преобразование Фурье вида $|T|F(Tf)$.

Благодаря этой очень близкой аналогии удобно перечислить теоремы для обоих преобразований так, чтобы были наглядны и очевидны их различия.

Соответствующие соотношения сведены в табл. 3.1. Ниже будут опущены выводы для простых соотношений, подобных рассмотренному примеру.

Свертка

В табл. 3.1 операции свертки и взаимной корреляции условно обозначены символами «звездочка» (*) и «пентаграмма» (★). В соответствии с этими обозначениями имеем

$$V_1(t) * V_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(t - u) V_2(u) du,$$

$$V_1(t) \star V_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(t + u) V_2(u) du.$$

Важным свойством теоремы о свертке является следующее: если одна или обе функции, входящие в формулу свертки, являются либо четными либо нечетными, то теоремы Хартли и Фурье (т. е. формулы прямых преобразований Хартли и Фурье для свертки) совпадают. Имеем теорему:

Если $V_1(t)$ является четной функцией, то свертка $V_1(t) * V_2(t)$ имеет преобразование Хартли вида $H_1(f) H_2(f)$.

Если одна из этих функций является нечетной, то формула упрощается.

Если $V_1(t)$ — нечетная функция, то свертка $V_1(t) * V_2(t)$ имеет преобразование Хартли вида $H_1(f) H_2(-f)$.

Соотношения между преобразованиями во временной и частотной областях

В дополнение к теоремам, сведенным в табл. 3.1 и иллюстрирующим характер изменения преобразований при выполнении различных операций над исходными функциями, существует ряд соотношений между параметрами исходных функций и их преобразований. Эти соотношения дают ответы на ряд часто возникающих вопросов. Предположим, что имеется преобразование некоторой функции, но мы не располагаем самой функцией. При этом требуется оценить или проанализировать некоторое свойство функции, но не обязательно характер функции в целом. Один способ решения этой задачи заключается в операции обращения, т. е. в нахождении обратного преобразования, для получения всей функции и дальнейшем анализе интересующего нас свойства. Однако, так как наши требования более скромны, должен существовать более оптимальный способ. Таким образом, если бы мы хотели вычислить интеграл от функции в

Таблица 3.2

Теоремы для соотношений между преобразованиями во временной и частотной областях

Теорема	Свойство	Соотношения для преобразования Фурье	Соотношения для преобразования Хартли
Интеграл в бесконечных пределах	$\int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt$	$= F(0)$	$= H(0)$
Теорема Рэлея	$\int_{-\infty}^{\infty} [V(t)]^2 dt$	$= \int_{-\infty}^{\infty} F(f) F^*(f) df$	$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [H^2(f) + H^2(-f)] df$
Первый момент	$\int_{-\infty}^{\infty} tV(t) dt$	$= F'(0)/(-i2\pi)$	$= -H'(0)/2\pi$
Второй момент	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 V(t) dt$	$= -F''(0)/4\pi^2$	$= -H''(0)/4\pi^2$
Центроид	$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} tV(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt}$	$= iF'(0)/2\pi F(0)$	$= -H'(0)/2\pi H(0)$

бесконечных пределах, мы могли бы инвертировать прямое преобразование и затем выполнить интегрирование, однако при этом получается такой же результат, как при простой фиксации главного значения преобразования. Аналогично, если требуется определить абсциссу центра тяжести функции (центроида), например, в задачах оценки минимума фазы, ее следовало бы непосредственно вычислить в соответствии с определением как отношение двух интегралов; но намного полезнее знать то, что абсцисса центроида легко вычисляется через наклон графика прямого преобразования в центральной точке, т. е. при $f = 0$. Соответствующие данные, которые оказываются очень полезными, приведены в табл. 3.2.

Задачи

- 3.1. *Теорема о сдвиге.* Дать формулировку теоремы о сдвиге, исходя из соответствующей теоремы для преобразования Фурье.
- 3.2. *Теорема об автокорреляции.* Показать, что $V(t) \star V(t)$ имеет преобразование Хартли вида $[H_e(f)]^2 + [H_o(f)]^2$, где H_e и H_o — соответственно четная и нечетная составляющие преобразования $H(f)$.
- 3.3. *Теорема о произведении.* Показать, что $V_1(t) V_2(t)$ имеет преобразование Хартли вида $H_{1e} \star H_{2e} - H_{1o} \star H_{2o} + H_{1e} \star H_{2o} + H_{1o} \star H_{2e}$.
- 3.4. *Теорема о дифференцировании.* Дать формулировку теоремы о диффе-

ренцировании для преобразования Хартли, исходя из того, что $V'(t)$ имеет преобразование Фурье, равное $i2\pi f F(f)$.

- 3.5. *Теорема о дифференцировании.* Дать формулировку теоремы о дифференцировании из теоремы о сдвиге с использованием предельного перехода при сдвиге, стремящемся к нулю.
 - 3.6. *Теорема о дифференцировании.* Показать, что n -я производная $V^{(n)}(t)$ имеет преобразование Хартли $\cos(\pi/2) (2\pi f)^n H[(-1)^n f]$.
 - 3.7. *Вторая производная.* Студент рассуждает следующим образом: «Дифференцирование функции $V(t)$ сказывается на изменении преобразования $H(f)$ таким образом, что $H(f)$ претерпевает зеркальное отражение и умножается на величину $(-2\pi f)$. Поэтому при вторичном дифференцировании необходимо еще раз получить зеркальное изображение преобразования, расположив которого на оси частот совпадает с исходным преобразованием $H(f)$, и умножить его на величину $(-2\pi f)$. Следовательно, $V''(f)$ имеет преобразование Хартли вида $(-2\pi f)^2 H(f)$ ». В чем заключается ошибочность этих рассуждений?
 - 3.8. *Второй момент.* Показать, что второй момент колебания может быть определен из его преобразования следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 V(t) dt = -H''(0)/4\pi^2.$$
 - 3.9. *Скользящее среднее.* Сглаженное колебание $V_{sm}(t)$ формируется из $V(t)$ путем его интегрирования на интервале $[t - 1/2, t + 1/2]$. Показать, что преобразование Хартли колебания $V_{sm}(t)$ равно $H(f) \text{sinc} f$.
 - 3.10. *Получение преобразования Фурье из преобразования Хартли.* Показать, что

$$F(f) = \frac{1}{2} \exp[-i\pi/4] H(f) + \frac{1}{2} \exp[i\pi/4] H(-f).$$
 - 3.11. *Получение преобразования Хартли из преобразования Фурье.* Показать, что

$$H(f) = \frac{1}{2} \exp[i\pi/4] F(f) + \frac{1}{2} \exp[-i\pi/4] F^*(-f).$$
 - 3.12. *Наклонная ступенька.* Функция $f(t)$ равна

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t < -1, \\ t, & -1 < t < 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$
- Студент замечает, что функция $g(t) = \Pi(t) \star \text{sgn}(t)$ аналогична по характеру функции $f(t)$, но в отличие от последней сжата в 2 раза. Зная, что $g(t)$ имеет преобразование Хартли вида $G(f) = \text{sinc}(f)/2\pi f$, студент применяет теорему подобия и доказывает, что функция $f(t) = g(t/2)$ имеет преобразование Хартли $2G(2f) = \text{sinc}(2f)/\pi f$. Другой студент рассуждает следующим образом: «Дано: $f(t) = \frac{1}{2} \Pi(t/2) \star \text{sgn}(t/2)$; функция $\Pi(t) \star \text{sgn}(t)$ имеет преобразование Хартли $G(f)$, $\Pi(t/2) \star \text{sgn}(t/2)$ имеет преобразование Хартли вида $2G(2f)$. Но $\text{sgn}(t/2)$ не отличается от $\text{sgn}(t)$; поэтому функция $\frac{1}{2} \Pi(t/2) \star \text{sgn}(t) = f(t)$ имеет преобразование Хартли вида $G(2f)$ ». Объясните расхождение результатов двух студентов.
- 3.13. *Сдвиг четной функции.* При условии четности функции $f(x)$ показать, что $f(x - a)$ имеет преобразование Хартли вида $\cos(2\pi f) H(f)$.

Глава 4 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ

Человеческий разум перед вечной дилеммой:
Совершенство бытия иль совершенство труда?

У. Б. Йейтс

Хотя мы стремимся рассматривать время как непрерывную переменную, на практике необходимо использовать дискретную переменную для описания временных рядов, например когда для вычисления требуется дискретизация этой переменной или в случае накопления данных на регулярных интервалах. Поэтому введем дискретную переменную τ , которая будет соответствовать времени, но принимать только целочисленные значения от 0 до $N - 1$. Выбран именно этот интервал, а не $[1, N]$ или $[-(N/2) + 1, N/2]$ в соответствии с общепринятой практикой. Таким образом, прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и обратное ему преобразование имеют стандартную форму

$$F(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \exp[-i2\pi v\tau/N],$$

$$f(\tau) = \sum_{v=0}^{N-1} F(v) \exp[i2\pi v\tau/N].$$

Функция $f(\tau)$ может быть дискретным представлением исходного непрерывного колебания или функцией переменной, дискретной по своей природе.

Дискретное преобразование Хартли

Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) вещественной функции $f(\tau)$ и соответствующее обратное преобразование определяются соотношениями

$$H(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \text{cas}(2\pi v\tau/N),$$

$$f(\tau) = \sum_{v=0}^{N-1} H(v) \text{cas}(2\pi v\tau/N),$$

где, как и выше, используется обозначение $\text{cas } \theta = \cos \theta + \sin \theta$, введенное Хартли.

Для получения обратного ДПХ воспользуемся свойством ортогональности

$$\sum_{v=0}^{N-1} \text{cas}(2\pi v\tau/N) \text{cas}(2\pi v\tau'/N) = \begin{cases} N, & \tau = \tau', \\ 0, & \tau \neq \tau'. \end{cases}$$

Подставляя величину $N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \text{cas}(2\pi v\tau/N)$, определяющую пре-

образование $H(v)$, в выражение $\sum_{v=0}^{N-1} H(v) \text{cas}(2\pi v\tau/N)$, получим

$$\sum_{v=0}^{N-1} H(v) \text{cas}(2\pi v\tau/N) = \sum_{v=0}^{N-1} N^{-1} \sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau') \text{cas}(2\pi v\tau'/N) \text{cas}(2\pi v\tau/N) =$$

$$= N^{-1} \sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau') \sum_{v=0}^{N-1} \text{cas}(2\pi v\tau'/N) \text{cas}(2\pi v\tau/N) =$$

$$= N^{-1} \sum_{\tau'=0}^{N-1} f(\tau') \times \begin{cases} N, & \tau = \tau' \\ 0, & \tau \neq \tau' \end{cases} = f(\tau),$$

что подтверждает справедливость обратного преобразования.

Коэффициент N^{-1} в ДПХ заимствуется из практики использования ДПФ, для которого величина $F(0)$ равна постоянной составляющей функции $f(\tau)$; другими словами, ДПХ является симметричной процедурой. Кроме этого, ДПХ является вещественным преобразованием, так как вещественной является функция $f(\tau)$.

Физический смысл величин τ и v

Переменная τ интерпретируется как время, а дискретная переменная v — как частота; однако следует помнить две особенности. Если в качестве единицы времени t принята секунда, т. е. временной интервал между последовательными элементами временного ряда $f(t)$ равен 1 с, то частота равна v/N [Гц], а не v , следовательно, частотный интервал между соседними элементами последовательности $H(v)$ равен N^{-1} [Гц]. По мере увеличения v возрастает соответствующая частота, но только до значения $v = N/2$; при дальнейшем росте величины v соответствующая ей частота становится равной $(N - v)/N$, обращаясь в нуль при $v = N$.

Четная и нечетная составляющие

Как и в случае непрерывного преобразования, ДПХ имеет четную и нечетную компоненты

$$H(v) = E(v) + O(v),$$

однако должны быть высказаны некоторые соображения в отношении определений в силу принятого ограничения диапазона изменения v от 0 до $N - 1$. Общепринятый способ учета этого ограничения заключается в присвоении функции вне области ее определения таких значений, чтобы сформировать циклическую (периодическую) функцию с периодом N . Таким образом, для $v = -1$ мы присваиваем функции значение $H(N - 1)$, так как $v = -1$ и $v = N - 1$ разделены периодом длины N . В общем случае будем присваивать функции $H(-v)$, где $-N \leq v \leq -1$, значения $H(N - v)$, для которых независимая переменная заключена в основном диапазоне изменения v . С помощью данной процедуры мы приходим к более простому соотношению между v и частотой: можно сказать, что v/N представляет собой не что иное, как частоту в герцах в диапазоне $-N/2 < v < N/2$. Получим также соотношения для четной и нечетной составляющих, согласующиеся с равенствами, приведенными выше. Таким образом, имеем

$$E(v) = [H(v) + H(N - v)]/2,$$

$$O(v) = [H(v) - H(N - v)]/2.$$

Из определения $F(v)$ для ДПФ очевидно, что $F(v)$ может быть получено с использованием четной и нечетной составляющих ДПХ

$$F(v) = E(v) - iO(v).$$

С другой стороны, если мы располагаем преобразованием $F(v)$, то можно сформировать $H(v)$:

$$H(v) = \text{Re}F(v) - \text{Im}F(v).$$

Эти выражения имеют сходство с соотношениями, полученными выше для непрерывного преобразования.

Примеры дискретных преобразований Хартли

Ниже приводится ряд примеров, иллюстрирующих свойства ДПХ. Сначала будут рассмотрены аналитические выражения, а затем проанализирован ряд последовательностей, заданных в численной форме.

Экспоненциально-убывающая функция. Для сравнения с примером, приведенным в гл. 2 для непрерывной функции, рассмотрим функцию

$$f(\tau) = \begin{cases} 0,5, & \tau = 0, \\ \exp[-\tau/2], & \tau = 1, 2, \dots, 15, \end{cases}$$

которая представляет рассмотренную выше непрерывную функцию с помощью $N = 16$ равноотстоящих отсчетов. Функции $f(\tau)$ при аргументе $\tau = 0$, соответствующем разрыву колебания $V(t)$, присваивается значение $[V(0+) + V(0-)]/2 = 0,5$. Соответствующее преобразование $H(v)$, показанное на рис. 4.1, имеет явное сходство с отсчетами непрерывной функции, взятыми через интервалы $\Delta\omega/2\pi = 1/16$.

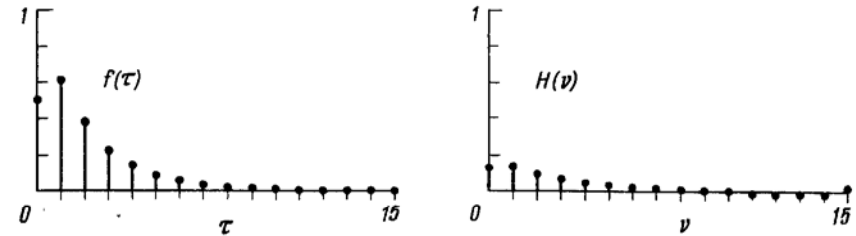


Рис. 4.1. Представление усеченной экспоненты, использованной выше для иллюстрации непрерывного преобразования, в виде 16 отсчетных значений (слева) и соответствующее ДПХ (справа).

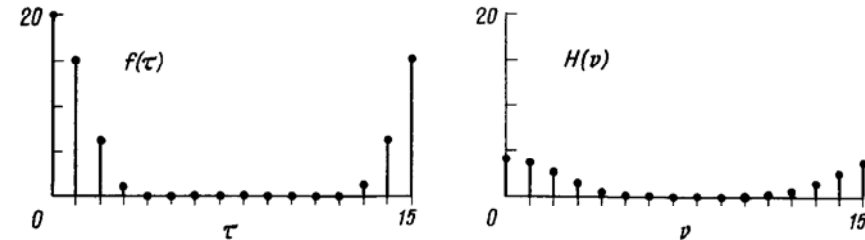


Рис. 4.2. Остаточные значения, представляющие гладкий биномиальный импульс (слева) и соответствующее ДПХ (справа).

Расхождения, которые в данном примере незначительны, частично обусловлены усечением экспоненциальной функции, а также доопределением функции, что имеет место и для ДПФ.

Таблица 4.1

Биномиальная последовательность и ее ДПХ

τ, v	$f(\tau)$	$H(v)$
0	20	4
1	15	3,56
2	6	2,49
3	1	1,32
4	0	0,5
5	0	0,12
6	0	0,01
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0,01
11	0	0,12
12	0	0,5
13	1	1,32
14	6	2,49
15	15	3,56

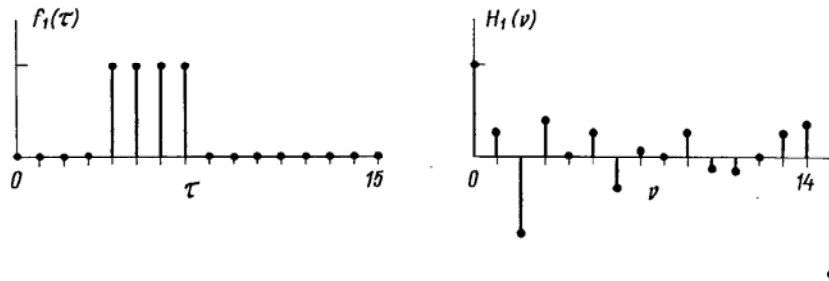


Рис. 4.3. $H_1(\nu)$ стробирующей функции.

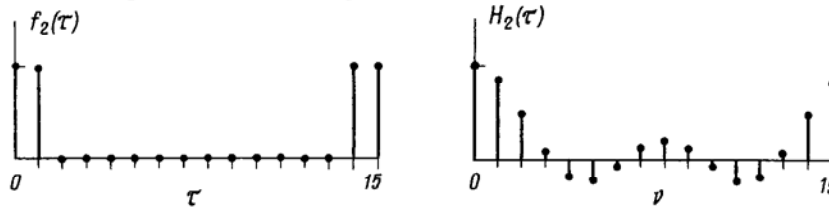


Рис. 4.4. $H_2(\nu)$ стробирующей функции, симметричной относительно $\tau = 0$.

Биномиальный импульс. В качестве более наглядного примера рассмотрим биномиальную последовательность $\{1, 6, 15, 20, 15, 6, 1\}$, представляющую собой отсчеты гладкого импульса. Для получения наиболее простого результата будем считать, что значение функции $f(\tau)$ максимально при $\tau = 0$. Таким образом, $f(\tau) = 6!/(3 - \tau)!(\tau + 3)!$ и (см. табл. 4.1 и рис. 4.2) представляет сглаженный импульс, максимум которого имеет место при $\nu = 0$.

Для численной проверки полезно знать, что сумма значений ДПХ вида $\sum H(\nu)$ равна $f(0)$. И наоборот, сумма значений $\sum f(\tau)$ равна $NH(0)$. Таким образом, если $\{f(0) f(1) f(2) f(3)\}$ имеет ДПХ $\{H(0) H(1) H(2) H(3)\}$, то $f(0) = H(0) + H(1) + H(2) + H(3)$ и $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 4 H(0)$.

Стробирующая функция. Рассмотрим оператор стробирования, обеспечивающий выборку из последовательности, состоящей из 16 элементов, второй группы в составе 4 элементов и заменяющий остальные 12 элементов нулями; эта операция эквивалентна умножению исходной последовательности на последовательности вида $\{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\}$.

Ее ДПХ $H_1(\nu)$ показано на рис. 4.3. Если теперь рассмотрим другой оператор стробирования вида $\{1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\}$,

то получим его ДПХ $H_2(\nu)$, отличающееся от $H_1(\nu)$ и представленное на рис. 4.4. Численные результаты для обоих случаев нормированы к единице и приведены в табл. 4.2.

Во втором случае имеет место стробирование, симметричное

Таблица 4.2

ДПХ двух стробирующих функций

τ, ν	$f_1(\tau)$	DHT_1	$f_2(\tau)$	DHT_2
0	0	1	1	1
1	0	0,25	1	0,853
2	0	-0,854	0	0,483
3	0	0,374	0	0,07
4	1	0	0	-0,2
5	1	0,25	0	-0,236
6	1	-0,354	0	-0,083
7	1	0,05	0	0,1135
8	0	0	0	0,2
9	0	0,25	0	0,1135
10	0	-0,146	0	-0,083
11	0	-0,167	0	-0,236
12	0	0	0	-0,2
13	0	0,25	0	0,07
14	0	0,354	1	0,483
15	0	-1,257	1	0,8525

относительно $\tau = 0$ и имеющее циклическое представление. Следовательно, в преобразовании $H_2(\nu)$ отсутствуют быстрые колебания, а само преобразование напоминает функцию вида $\sin x/x$, соответствующую центрированному прямоугольному импульсу.

Степени свободы

Нами были установлены взаимно однозначные соотношения между дискретными преобразованиями Фурье и Хартли. При этом возникает вопрос из области теории информации. Как объяснить тот факт, что N вещественных значений ДПХ можно использовать вместо N комплексных значений ДПФ, которые содержат $2N$ вещественных чисел? Это можно понять, вспомнив о том, что эрмитово свойство ДПФ означает двойную избыточность; таким образом, ДПФ имеет только N степеней свободы, несмотря на то что имеется $2N$ вещественных коэффициентов. Так как для ДПХ вследствие его симметрии не характерно свойство вырожденности, N его вещественных коэффициентов эквивалентны N комплексным коэффициентам ДПФ.

Другие вещественные ядра

Функция $\cos \theta$ может рассматриваться как синусное колебание со сдвигом 45° , автоматически соответствующее косинусной и синусной компонентам. Если в качестве ядра преобразования использовать функцию $2^{1/2} \sin(\theta + \alpha)$, где α — произвольный сдвиг, то весовые множители косинусной и синусной компонент будут неодинаковы, однако при этом будут отсутствовать информационные потери, за исключением случаев, когда $\alpha = 0, \pi/2, \dots$.

Следовательно, можно предположить справедливость обратного преобразования; ядро обратного преобразования равно $\text{ctg}^{1/2} \alpha \sin \theta + \text{tg}^{1/2} \alpha \cos \theta$.

Теоремы

Каждой теореме дискретного преобразования Фурье соответствует подобная теорема для дискретного преобразования Хартли. Для полноты представления материала в табл. 4.3 и 4.4 даются все теоремы, в том числе теоремы о свертке и корреляции, однако рассмотрение последних будет отложено до следующей главы. На данном этапе достаточно сделать замечание, что свертка функций непрерывного аргумента, обозначаемая символом $*$, отличается от процедуры циклической свертки дискретных последовательностей, для обозначения которой используется символ \oplus .

Можно отметить, что среднее значение последовательности $f(\tau)$ определяется величиной $H(0)$, а значение ее среднего квадрата равно $\sum H^2$.

Некоторые теоремы для двух различных преобразований характе-

Таблица 4.3

Теоремы для операций при дискретных преобразованиях

Теорема	Функция $f(\tau)$	ДПФ $F(v)$	ДПХ $H(v)$
Зеркальное изображение	$f(-\tau)$	$F(-v)$	$H(-v)$
Сложение	$f_1(\tau) + f_2(\tau)$	$F_1(v) + F_2(v)$	$H_1(v) + H_2(v)$
Сдвиг	$f(\tau - T)$	$\exp[-i2\pi Tv/N] F(v)$	$\cos(2\pi Tv/N) H(v) - \sin(2\pi Tv/N) \times H(N-v)$
Свертка	$f_1(\tau) \oplus f_2(\tau)$	$N F_1(v) F_2(v)$	$\frac{1}{2} N [H_1 H_2 - H_1(-) H_2(-) + H_1 H_2(-) + H_1(-) H_2]$
Произведение	$f_1(\tau) f_2(\tau)$	$F_1(v) \oplus F_2(v)$	$\frac{1}{2} N [H_1 \oplus H_2 - H_1(-) \oplus H_2(-) + H_1 \oplus H_2(-) + H_1(-) \oplus H_2]$
Корреляция	$f(\tau) \oplus f(\tau)$	$\frac{1}{2} N F(v) ^2$	$N \{ [H(v)]^2 + [H(-v)]^2 \}$
Растяжение	$\{f(0) 0 f(1) \dots\}$		См. текст
Первая производная	$f'(\tau)$	$i2\pi v F(v)$	$2\pi v H(-v)$
Вторая производная	$f''(\tau)$	$-4\pi^2 v^2 F(v)$	$-4\pi^2 v^2 H(v)$

Таблица 4.4

Теоремы для соотношений между дискретными преобразованиями

Сумма последовательности	$\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) = NF(0) = NH(0)$
Первый момент	$f(0) = \sum_{v=0}^{N-1} F(v) = \sum_{v=0}^{N-1} H(v)$
Второй момент	$\sum_{\tau=0}^{N-1} [f(\tau)]^2 = N \sum_{v=0}^{N-1} F(v) ^2 = N \sum_{v=0}^{N-1} H(v) ^2$

ризуются точным соответствием, как, например,

$$\sum H(v) = f(0) \text{ и } \sum f(\tau) = N \times H(0),$$

тогда как в других случаях имеют место различия.

Теорема о зеркальном изображении. Если из последовательности $f(\tau)$ сформировать ее зеркальное изображение $f(-\tau)$, то в результате ведущий (нулевой) элемент сохранит неизменное положение, а остальные элементы изменят порядок следования на обратный. Таким образом, вместо элемента $f(1)$ исходной последовательности имеем член $f(-1)$, который интерпретируется как $f(-1 \text{ mod } N)$ и равен $f(N-1)$, т.е. является последним элементом новой последовательности. Следовательно, вместо последовательности $\{a b c d e f g h\}$ имеем $\{a h g f e d c b\}$, что в области преобразования соответствует замене вида $\{A B C D E F G H\} \rightarrow \{A H G F E D C B\}$.

Теорема сложения. Свойство суперпозиции, иллюстрируемое теоремой сложения, просто отражает линейность оператора ДПХ.

Теорема о сдвиге. Сначала рассмотрим пример, в котором реализуется единичный сдвиг последовательности $\{a_0 a_1 a_2 \dots a_{N-1}\}$, имеющей ДПХ вида $\{a_0 a_1 a_2 \dots a_{N-1}\}$. В соответствии с теоремой о сдвиге для $T=1$ имеем последовательность $\{a_{N-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_{N-2}\}$, для которой ДПХ равно

$$\{a_0 C_1 a_1 C_2 a_2 \dots C_{N-1} a_{N-1}\} - \{0 S_1 a_{N-1} S_2 a_{N-2} \dots S_{N-1} a_1\},$$

где $C_v = \cos(2\pi v/N)$, $S_v = \sin(2\pi v/N)$.

Для выполнения данной операции сдвига мы перемещаем каждый элемент исходной последовательности на одну позицию вправо. Последний элемент в соответствии с принятым свойством цикличности перемещается на первую позицию.

ДПХ состоит из двух последовательностей, одна из которых содержит косинусные, другая — синусные коэффициенты. ДПФ также представляет собой совокупность двух последовательностей с синусными и косинусными коэффициентами, однако для ДПХ в отличие от ДПФ для синусной компоненты характерно зеркальное отображение — это свойство именуется обратной индексацией. Для доказательства теоремы о сдвиге подставим $f(t+T)$ в формулу, опреде-

ляющую прямое ДПХ, и получим

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau + T) \text{cas}(2\pi\nu\tau/N) &= \sum_{\tau'=T}^{N-1+T} f(\tau') \text{cas}[2\pi\nu(\tau' - T)/N] = \\ &= \sum_{\tau'} f(\tau') [\text{cas}(2\pi\nu\tau'/N) \cos(2\pi\nu T/N) + \text{cas}'(2\pi\nu\tau'/N) \sin(2\pi\nu T/N)] = \\ &= \cos(2\pi\nu T/N) \sum_{\tau'} f(\tau') \text{cas}(2\pi\nu\tau'/N) + \sin(2\pi\nu T/N) \sum_{\tau'} f(\tau') \text{cas}'(2\pi\nu\tau'/N) = \\ &= \cos(2\pi\nu T/N) H(\nu) - \sin(2\pi\nu T/N) \sum_{\tau'} f(\tau') \text{cas}(-2\pi\nu\tau'/N) = \\ &= \cos(2\pi\nu T/N) H(\nu) - \sin(2\pi\nu T/N) H(-\nu). \end{aligned}$$

Теорема о свертке. В общем случае преобразование свертки $f_1(\tau) \otimes f_2(\tau)$ содержит четыре компоненты. Основными величинами, которые должны быть вычислены, являются прямые произведения $P_a(\nu) = H_1(\nu) H_2(\nu)$ и смешанные произведения $P_b(\nu) = H_1(\nu) H_2(-\nu)$. С использованием этих обозначений имеем

$$H(\nu) = \frac{1}{2} N [P_a(\nu) - P_a(-\nu) + P_b(\nu) + P_b(-\nu)].$$

Таким образом, данная процедура включает два, а не четыре действия умножения. Теперь если $H_2(\nu)$ — четная функция (т.е. $H_2(\nu) = H_2(-\nu)$), то

$$H(\nu) = N H_1(\nu) H_2(\nu).$$

Точно так же простую формулу получим в случае, когда $H_2(\nu)$ является нечетной функцией; при этом имеем

$$H(\nu) = N H_1(-\nu) H_2(\nu).$$

Вследствие коммутативности $H(\nu) = N H_1(\nu) H_2(\nu)$, если либо $H_1(\nu)$, либо $H_2(\nu)$ являются четными функциями. Часто одна либо другая функция обладает свойствами симметрии или антисимметрии, что приводит к более простым соотношениям. Ввиду важности операции свертки мы вернемся к ней в следующей главе.

Теорема о произведении. В теореме о произведении четыре компоненты предполагают выполнение только двух операций свертки, так как две другие просто реализуются путем зеркального отображения двух сомножителей.

Теорема о растяжении. Сходство этой теоремы с соответствующей теоремой для случая непрерывной независимой переменной относится к изменению масштаба по оси абсцисс, когда $V(t)$ преобразуется в $V(t/T)$. Так как величина T может быть либо больше, либо меньше единицы, операция может представлять собой либо растяжение, либо сжатие. В случае дискретной переменной изменения масштаба также имеют практическое значение, например когда последовательность регулярных измерений должна быть повторена с большей или меньшей скоростью. Функция $V(t/T)$ определена для любого T при заданной $V(t)$, но это утверждение несправедливо для $f(\tau/T)$ при заданной функции $f(\tau)$, где $\tau = 0, 1, \dots, N-1$. Следовательно,

применительно к теореме подобия отсутствует строгая аналогия. Теорема о растяжении имеет отношение только к увеличению масштаба времени, что осуществляется добавлением нулей в исходную последовательность. Наиболее просто это можно проиллюстрировать на примере.

Пусть последовательность $\{a \ b \ c \ d\}$ имеет последовательность ДПХ $\{\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta\}$. Тогда последовательности $\{a \ 0 \ b \ 0 \ c \ 0 \ d \ 0\}$ соответствует последовательность ДПХ вида $\frac{1}{2} \{\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \alpha \ \beta \ \gamma \ \delta\}$.

В правомерности этого результата можно убедиться, анализируя выражение для прямого ДПХ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \text{cas } \tau\theta + \frac{1}{2}\gamma \text{cas } 2\tau\theta + \frac{1}{2}\delta \text{cas } 3\tau\theta + \frac{1}{2}\alpha \text{cas } 4\tau\theta + \\ + \frac{1}{2}\beta \text{cas } 5\tau\theta + \frac{1}{2}\gamma \text{cas } 6\tau\theta + \frac{1}{2}\delta \text{cas } 7\tau\theta. \end{aligned}$$

Убеждаемся в том, что при $\tau = 0$ имеем $f(0) = a$. При нечетном τ сумма равна нулю, для четного τ эта сумма сводится к выражению: $\alpha + \beta \text{cas } \tau\theta + \gamma \text{cas } 2\tau\theta + \delta \text{cas } 3\tau\theta$, для которого обратное преобразование Хартли имеет вид: $\{a \ b \ c \ d\}$.

Выводы

Свойства ДПХ свидетельствуют в пользу использования этого преобразования в численном анализе. Тот факт, что значения преобразования Хартли являются вещественными, создает удобства при выполнении расчетов. Кроме того, полезно свойство симметрии обращения преобразования, так как не требуется запоминать, к какой области представления относится данная последовательность. Более того, ряд теорем для преобразования Фурье имеет различную форму для разных областей представления (временной или частотной); этот недостаток отсутствует у ДПХ. Множитель N зависит от области представления, и от него можно было бы избавиться, однако на практике почти всегда существуют нормирующие или калибровочные факторы, которые должны быть учтены по окончании численных расчетов. Опыт показывает, что последний этап заключается в учете в совокупной форме коэффициентов пропорциональности, поэтому отклонение от точного соответствия между прямым и обратным преобразованиями, заключающееся в появлении коэффициента N , не имеет значения в практике вычислений.

Задачи

- 4.1. *Теорема сложения.* Пусть последовательность $\{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8\}$ имеет ДПХ вида $\{4,5 \ -1,71 \ -1 \ -0,71 \ -0,5 \ -0,29 \ 0 \ 0,71\}$. Показать, как использовать теорему сложения для непосредственного получения ДПХ последовательности $\{8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1\}$.
- 4.2. *Теорема о зеркальном изображении.* Если последовательность $\{1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16\}$

- 32 64 128} имеет ДПХ вида $\frac{1}{8} \{255 - 117 - 153 - 125 - 85 - 33 51 215\}$, то каково ДПХ последовательности $\{1 128 64 32 16 8 4 2\}$?
- 4.3. Теорема о сдвиге. Некоторое колебание $f(\tau)$ имеет ДПХ $H(\nu) = \{32 0 -6 10 32 0 -6 10\}$. Какой вид имеют ДПХ колебаний: а) $f(\tau - 4)$, б) $f(\tau + 4)$?
- 4.4. Теорема о сдвиге. Пусть $H(\nu) = \{0 0,884 1,25 -0,884 -3,75 -4,419 -2,5 -0,884\}$. Какой вид будет иметь $H(\nu)$, если выборки $f(\tau)$ осуществляются на единицу измерения τ раньше?
- 4.5. Теорема о корреляции.
- а) Какова корреляционная функция последовательности $f(\tau) = \{1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1\}$?
- б) Какой вид имеет ДПХ последовательности $f(\tau)$?
- в) Дать вывод выражения для ДПХ корреляционной функции последовательности $f(\tau)$.
- 4.6. Теорема о свертке. Показать, каким образом можно получить преобразование Харгли свертки, исходя из известной формулы $F(\nu) = F_1(\nu) F_2(\nu)$ для преобразования Фурье.
- 4.7. Теорема о произведении. Доказать теорему о произведении.
- 4.8. Теорема о корреляции. Показать, каким образом можно получить теорему о корреляции из теоремы о свертке.
- 4.9. Числовые упражнения. Найти ДПХ следующих последовательностей:
- а) $\{3 1 4 1 5 9 2 6\}$,
 б) $\{1 4 2 8 5 7 1 4\}$,
 в) $\{2 7 1 8 2 8 1 8\}$,
 г) $\{3 1 8 3 0 9 8 8\}$.
- 4.10. Числовые упражнения. Найти ДПХ следующих последовательностей:
- а) $\{2 8 5 7 1 4 2 8\}$,
 б) $\{4 2 8 5 7 1 4 2\}$,
 в) $\{5 7 1 4 2 8 5 7\}$,
 г) $\{7 1 4 2 8 5 7 1\}$,
 д) $\{8 5 7 1 4 2 8 5\}$.
- 4.11. Биномиальные последовательности. Найти ДПХ следующих последовательностей:
- а) $\{1 7 21 35 35 21 7 1\}$,
 б) $\{0 1 5 10 10 5 1 0\}$,
 в) $\{20 15 6 1 0 1 6 15\}$,
 г) $\{35 35 21 7 1 1 7 21\}$.
- 4.12. Частные случаи. Какой вид имеют ДПХ последовательностей $\{1 2\}$ и $\{0,9 0,1\}$?
- 4.13. Последовательности с группами нулей. Найти ДПХ последовательностей:
- а) $\{3 1 4 1 5 9 2 6 0 0 0 0 0 0 0 0\}$,
 б) $\{0 0 0 0 3 1 4 1 5 9 2 6 0 0 0 0\}$,
 в) $\{0 0 0 0 0 0 0 0 3 1 4 1 5 9 2 6\}$.
- 4.14. Последовательности с числом элементов, выражаемым простыми числами. Найти ДПХ последовательностей:
- а) $\{1 2 3\}$,
 б) $\{1 2 3 4 5\}$,
 в) $\{1 2 3 4 5 6 7\}$,
 г) $\{1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11\}$.
- 4.15. Случайные последовательности. Элементы последовательности случайным образом принимают значения $+1$ или -1 .
- а) Объяснить, почему $H(0)$ приблизительно равно нулю.
 б) Что можно сказать о величине $H(N/2)$?

- в) Чему равно среднее квадратическое отклонение σ величины $H(0)$ для числовой случайной последовательности?
- 4.16. Преобразования последовательностей из целых чисел. 8-элементная последовательность состоит только из целых чисел. При каком условии ДПХ этой последовательности будет состоять только из целых чисел?
- 4.17. Сравнение ДПХ с преобразованием Харгли. Получить ДПХ последовательности $\{8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 4 5 6 7\}$ и сравнить его с функцией $(64/24) \text{sinc}^2(8\nu/24)$.

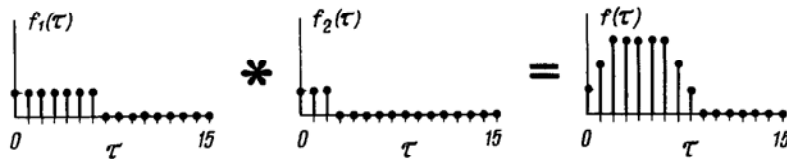


Рис. 5.1. Последовательности $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ и их циклическая свертка $f(\tau)$.

каждого из N значений свертки. Циклическая свертка $f_{\text{cyc}}(\tau)$ определяется выражением

$$f_{\text{cyc}}(\tau) = \sum_{\tau'=0}^{N-1} f_1(\tau' \bmod N) f_2[(\tau - \tau') \bmod N].$$

В этом выражении τ' изменяется от 0 до $N-1$, однако результат свертки не изменится в предположении, что τ' будет изменяться от 1 до N ; необходимо только, чтобы были просуммированы все N произведений. При представлении операции свертки многие принимают в качестве начального элемента последовательности данных первый, а не нулевой, и это не должно вызывать путаницу.

В качестве примера циклической свертки рассмотрим рис. 5.1, где представлен случай, для которого

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ f_2(\tau) &= \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ f(\tau) &= \{1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}. \end{aligned}$$

В данном примере мы могли бы восстановить обычную свертку, разрезав окружность между $\tau=15$ и $\tau=0$ и распрямив ее. Это обусловлено тем, что свертка $f(\tau)$ отлична от нуля только в интервале от $\tau=0$ до $\tau=9$. Однако если рассмотреть последовательность с большим числом ненулевых элементов

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ f_2(\tau) &= \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ f_{\text{ord}}(\tau) &= \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1\}, \\ f_{\text{cyc}}(\tau) &= \{3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3\}, \end{aligned}$$

то обычная свертка будет существовать на интервале от $\tau=0$ до $\tau=18$, тогда как циклическая свертка заполняет один полный цикл, соответствующий окружности периметра N , причем имеет место наложение для $\tau=0$ и $\tau=1$. Следовательно, циклическая свертка начинается не с цифр $\{1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots\}$, как это имеет место для обычной свертки, а с цифр $\{3 \ 3 \ 3 \ 4 \dots\}$, так как элементы «хвоста» последовательности $f_{\text{ord}}(\tau)$, $\{\dots \ 2 \ 1\}$ перекрываются с начальными элементами $\{1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots\}$.

Программа вычислений для циклической свертки дается в приложении 1 под названием CCONV. Обе программы CONV и CCONV реализуют процедуры, определяющие обычную и циклическую свертки, однако в ряде ситуаций целесообразнее использовать методы

преобразования, рассматриваемые ниже в данной главе. Так, программа FHTCONV реализует циклическую свертку двух последовательностей с числом элементов 2^p с применением теоремы о свертке. Существует также метод, использующий умножение матриц, что оказывается удобным; скорость выполнения процедуры умножения матриц, реализуемой на ЭВМ, должна проверяться для каждой ЭВМ.

Значительная часть последующего материала посвящена именно циклической свертке, и едва ли есть необходимость введения специального символа для этой операции. Напомним, что в данной главе будет использоваться символ \odot . Таким образом,

$$f_{\text{cyc}}(\tau) = f_1(\tau) \odot f_2(\tau).$$

Дополнение нулями

В ряде приложений циклическая свертка — это именно то, что требуется, но в других случаях целесообразно использовать обычную свертку. При этом очень просто перейти к большим значениям N путем дополнения последовательностей нулями. Обе последовательности дополняются нулями до получения одинакового числа элементов, которое будут иметь циклическая свертка и обычная.

Вопрос, касающийся размещения этих нулей, не является очевидным. Дополнительные нули могут быть начальными и замыкающими элементами, могут группироваться с данными, однако эти нули не должны размещаться между соседними элементами последовательности данных. Если выполняется операция свертки последовательности, состоящей из N_1 элементов, с последовательностью из N_2 элементов, то число элементов в их обычной свертке равно $N_1 + N_2 - 1$, как это имеет место для свертки $\{1 \ 3 \ 3 \ 1\} * \{1 \ 1\} = \{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1\}$, где $N_1 = 4$, $N_2 = 2$, а последовательность результирующей свертки состоит из 5 элементов. Мы ничего не теряем при добавлении нулей к более короткой последовательности с тем, чтобы добиться равенства числа элементов каждой из последовательностей. Таким образом:

$$\{1 \ 1 \ 0 \ 0\} * \{1 \ 3 \ 3 \ 1\} = \{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0\}.$$

Однако если осуществляется циклическая свертка двух 4-элементных последовательностей, то в результате также получим последовательность из 4 элементов

$$\{1 \ 1 \ 0 \ 0\} \odot \{1 \ 3 \ 3 \ 1\} = \{2 \ 4 \ 6 \ 4\}.$$

Предположим, что необходимо осуществить проверку программного обеспечения коммерческого характера путем доказательства справедливости того, что $\{1 \ 1 \ 1 \ 1\} * \{1 \ 1 \ 1 \ 1\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1\}$. При выполнении циклической свертки для $N = 4$ имеем

$$\{1 \ 1 \ 1 \ 1\} \odot \{1 \ 1 \ 1 \ 1\} = \{4 \ 4 \ 4 \ 4\}.$$

Поэтому для получения выходной последовательности треугольной

формы дополним заданные последовательности нулями и получим $\{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\} \otimes \{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\} = \{1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\}$.

Это — удовлетворительный результат. Выходная последовательность имеет треугольную форму, и центр тяжести соответствующей фигуры, как и следовало ожидать, смещен вправо к $\tau = 3$. Теперь пусть мы имеем симметричные последовательности и желаем убедиться, что $\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\} * \{1\ 1\ 1\ 1\ 1\} = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\}$,

где жирные цифры указывают для нашего примера начало отсчета τ . Так как выходная последовательность состоит из 9 элементов, мы должны увеличить число элементов до $N > 8$. В данном примере возьмем $N = 16$ на основании того, что программы, связанные с анализом данных, легче всего реализуются для степеней числа 2. Тогда справедливо равенство

$$\{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\} * \{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\} = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\},$$

однако мы можем также центрировать дополненные последовательности, помещая центральные элементы в точку $\tau = 0$. Тогда

$$\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\} \otimes \{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\} = \{5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\}.$$

Из выражения для центрированных последовательностей видим, что для получения желаемого результата дополнительные нули должны быть размещены в середине этих последовательностей, а не справа. Неумение дополнять последовательности данных до требуемых размеров и размещение дополнительных нулей в правой части последовательности ставят в тупик пользователей программ, разработанных другими специалистами.

Вышеприведенный пример может быть решен вручную; аналоговое вычислительное устройство, облегчающее выполнение свертки, имеет два концентрических наборных диска, каждый из которых состоит из N сегментов, в которые могут быть записаны две последовательности, вращающиеся относительно друг друга в противоположных направлениях, что обусловлено знаком «минус» в одном из множителей в сумме, определяющей процедуру свертки. Для вычисления каждого члена свертки следует повернуть ротор на угол, равный длине дуги одного сегмента, и затем определить сумму произведений, составленных для соседних сегментов (рис. 5.2). Вращающиеся механизмы, использующие этот принцип, были сконструированы во времена применения электромеханических аналоговых вычислительных устройств.

Обращение свертки

Очевидно, из анализа аналогового вычислительного устройства следует, что обычная свертка всегда может быть обращена. Пусть

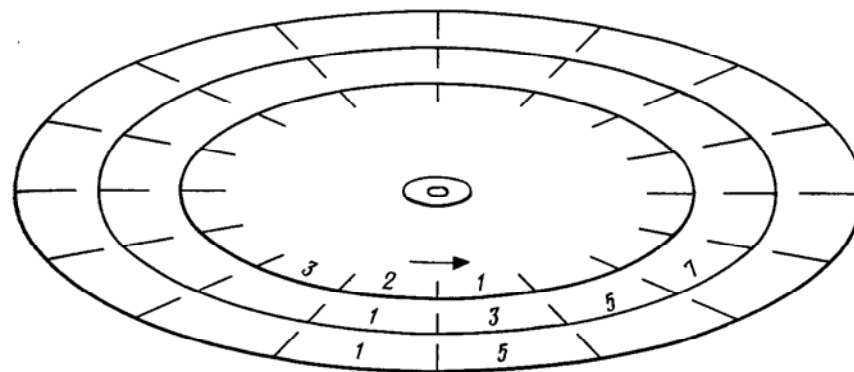


Рис. 5.2. Аналоговое вычислительное устройство, установленное в положение для выполнения свертки последовательностей $\{1\ 2\ 3\}$ и $\{1\ 3\ 5\ 7\}$, результатом которой является последовательность $\{1\ 5\ 14\ 26\ 29\ 21\}$. На роторе (вращающемся диске) в обратном порядке записана последовательность $\{f_1\}$; на внутреннем кольце статора (неподвижного диска) записана последовательность $\{f_2\}$, а на внешнем кольце сегментно регистрируется результат, т. е. последовательность $\{f_3\}$. Ротор находится в положении, соответствующем вычислению второго элемента (5) последовательности $\{f_3\}$.

статор, на внутреннем кольце которого содержится информация о $f_2(\tau)$, имеет внешнее кольцо, на котором может быть записан результат свертки $f(\tau)$. Если результат свертки известен, но последовательность $f_1(\tau)$ на роторе отсутствует, то представляется возможность определить недостающие значения следующим образом. Устанавливая пустую ячейку (сегмент) для $f_1(0)$ против $f_2(0)$, можно констатировать следующее: «Первое значение, умноженное на 1, равно 1, поэтому в первую пустую ячейку записываем цифру 1. Вращая диск, устанавливаем эту ячейку против $f_2(1)$. Тогда сумма, составленная из произведения второго значения на 1 и произведения 1×3 , равна 5; поэтому записываем цифру 2 во вторую ячейку» и т. д.

Циклическая свертка не является обращаемой, если только не будет присутствовать достаточное число нулей, чтобы предотвратить наложения. Иногда дополнение последовательностей нулями представляет собой приемлемый вариант, а в иных случаях — нет.

Простая программа реализации вращающегося вычислительного устройства, используемого для обращения свертки, приведена в приложении 1 под названием ICONV. Обращенные последовательности могут быть также определены с помощью этого метода, исходя из необходимости того, чтобы результирующая свертка представляла собой последовательность $\{1\}$.

Теорема о свертке

Теорема о свертке, удовлетворяющая дискретному преобразованию Хартли (ДПХ), формулируется следующим образом. Если $f(\tau)$ — цик-

лическая свертка последовательностей $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$, т. е.

$$f(\tau) \equiv f_1(\tau) \circledast f_2(\tau) = \sum_{\tau'=0}^{N-1} f_1(\tau') f_2(\tau - \tau'),$$

то

$$H(v) = \frac{1}{2} [H_1(v) H_2(v) - H_1(-v) H_2(-v) + H_1(v) H_2(-v) + H_1(-v) H_2(v)],$$

где $H(v)$, $H_1(v)$ и $H_2(v)$ – ДПХ последовательностей $f(\tau)$, $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ соответственно. Этот результат может быть выражен другим способом в виде

$$H(v) = H_1(v) H_{2e}(v) + H_1(-v) H_{2o}(v),$$

где $H_2(v) = H_{2e}(v) + H_{2o}(v)$ – сумма четной и нечетной компонент.

Обычный путь численного выполнения свертки заключается в дискретном преобразовании Фурье каждой из двух заданных последовательностей и в последующем умножении их комплексных элементов в области преобразования Фурье, что равнозначно умножению четырех соответствующих вещественных величин в элементе ДПФ свертки. Далее следует выполнить обратное преобразование Фурье, не забывая при этом о необходимости изменения знака перед мнимой единицей i . Аналогичная процедура использования преобразования Хартли для выполнения свертки потребует только двух умножений вещественных величин в элементе ДПХ свертки.

Однако очень часто возникают ситуации, особенно при обработке изображений, а также в общем случае при цифровой фильтрации, когда одна из свертываемых функций, например $f_2(\tau)$, является четной. Поэтому в данных ситуациях теорема о свертке упрощается и приводится к виду

$$H(v) = H_1(v) H_2(v).$$

Благодаря этому упрощению необходимо только определить ДПХ обеих последовательностей данных, затем поэлементно перемножить получившиеся вещественные последовательности и к полученному результату применить операцию ДПХ. Таким образом, предлагаемая процедура имеет вид

$$f_1(\tau) \circledast f_2(\tau) = \text{ДПХ от } [(\text{ДПХ от } f_1) \times (\text{ДПХ от } f_2)].$$

Этот изящный и простой результат имеет сходство с результатом для ДПФ, а различие состоит лишь в том, что применительно к преобразованию Фурье определяются два прямых ДПФ, выполняется ряд умножений комплексных величин, а затем получившаяся комплексная последовательность подвергается процедуре *обратного* ДПФ. Вопрос выбора коэффициента N^{-1} будет рассмотрен ниже.

Теорема о свертке в частотной области (спектральное сглаживание)

Иногда операция свертки должна выполняться в области преобразования, как, например, в случае необходимости сглаживания спектра $H_1(v)$ для выделения его наиболее интересных свойств и характеристик. С этой целью были предложены различные сглаживающие функции $H_2(v)$; так как эти сглаживающие функции всегда являются четными, процедура свертки в частотной области имеет вид $H_1(v) \circledast H_2(v) = \text{ДПХ от } [(\text{ДПХ от } H_1) \times (\text{ДПХ от } H_2)]$.

Вновь имеем простой и изящный результат, требующий выполнения только умножения вещественных величин.

Выбор сглаживающей функции $H_2(v)$ субъективен по своему характеру, и может оказаться, что биномиальные коэффициенты $(1/4)\{2\ 1\ \dots\ 1\}$, $(1/16)\{6\ 4\ 1\ \dots\ 1\ 4\}$, $(1/64)\{20\ 15\ 6\ 1\ \dots\ 1\ 6\ 15\}$ и т. д. лучше всего удовлетворяют требованиям, сводя этот выбор к реализации в чистом виде процедуры сглаживания. Тогда второй сомножитель – ДПХ от $H_2(v)$ – принимает вид простой суммы косинусов; например, ДПХ последовательности $(1/4)\{2\ 1\ \dots\ 1\}$ пропорционально величине $1 + \cos(2\pi\tau/N)$. (Коэффициент пропорциональности зависит от N ; однако на практике может оказаться целесообразным не оперировать в процессе вычислений ни этим коэффициентом, ни $1/4$, оставив их в запасе вплоть до завершения процедуры.) Коэффициент $1 + \cos(2\pi\tau/N)$, иногда называемый «окном типа косинус в квадрате», является изменяющимся в широком диапазоне изменения τ весовым коэффициентом, максимальным при $\tau = 0$ и монотонно уменьшающимся до нуля при $\tau = N/2$. Коэффициенты, соответствующие биномиальным сглаживающим последовательностям с большим числом элементов, значительно усиливают влияние взвешивающего фактора, снижая его в направлении нуля во все более ограниченном диапазоне изменения τ .

Числовой пример свертки

Вышеприведенный пример теперь можно использовать для иллюстрации метода преобразования для осуществления свертки.

В табл. 5.1 в первых двух столбцах помещены две последовательности данных f_1 и f_2 , подлежащие свертке. В следующих двух столбцах приводятся дискретные преобразования Хартли H_1 и H_2 . Пятый столбец содержит произведение $H_1 H_2$, а последний – последовательность f_3 , которая представляет собой свертку, равную дискретному преобразованию Хартли столбца произведений $H_1 H_2$, умноженному на N . Появление коэффициента N обусловлено тем, что в определении ДПХ фигурирует коэффициент N^{-1} . Может оказаться более целесообразным умножение на N^2 на завершающем этапе вычислений в рамках нормировки, калибровки и других процедур.

Примечательно, что значения f_3 , приведенные в последнем столбце, отличаются от точных значений. Максимальное расхождение

Таблица 5.1

Процедура свертки

f_1	f_2	H_1	H_2	$H_1 H_2$	f_3
2	1	0,5	2	1	6
1	4	0,427	1,457	0,622	15,008
0	6	0,25	-0,5	-0,125	20
0	4	0,073	-0,043	-0,003	15,008
0	1	0	0	0	6
0	0	0,073	0,043	0,003	0,992
0	0	0,25	-0,5	-0,125	0
1	0	0,427	-1,457	-0,622	0,992

достигает в данном примере 0,0004. Однако приближенный характер результата в принципе свойствен методу с использованием преобразования, вычисляемого с конечной точностью.

В табл. 5.2 представлен пример довольно общего характера. Все четыре произведения, фигурирующие в теореме о свертке, табулированы с использованием обозначения $\tilde{H}_1 = H_1(-v)$. Предпоследний столбец содержит полусуммы элементов предыдущих четырех столбцов, а значения в последнем столбце представляют собой ДПХ столбца для суммы, умноженное на 8. При анализе столбцов, элементами которых являются произведения четырех видов, становится ясно, что 6-й столбец является зеркальным изображением 5-го столбца со знаком минус, а 8-й столбец — зеркальным изображением 7-го. Отсюда ясно, что нет необходимости выполнять четыре умножения, а достаточно двух. Один способ вычислений состоит в представлении требуемой суммы в виде

$$\frac{1}{2} H_1(v) [H_2(v) + H_2(-v)] + \frac{1}{2} H_1(-v) [H_2(v) - H_2(-v)],$$

что является другой формой записи тождественного выражения, приведенного в данной главе выше.

Подавляющее большинство сверток, реализуемых в численной форме в повседневной практике, требует только упрощенной процедуры, иллюстрируемой с помощью табл. 5.1. В приложении 1 приводится программа FHTCONV, реализующая эту свертку с использованием преобразования Хартли. Целесообразнее всего рассматривать эту программу как реализацию циклической свертки, однако она может быть использована и для выполнения обычной свертки путем дополнения данных достаточным количеством нулей для предотвращения наложения. Почти всегда необходимо дополнять одну из двух последовательностей нулями, но при большом количестве дополнительных нулей снижаются преимущества этого метода преобразования. Возможно, что непосредственное суммирование, реализуемое в программах CONV и SCONV, окажется более быстрой процедурой; проверку достоверности этой возможности следует осуществлять путем сравнения времени машинного счета, когда число элементов более короткой последовательности меньше или сравнимо с логариф-

Таблица 5.2

Свертка несимметричных последовательностей

f_1	f_2	H_1	H_2	$H_1 H_2$	$-\tilde{H}_1 \tilde{H}_2$	$H_1 \tilde{H}_2$	$\tilde{H}_1 H_2$	$\frac{1}{2} \text{sum}$	f_3
1	1	0,5	2	1	-1	1	1	1	2,992
1	2	0,552	0	0	-0,151	-0,666	0	-0,408	3,011
2	3	0	0	0	0	0	0	0	7,008
0	4	-0,125	0,207	-0,026	0	0	0,041	0,007	10,998
0	3	0,25	0	0	0	0	0	0	13,008
0	2	0,198	0	0	0,026	0,041	0	0,033	12,989
0	1	-0,25	0	0	0	0	0	0	8,992
0	0	-0,125	-1,207	0,151	0	0	-0,666	-0,258	5,002

мом (по основанию 2) числа элементов более длинной последовательности.

Коэффициент N^{-1}

В определении ДПХ в силу его аналогии с ДПФ был включен коэффициент N^{-1} . Однако числовые примеры, приведенные выше, наводят на мысль вернуться к вопросу: не лучше ли было бы использовать коэффициент $N^{-1/2}$? В таком случае, дважды применяя одно и то же преобразование, мы получим исходную функцию, тогда как аналогичное двухэтапное применение принятого здесь определения для получения исходной функции предполагает наличие дополнительного коэффициента N . Однако применительно к операции свертки кажущееся упрощение оказывается обманчивым, так как коэффициент N , фигурирующий в теореме о свертке, не исчезает, а принимает вид $N^{1/2}$.

В приложении к фильтрации, где используются одни и те же коэффициенты фильтра при реализации умножения различных последовательностей данных на коэффициент N , который фигурировал выше после второго преобразования, можно избежать использования этого коэффициента, включив его в коэффициенты усиления фильтра.

В ряде приложений требуется, чтобы выходная последовательность была нормирована к единичной сумме, что имеет место для распределений вероятности; в других приложениях требуется нормировка, предполагающая равенство начального элемента единице, что справедливо для корреляционных функций. В этих случаях коэффициент N может быть учтен при нормировке.

Кроме того, при отображении выходных последовательностей в графической форме должен быть выбран масштабный коэффициент, соответствующий формату устройства отображения (дисплея). Учет различных коэффициентов в виде одного масштабного коэффициента позволяет полностью избежать этапа изменения (нормировки) каждого выходного элемента в процессе предварительных вычислений.

С целью повышения быстродействия вычислительных процедур

можно также в принципе не осуществлять умножение на величину N , предусматриваемое определением преобразования. И только на завершающем этапе нормировки все неучтенные коэффициенты могут быть объединены в один калибровочный, или масштабный, коэффициент.

Числовой пример корреляционной функции

Примеры алгоритма определения корреляционной функции могут быть даны как для простого случая, когда заданная функция является четной, так и для более общего случая. Сначала рассмотрим простой случай на примере выборочной последовательности вида {6 4 1 0 0 0 1 4}. Представление алгоритма в виде таблицы по существу идентично свертке в случае, когда одна из функций является четной, за исключением того, что алгоритм оперирует только с одной заданной функцией. В табл. 5.3 третий столбец представляет собой ДПХ заданной последовательности $f(\tau)$. Для получения данных 4-го столб-

Таблица 5.3

Быстрый алгоритм определения корреляционной функции четной последовательности

τ, v	$f(\tau)$	$H(v)$	$[H(v)]^2$	$C(\tau)$
0	6	2	4	70,016
1	4	1,457	2,123	56
2	1	0,5	0,25	28,032
3	0	0,043	0,002	8
4	0	0	0	1,984
5	0	0,043	0,002	8
6	1	0,5	0,25	28,032
7	4	1,457	2,123	56

Таблица 5.4

Быстрый алгоритм определения корреляционной функции последовательности общего вида

τ, v	$f(\tau)$	$H(v)$	$H(-v)$	$(1/2)[H^2 + H^2(-)]$	$C(\tau)$
0	1	4,5	4,5	20,25	204
1	2	-1,707	0,707	1,707	175,998
2	3	-1	0	0,5	156
3	4	-0,707	-0,293	0,293	144,002
4	5	-0,5	-0,5	0,25	140
5	6	-0,293	-0,707	0,293	144,002
6	7	0	-1,0	0,5	156
7	8	0,707	-1,707	1,707	175,998

ца следует просто возвести в квадрат значения ДПХ 3-го столбца и для получения окончательного результата выполнить ДПХ данных 4-го столбца. Как и выше, ограничиваясь тремя знаками после запятой, получим приближение точного результата, представляющее собой рациональные дроби.

Общий случай иллюстрируется в табл. 5.4, где заданной является последовательность {1 2 3 4 5 6 7 8}. В обоих примерах требуется вычисление для последнего столбца только половины приведенных в нем значений плюс одно, что обусловлено свойством симметрии.

Низкочастотная фильтрация

Пример низкочастотной фильтрации был упомянут в начале данной главы при рассмотрении вопроса, связанного со сглаживанием метеорологических данных. Эта процедура должна заключаться в реализации свертки с прямоугольной функцией, содержащей 12 элементов, следовательно, результат будет получен с помощью фильтра, имеющего передаточную функцию вида $\text{sinc}(12f)$. Так как понимание простого случая такого рода представляется достаточно полезным, мы подробно проанализируем соответствующий пример. Предположим, что ежемесячно фиксируемые данные, зарегистрированные за 8 лет, должны быть подвергнуты сглаживанию посредством свертки с последовательностью $1/12 \{ (1/2) 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 (1/2) \}$. Так как всего имеется 96 элементов и 13 коэффициентов фильтра, сглаженная последовательность содержит 108 элементов. Естественно, для данного примера первые шесть и последние шесть элементов выходной последовательности (результата свертки) не представляют никакой ценности, так как среднегодовые данные могут быть определены только по истечении 12 месяцев. Однако в ряде других приложений имеет значение вся последовательность, полученная в результате свертки, для которой ниже и будет выполнен расчет. Выбирая $N = 128$, мы тем самым обеспечиваем согласование последовательностей.

Последовательность данных, которая будет нами искусственно сформирована, можно представить как результаты ежемесячных измерений температуры, для которых характерны сезонные случайные изменения, наложенные на температурный тренд. Увеличение содержания углекислого газа в атмосфере представляет собой угрозу для урожая груш, являющихся одним из средств к существованию сельского населения. В силу того что повышение температуры на несколько градусов приводит к нерентабельности культивирования этой сельскохозяйственной продукции, необходимо исследование тенденций в изменении температуры. На рис. 5.3 данные измерений показаны кружками. Обращают на себя внимание значительные, но нерегулярные сезонные изменения. Для температурного тренда характерен глубокий минимум в зимние месяцы, однако в летний период соответствующий максимум не очевиден. В результате сглаживания с

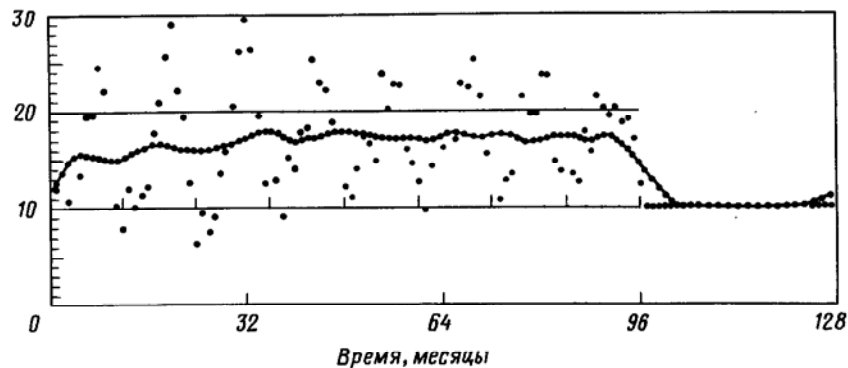


Рис. 5.3. Данные ежемесячных измерений за восьмилетний период (кружки) и годовые усредненные (сглаженные) данные, изображенные для месячных интервалов (сплошная кривая) и полученные в результате циклической свертки для $N = 128$ при дополнении последовательностей нулями с целью искусственного формирования 128-элементных последовательностей.

помощью 13-элементной последовательности получается кривая, представляющая более широкие возможности для анализа.

Если вычислительный процесс реализуется в виде циклической свертки при $N = 128$, то значения данных могут быть присвоены элементам с порядковыми номерами, начиная с 97-го по 127-й. Пусть они равны нулю. Иногда может быть реализована ситуация, когда этим элементам присваиваются наиболее правдоподобные значения; в данном случае можно принять значение для установившегося состояния, равное 17, которое приблизительно равно среднегодовой температуре. Однако при использовании нулевых элементов соответствующий график очень наглядно иллюстрирует участки расхождения вычисленной циклической и истинной свертки. Необходимо также представить фильтрующую последовательность в виде 13 требуемых коэффициентов и 115 нулей. Применительно к рис. 5.3 используется массив вида $1/12 \{1111111/2 0 \dots 0 1/2 11111\}$. Таким образом, каждое сглаженное значение согласуется во времени с серединой группы из 13 элементов фильтрующей последовательности. При использовании последовательности вида $1/12 \{1/2 1111111 11111 1/2 000 \dots 00\}$ будет иметь место различие в индексации, а именно сглаженная последовательность окажется задержанной на 6 месяцев. Эффект циклической свертки проявляется в получении 128 выходных (сглаженных) значений, из которых только 84 (с 7-го по 90-й месяцы) имеют физический смысл. Перед группой этих значений и после нее наблюдаются участки более или менее линейного изменения сглаженной кривой; небольшой участок возрастания этой кривой наблюдается в конце графика справа. Диапазон изменения аргумента (времени), в пределах которого сглаженная последовательность не равна нулю, в явном виде отражает искусственный характер формирования данных в результате расширения массива до 128 элементов, и

это явление вряд ли будет иметь неправильное толкование. В ряде других ситуаций могут отсутствовать защитные зоны из дополнительных нулей, что приводит к взаимному наложению во времени участков возрастания и убывания сглаженной последовательности, а это может создать видимость правдоподобия сглаженной последовательности. Один метод исключения неправильного толкования заключается в определении сглаженных значений, имеющих физический смысл, и их графическом изображении. Выходная сглаженная последовательность, представленная на рис. 5.3, оказывается одной и той же как при вычислении циклической свертки в области исходных данных с применением операций умножения и сложения, так и при использовании метода преобразования.

Подчеркивание границ

Значительная доля информации, содержащейся в видеоизображении, распределена в пределах границ раздела более или менее однородных областей, и зрительное восприятие изображения может быть улучшено усилением контрастности этих границ. Одним из видов границ данного типа является линия раздела областей с разной средней яркостью. Для повышения контрастности аэрофотоснимков, например, обрабатываемой пашни, имеющей условную яркость 7 единиц, и окружающего ландшафта с условной яркостью 8 единиц, можно вычесть из этих значений 6. В результате условные яркости этих областей оказываются равными 1 и 2, а при четырехкратном усилении — соответственно 4 и 8, за счет чего контраст существенно усиливается. Подобные процедуры могут быть реализованы в фотолаборатории при обработке аналоговых изображений или с использованием вычислительных методов при обработке цифровых изображений. Однако могут существовать другие области в полном изображении, яркость которых не позволяет выполнить такое вычитание. Цель процедуры подчеркивания границы заключается в повышении ее контрастности независимо от абсолютного уровня яркости вблизи этой границы. Если граница характеризуется более резким изменением яркости, то можно определить местоположение зон с высокой крутизной и увеличить ее; это может быть осуществлено с помощью простого вычитания второй производной, взятой с определенным коэффициентом, в направлении нормали к границе. Привлекательной чертой этой идеи является то, что операция вычитания в равной степени может быть реализована для всех точек изображения, что не требует принятия решения относительно местоположения границы.

Для одномерного варианта результат свертки с последовательностью $\{1 -2 1\}$ равен разности второго порядка, являющейся соответствующим приближенным представлением второй производной при условии, что интервал дискретизации отсчетов достаточно мал. Если это условие не выполняется, то бессмысленно задавать вопрос о действительной степени повышения разрешающей способ-

ности. С другой стороны, если интервал дискретизации много меньше представляющего для нас интерес интервала разрешения, что обычно и имеет место, то должна использоваться некоторая последовательность с большим числом элементов, представляющая собой, например, совокупность отсчетов второй производной гауссовой кривой.

Для двумерного варианта соответственно оценивается локальная кривизна, например, с помощью свертки с массивом отсчетов $(\partial^2/\partial r^2) \exp(-\pi r^2/W^2)$, где масштабный коэффициент W выбирается меньше интервала разрешения, но не малым по сравнению с интервалом дискретизации. Для иллюстрации рассмотрим следующую небольшую матрицу, состоящую из 9 элементов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Двумерная свертка с изображением, ряд признаков которого должен быть усилен, с последующим вычитанием некоторой части результата свертки из исходного изображения дает желаемый эффект. Выбор величины этого вычитаемого включает в себя оценки качественного характера, которые изменяются от случая к случаю, и не может быть осуществлен только на основе математических выкладок. Полная операция усиления признаков (выделения границ) может быть сведена к одноэтапной процедуре; например, если должна вычитаться величина, равная $1/16$ карты «кривизны», то окончательный результат, реализующий требуемое усиление, непосредственно получается с помощью свертки с матрицей вида

$$1/16 \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 28 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Свертка с использованием быстрого преобразования Хартли

Процедура свертки, представленная в табл. 5.1, может быть реализована на базе быстрого алгоритма с использованием программы FHTCONV, приведенной в приложении 1. Основная программа предполагает, что та или иная из заданных функций обладает свойством симметрии, так как в этом широко распространенном случае скорость выполнения программы очень высока. Однако в отсутствие симметрии осуществляется обращение к подпрограмме 4400, а не 4000, просто реализующей перемножение двух вещественных ДПХ. Использование быстрого алгоритма FHTSUB предполагает ограничение числа элементов каждой последовательности, которое должно быть кратным 2, что является известным ограничением, причем не очень жестким по своему характеру. Большее значение имеет тот факт, что для последовательностей данных, над которыми выполня-

ется операция свертки, в общем случае маловероятно равенство числа элементов, тогда как программа требует дополнения обеих последовательностей нулями для их уравнивания. Если последовательности данных существенно отличаются числом элементов, то может оказаться более быстрым алгоритм свертки в области исходных данных с использованием программы CONV.

Когда результат выводится на печать, в нем присутствует делитель N или $2N$ (для несимметричного случая) в соответствии со стратегией, описанной выше в разделе, посвященном коэффициенту N^{-1} . В рамках данной программы имеются три обращения к быстрой подпрограмме 9000; следовательно, было бы пустой тратой времени повторять предварительное табулирование тригонометрических функций и степеней числа 2. В самой программе этот факт учитывается посредством ее автоматической адаптации.

В случае когда циклическая свертка не требуется, для получения свертки, содержащей N элементов, для каждой входной функции достаточно всего $N/2$ значений исходных данных. Таким образом, в дополнение к нулям, предусмотренным для увеличения числа элементов последовательности до кратного двум, требуется еще одна подпоследовательность из $N/2$ нулей.

Свертка посредством умножения является превосходной процедурой при ее умелом использовании, простой в реализации при внимательном анализе практических деталей, связанных с нулями последовательностей, и более наглядной по сравнению с ее комплексным вариантом.

Способ без использования перестановок

Операция свертки может быть выполнена в полном объеме без перестановки элементов ценой запоминания второго типа преобразования. Алгоритмы, рассмотренные в данной книге, предполагают использование перестановки с последующим замещением, однако существуют алгоритмы другого типа, в которых замещение элементов предшествует процедуре перестановки. Описание структур этих алгоритмов применительно к ДПФ приводится в статье: *W. T. Cochran et al. What is the Fast Fourier Transform? IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. AU-15, pp. 45-55, 1985* (Кохран. Что такое быстрое преобразование Фурье?).

В обозначениях, введенных в гл. 7, алгоритм, реализующий в качестве первого этапа операцию перестановки, использует матричный оператор $L_P L_{P-1} \dots L_2 L_1 P_N$; подобный оператор для алгоритма, в котором операция перестановки является завершающей, имеет вид $P_N L_1 L_2 \dots L_{P-1} L_P$.

Если алгоритм второго типа применить к двум входным (исходным) функциям, а алгоритм первого типа — к произведению получающихся при этом результатов (выходных функций), то, очевидно, операция перестановки не потребует. Быстрая перестановка, как описано ниже, означает, что экономия времени составляет неболь-

шую долю всего времени счета, а эта доля уменьшается с ростом N . Однако могут иметь место частные случаи, когда имеет смысл не выполнять процедуру перестановки.

Свертка как умножение матриц

Дискретная свертка двух последовательностей выражается в виде матричного произведения определенной прямоугольной матрицы на * вектор-столбец. Правила умножения матриц требуют, чтобы число столбцов прямоугольной матрицы было равно числу элементов вектора-столбца; получающийся в результате этой процедуры вектор-столбец будет иметь $M + N - 1$ элементов, где M и N — число элементов свертываемых последовательностей. Таким образом, следующая свертка пятиэлементной и трехэлементной последовательностей

$$\{f(0) f(1) f(2) f(3) f(4)\} * \{g(0) g(1) g(2)\}$$

эквивалентна равенству

$$\begin{bmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ f(1) & f(0) & 0 \\ f(2) & f(1) & f(0) \\ f(3) & f(2) & f(1) \\ f(4) & f(3) & f(2) \\ 0 & f(4) & f(3) \\ 0 & 0 & f(4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0)g(0) \\ f(1)g(0) + f(0)g(1) \\ f(2)g(0) + f(1)g(1) + f(0)g(2) \\ f(3)g(0) + f(2)g(1) + f(1)g(2) \\ f(4)g(0) + f(3)g(1) + f(2)g(2) \\ f(4)g(1) + f(3)g(2) \\ f(4)g(2) \end{bmatrix}$$

Так как операция свертки обладает свойством коммутативности, справедлива другая форма записи:

$$f * g = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 \\ g(2) & g(1) & g(0) \\ g(3) & g(2) & g(1) \\ g(4) & g(3) & g(2) \\ 0 & g(4) & g(3) \\ 0 & 0 & g(4) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix},$$

которая с позиций теории матриц не является очевидной. Для ЭВМ, которые обеспечивают выполнение операции умножения матриц, не обязательно иметь специальную программу для свертки.

В приложении 1 приводится такая программа под названием MATCON. При этом массив (вектор) $\mathbf{B}(\)$ заполняется N значениями данных (строки 70–90) по аналогии с программой CONV. Затем первый столбец массива (матрицы) $\mathbf{A}(\)$, который является двумерным, заполняется M значениями данных и дополняется нулями до

* Напомним, что операция умножения матриц не коммутативна.

общей длины $P = M + N - 1$ (строка 120), а остальные столбцы массива $\mathbf{A}(\)$ заполняются таким образом, чтобы получилась циклическая структура (строки 130–150). После выполнения этих предварительных действий реализуется в полном объеме операция свертки, а ее значение присваивается матрице $\mathbf{C}(\)$ с помощью оператора умножения матриц, занимающего одну строку:

$$180 \text{ MAT } \mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{B}.$$

Задачи

- 5.1. *Определение корреляционной функции.* Определить циклическую корреляционную функцию следующих последовательностей с числом элементов $N = 8$:
 - а) {1 1 1 1 0 0 0 0},
 - б) {1 1 1 1 1 0 0 0},
 - в) {1 1 1 1 1 1 0 0},
 - г) {1 1 1 1 1 1 1 0}.
- 5.2. *Определение корреляционной функции.* Какова циклическая корреляционная функция последовательностей
 - а) {1 0 1 0 1 0 1 0}, б) {1 0 0 1 0 0 1 0}, в) {1 0 0 0 1 0 0 1}?
 Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.
- 5.3. *Определение корреляционной функции.* Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей
 - а) {1 1 0 0 0 0 0 0}, б) {1 0 1 0 0 0 0 0},
 - в) {1 1 0 1 0 0 0 0}, г) {1 1 0 0 1 0 1 0}.
- 5.4. *Определение корреляционной функции.* Определить циклическую корреляционную функцию последовательностей
 - а) {−3 −2 −1 0 1 2 3 4},
 - б) {−4 −3 −2 −1 1 2 3 4}.
 Просуммировать элементы полученных корреляционных последовательностей и объяснить результат.
- 5.5. *Корреляционные последовательности.* Определить корреляционную функцию последовательностей
 - а) {1 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0},
 - б) {0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0}.
 Вычислить произведение 1100101×1010011 и использовать полученный результат для вывода очень простого алгоритма определения корреляционной функции. Если алгоритм столь прост, то почему бы не существовать еще более оптимальному методу?
- 5.6. *Обращение корреляции.* Исследуйте программу ICORR (приложение 1) с целью получения алгоритма обращения корреляционных последовательностей, определенных в предыдущих задачах. Получите последовательность, корреляционная функция которой имеет вид {1, 1 6 15 20 15 6 1, 1}.
- 5.7. *Определение свертки.* Выполнить свертку последовательности {1 1 1 1 0 0 0 0} с последовательностями вида

- а) {1 1 0 0 0 0 0 0}, б) {1 1 1 0 0 0 0 0},
 в) {1 1 1 1 1 0 0 0}, г) {1 1 1 1 1 1 1 1}.
- 5.8. *Определение свертки.* Выполнить свертку последовательности {1 (1/2) (1/4) (1/8) (1/16) (1/32) (1/64) (1/128)} с последовательностями:
 а) {1 -1 0 0 0 0 0 0}, б) {2 -1 0 0 0 0 0 -1}.
- 5.9. *Свертка с нечетной функцией.* Должна быть выполнена свертка последовательности данных с нечетной последовательностью, т. е. функцией, для которой $f(N - \tau) = -f(\tau)$. После определения ДПХ требуются только N произведений. Показать, что изменение знаков преобразования последовательности данных на обратные перед умножением и переходом в область обратного преобразования приводит к желаемому результату.
- 5.10. *Уплотнение.* Последовательность данных, состоящая из 1024 элементов, должна быть уплотнена до 256 элементов ценой потери тонкой структуры исходной последовательности. Показать, что это может быть осуществлено путем определения ДПХ для $N = 1024$ и последующего вычисления ДПХ первой четверти элементов преобразования для $N = 256$.
- 5.11. *Скользящее среднее.* а) Вычислить скользящее среднее пяти последовательных элементов биномиальной последовательности {0 0 0 0 1 4 6 4 1 0 0 0}.
 б) Какова дисперсия полученной последовательности?
- 5.12. *Циклическая функция sinc x ($= \sin x/x$).* Показать, что $\text{sinc } x + \text{sinc}(x - N) + \text{sinc}(x - 2N) + \dots + \text{sinc}(x + N) + \text{sinc}(x + 2N) + \text{sinc}(x + 3N) \dots = N^{-1} \sin(N\pi x) / \sin(\pi x)$.

Глава 6 Двумерные преобразования

Одно изображение стоит тысячи слов.

Император Сун

Изображения на поверхности всегда были важны и приобретают еще большее значение в связи с разработкой технических средств их формирования, видоизменения и отображения. Цифровая телеметрия изображений планет с космических аппаратов и методы цифровой обработки этих изображений оказались возможны благодаря значительному прогрессу в космических исследованиях и в создании аналоговых оптических систем съемки и отображения. Аналоговая оптическая обработка изображений — это реальность сегодняшнего дня, а цифровая оптическая обработка двумерных цифровых данных представляет собой перспективную область исследования. Во всех этих областях традиционным является применение методов спектрального анализа; следовательно, соответствующие области приложения имеются и для преобразования Хартли.

Как оказывается, двумерное преобразование Хартли обладает интересным свойством фундаментального характера. Мы уже привыкли к той мысли, что преобразование Хартли является вещественным в одномерном случае, а это справедливо и для двумерного случая. В силу того что преобразование Фурье является комплексным, для его определения достаточно половины плоскости преобразования. Остальная часть этой плоскости принадлежит сопряженным значениям, которые не содержат дополнительной информации, так как диаметрально противоположные точки характеризуются сопряженными коэффициентами. В плоскости преобразования Хартли, напротив, отсутствуют подобные симметрия и избыточность; информация распределяется по всей области с меньшей в два раза интенсивностью. Это отличие применительно к разным вариантам реализации алгоритмов в различных приложениях помогает сделать выбор в пользу одного из этих преобразований. Обратимся теперь к определению двумерного преобразования Хартли, а именно его непрерывного и дискретного вариантов.

Двумерное преобразование Хартли

Исходя из функции $f(x, y)$, определим двумерное прямое преобразование Хартли $H(u, v)$ и обратное преобразование Хартли:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \operatorname{cas}[2\pi(ux + vy)] dx dy,$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v) \operatorname{cas}[2\pi(ux + vy)] du dv.$$

Из представления преобразования Фурье вида $F(u, v) = R(u, v) + iI(u, v)$ следует, что $H(u, v) = R(u, v) - I(u, v)$, в чем можно убедиться, обратившись для сравнения к соотношениям преобразования Фурье, приведенным ниже:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy,$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] du dv.$$

Справедливость обратного преобразования можно установить путем выполнения преобразования Хартли для функции $H(u, v)$ и доказательства того, что результатом этого преобразования является исходная функция $f(x, y)$. Доказательство зависит от свойств симметрии.

Симметрия и антисимметрия

Заданная функция $f(x, y)$ может быть представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной компонент:

$$f(x, y) = f_{\text{symm}}(x, y) + f_{\text{antisymm}}(x, y),$$

где

$$f_{\text{symm}}(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(-x, -y)],$$

$$f_{\text{antisymm}}(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) - f(-x, -y)].$$

Данное разложение на компоненты является двумерным обобщением процедуры разложения функции одной переменной на четную и нечетную компоненты. Вещественная часть одномерного преобразования Фурье является четной функцией, а мнимая — нечетной, в то время как вещественная часть двумерного преобразования Фурье представляет собой симметричную функцию, а мнимая — антисимметричную функцию. Из сказанного следует, что вещественное двумерное преобразование Хартли, выражаемое как $R(u, v) - I(u, v)$, в полной мере представляется как совокупность симметричной и антисимметричной компонент.

Для получения приведенного выше обратного преобразования определим двумерное преобразование Хартли от преобразования

$H(u, v)$. Пусть $\hat{f}(x, y)$ равна преобразованию Хартли (ПХ) функции $H(u, v)$, которое в свою очередь равно разности ПХ $R(u, v)$ и $I(u, v)$: $\hat{f}(x, y) = \text{ПХ от } H(u, v) = \text{ПХ от } R(u, v) - \text{ПХ от } I(u, v)$.

Теперь имеем: ПХ от $R(u, v) = \text{ПФ от } R(u, v) = f_{\text{symm}}(x, y)$, так как $R(u, v)$ симметрична. По аналогии получаем: ПХ от $I(u, v) = -f_{\text{antisymm}}(x, y)$. Таким образом,

$$\hat{f}(x, y) = f_{\text{symm}}(x, y) - [-f_{\text{antisymm}}(x, y)] = f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Примеры

Определение двумерных преобразований Хартли не представляет особых трудностей, и в качестве типовых вариантов мы приведем несколько примеров. В табл. 6.1 $\mathbf{H}(x)$ является единичной ступенча-

Таблица 6.1

Некоторые пары двумерных преобразований Хартли

$f(x, y)$	$H(u, v)$
$e^{-\pi[(x-a)^2 + (y-b)^2]}$	$e^{-\pi(u^2 + v^2)} \operatorname{cas}[2\pi(au + bv)]$
$\Pi(x - \frac{1}{2}) \Pi(y - \frac{1}{2})$	$\operatorname{sinc} u \operatorname{sinc} v \operatorname{cas}[\pi(u + v)]$
$\delta(x - a) \delta(y - b)$	$\operatorname{cas}[2\pi(au + bv)]$
$\delta(x - a)$	$\operatorname{cas} 2\pi au \delta(v)$
$\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - a)$	$\operatorname{cas}[2\pi a(u \cos \theta + v \sin \theta)] \delta(v \sin \theta - u \cos \theta)$
$e^{-2\mathbf{H}(x)}$	$(1 + 2\pi u)(1 + 4\pi^2 u^2)^{-1} \delta(v)$
$e^{-(x \cos \theta + y \sin \theta)} \mathbf{H}(x \cos \theta + y \sin \theta)$	$\frac{1 + 2\pi(u \cos \theta + v \sin \theta)}{1 + 4\pi^2(u \cos \theta + v \sin \theta)^2}$
$\sin \pi x$	$-\frac{1}{2} \delta(u + \frac{1}{2}) \delta(v) + \frac{1}{2} \delta(u - \frac{1}{2}) \delta(v)$
$\cos \pi x$	$\frac{1}{2} \delta(u + \frac{1}{2}) \delta(v) + \frac{1}{2} \delta(u + \frac{1}{2}) \delta(v)$
$(x - x^2) \Pi(x - \frac{1}{2}) \Pi(y)$	$\frac{1}{2} (\pi^2 u^2)^{-1} \operatorname{cas} \pi u [\operatorname{sinc} u - \cos \pi u] \operatorname{sinc} v$
$\sin \pi x \Pi(x - \frac{1}{2}) \Pi(y)$	$\frac{1}{2} \operatorname{cas} \pi u [\operatorname{sinc}(u + \frac{1}{2}) + \operatorname{sinc}(u - \frac{1}{2})] \operatorname{sinc} v$
$\Pi[\sqrt{(x-a)^2 + y^2}]$	$\frac{1}{2} \operatorname{cas} 2\pi au (u^2 + v^2)^{-1} J_1(\pi \sqrt{u^2 + v^2})$

той функцией Хевисайда, а $\Pi(x)$ представляет собой прямоугольную функцию вида $\mathbf{H}(x + \frac{1}{2}) - \mathbf{H}(x - \frac{1}{2})$.

Теоремы для двумерных преобразований

В табл. 6.2 дается обобщение хорошо известных теорем на двумерный случай как для преобразования Фурье, так и для преобразования Хартли, откуда легко заметить их сходство и различие. В табл. 6.3 приведены теоремы, устанавливающие соотношения между свойствами преобразований в двух областях.

Таблица 6.2

Теоремы для двумерных преобразований Фурье и Хартли

Теорема	$f(x, y)$	$F(u, v)$	$H(u, v)$
Подобие	$f(x/a, y/b)$	$ ab F(au + bv)$	$ ab H(au + bv)$
Сложение	$f_1(x, y) + f_2(x, y)$	$F_1(u, v) + F_2(u, v)$	$H_1(u, v) + H_2(u, v)$
Сдвиг	$f(x - a, y - b)$	$\exp[-i2\pi(au + bv)] F(u, v)$	$\cos 2\pi(au + bv) H(u, v) + \sin 2\pi(au + bv) H(-u, -v)$
Модуляция	$f(x, y) \times \cos 2\pi(u_0x + v_0y)$	$(1/2)F(u - u_0, v - v_0) + (1/2)F(u + u_0, v + v_0)$	$(1/2)H(u - u_0, v - v_0) + (1/2)H(u + u_0, v + v_0)$
Свертка	$f_1(x, y) ** f_2(x, y)$	$N F_1(u, v) F_2(u, v)$	$(1/2)N [H_1 H_2 - H_1(-, -) H_2(-, -) + H_1 H_2(-, -) + H_1(-, -) H_2]$
Корреляция	$f(x, y) \star \star f(x, y)$	$N F(u, v) ^2$	$N [H(u, v)]^2 + N [H(-u, -v)]^2$
Произведение при разделении переменных	$f_1(x) f_2(y)$	$F_1(u) F_2(v)$	$(1/2)[H_1 H_2 + H_1(-) H_2 + H_1 H_2(-) - H_1(-) H_2(-)]$
Вращение	$f(x', y')$	$F(u', v')$	$H(u', v')$

Таблица 6.3

Теоремы для соотношений между преобразованиями в разных областях их представления

Теорема	Свойство	Соотношение для преобразования Фурье	Соотношение для преобразования Хартли
Интегрирование в бесконечных пределах	$\iint f dx dy$	$= F(0,0)$	$= H(0,0)$
Теорема Рэлея	$\iint f^2 dx dy$	$= \iint F F^*(u, v) du dv$	$= \iint (1/2)[H^2 + H^2(-, -)] du dv$
Первый момент	$\iint x f dx dy$	$= [1/(-i2\pi)](\partial F/\partial u) _{0,0}$	$= (1/2\pi)(\partial H/\partial u) _{0,0}$
Второй момент	$\iint x^2 f dx dy$	$= [1/(-i2\pi)^2] \times (\partial^2 F/\partial u^2) _{0,0}$	$= [1/(2\pi)^2] \times (\partial^2 H/\partial u^2) _{0,0}$

Круговая симметрия

Если $f(x, y)$ обладает свойством круговой симметрии и может быть представлена, скажем, функцией $f(r)$, то ее двумерное преобразование Хартли совпадает с двумерным преобразованием Фурье, так как в последнем для данного случая отсутствует мнимая часть. Следовательно, двумерное преобразование Хартли сводится к одномерному преобразованию Ганкеля $\mathcal{H}(q)$ функции $f(r)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cos[2\pi(ux + vy)] dx dy = \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi qr) 2\pi r dr = \mathcal{H}(q).$$

В данной формулировке r представляет собой радиальную переменную в плоскости x, y , а $q = (u^2 + v^2)^{1/2}$ — радиальную переменную в плоскости u, v . Одномерное преобразование Хартли функции $\mathcal{H}(q)$ равно преобразованию Абея $\mathcal{A}(x)$ функции $f(r)$, где по определению

$$\mathcal{A}(x) = 2 \int_x^{\infty} (r^2 - x^2)^{-1/2} f(r) r dr.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(q) \cos 2\pi x q dq = \mathcal{A}(x)$$

и обратно.

В связи со свойством круговой симметрии отсутствуют какие-либо особенности, отличающие преобразования Хартли и Фурье друг от друга. Следовательно, любые операции, выполняемые обычно над функциями с круговой симметрией с помощью преобразований Фурье, наряду с этим могут осуществляться с использованием преобразований Хартли, что дает один и тот же результат.

Двумерная фильтрация

Обработка двумерных цифровых изображений также оказывается выигрышной при осуществлении вещественного преобразования. Изображение $f(\tau_1, \tau_2)$, представляемое в виде матрицы размера $N_1 \times N_2$, обладает двумерным дискретным преобразованием Хартли (2 ДПХ), также имеющим вид вещественной матрицы $H(v_1, v_2)$ размера $N_1 \times N_2$. Прямое и обратное преобразования при этом соответственно равны:

$$H(v_1, v_2) = (1/N_1 N_2) \sum_{\tau_1=0}^{N_1-1} \sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f(\tau_1, \tau_2) \cos [(2\pi v_1 \tau_1/N_1) + (2\pi v_2 \tau_2/N_2)],$$

$$f(\tau_1, \tau_2) = \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \sum_{v_2=0}^{N_2-1} H(v_1, v_2) \cos [(2\pi v_1 \tau_1/N_1) + (2\pi v_2 \tau_2/N_2)].$$

Двумерная пространственная частота (v_1, v_2) описывает имеющую наклон функцию \cos , в которой v_1/N_1 — число циклов, приходящихся на единицу τ_1 в направлении восток–запад, и v_2/N_2 — число циклов на единицу τ_2 в направлении север–юг.

Свойства двумерного дискретного преобразования, включая теорему о свертке, являющуюся основой цифровой фильтрации изображений, вытекают из таблиц, приведенных в следующей главе. Большой частью соотношения между двумерными непрерывным и дискретным преобразованиями аналогичны соответствующим соотношениям для одномерного случая. Однако интерпретация цикличности, введенной в данной главе, заслуживает особого упоминания.

В одномерном случае переменная τ изменяется в пределах от 0 до $N-1$, а область значений τ может быть изображена в виде прямоугольной решетки, состоящей из N равноотстоящих точек. Однако эту область можно также представить в виде кольца из N точек; преимуществом такого представления является то, что при этом приобретают смысл значения τ , меньшие нуля и большие $N-1$. Тогда значения, присваиваемые функции какого-либо целочисленного аргумента τ , определяются выражением

$$f(\tau) = f(\tau \bmod N).$$

Для двумерного случая можно принять ту же схему рассуждений и записать

$$f(\tau_1, \tau_2) = f(\tau_1 \bmod N_1, \tau_2 \bmod N_2).$$

Таким образом, для $N_1 = 32$ и $N_2 = 16$ точка с координатами $(\tau_1, \tau_2) = (34, -5)$ на плоскости не принадлежит прямоугольной области, содержащей $N_1 N_2$ точек, упорядоченно распределенных по N_1 столбцам и N_2 строкам. Однако некоторое значение все же можно присвоить функции $f(34, -5)$. Замечая, что $34 \bmod 32 = 2$, а $-5 \bmod 16 = 11$, присвоим этой функции значение $f(2, 11)$. Данный нюанс касается только техники численных расчетов, выполнение которых возложено на ЭВМ, однако с целью анализа получаемых при этом результатов целесообразно помнить о пространственной топологии, соответствующей изображению кольца на плоскости. Традиционный рецепт заключается в следующем: свернуть прямоугольную область в цилиндр так, чтобы, скажем, ее верхняя и нижняя строки совместились друг с другом, а затем согнуть цилиндр до получения тороидальной поверхности путем совмещения его левой и правой кольцеобразных кромок. Так, на рис. 6.1 цилиндрическая поверхность получена касанием пар точек A и E , B и F , а в результате сгибания цилиндра и контакта кольцеобразных краев ACE и BDF получен тор. Процедуру сгибания цилиндра в тор наиболее сложно изобразить, а исходные квадратные ячейки, полученные из точек прямоугольной области, не могут оставаться при этом равносторонними. В тороидальной шахматной игре игроков не беспокоит, что их

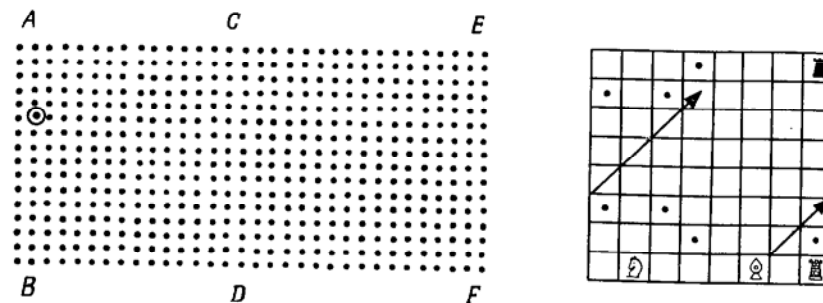


Рис. 6.1. Пространство тороидальных шахмат в виде пространства $(\tau_1 \bmod N_1, \tau_2 \bmod N_2)$. Точка в кружке $(34, -5)$ в случае матрицы размера 32×16 соответствует точке $(2, 11)$.

шахматная «доска» имеет форму тора; они знают, что белый слон (рис. 6.1) может перемещаться по диагонали, обозначенной короткой стрелкой, а при достижении правого края «доски» может продолжить движение так, как это показано более длинной стрелкой. Это довольно рискованная игра. Белая ладья угрожает черной ладье, а конь всегда имеет в своем распоряжении восемь возможных ходов независимо от его положения на шахматной «доске»; таким образом, белый конь, возможные ходы которого обозначены точками, может быть угрозой черной ладье. Это наилучший способ, с помощью которого можно себе представить пространство τ_1 и τ_2 ; это как бы биологическая клетка, размеры которой ограничены координатами $(0, 0)$, $(7, 7)$, воспроизводящаяся до бесконечности в обоих направлениях.

Цикличность для двумерного случая

Обобщение дискретного преобразования на двумерный случай не приводит к каким-либо неожиданностям, за исключением, возможно, свойств цикличности. По аналогии с одномерным вариантом мы приняли, что $f(\tau \pm N) = f(\tau)$, и для двумерного случая имеем

$$\hat{f}(\tau_1 \pm N, \tau_2 \pm N) = f(\tau_1, \tau_2).$$

Это не приводит к каким-либо трудностям математического характера, а топология может быть ясно представлена, если обратиться к тороидальной поверхности, являющейся обобщением кольца, используемого в одномерном варианте. Однако имеется возможный источник путаницы, связанный со схемой индексации, что может оказаться настоящей западней для начинающих.

Предположим, что должно быть осуществлено сглаживание цифрового изображения путем свертки со следующей матрицей коэффициентов:

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Коэффициент $1/256$ гарантирует отсутствие усиления компонент, имеющих низкие пространственные частоты. Понятно, что центральный элемент, равный 36, размещается в выбранном элементе изображения, так что коэффициенты умножаются на соответствующие элементы исходной последовательности, а затем производится суммирование полученных произведений и запись результата в выбранный элемент изображения. При переходе к представлению этой простой процедуры с помощью двумерной свертки с цифровой последовательностью центральный элемент будет иметь индексы (1, 1). Следовательно, матрица размера $N \times N$, представляющая сглаживающую функцию, имеет вид (незаполненное пространство соответствует наличию одних только нулей):

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 36 & 24 & 6 & & 6 & 24 \\ 24 & 16 & 4 & & 4 & 16 \\ 6 & 4 & 1 & & 1 & 4 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 6 & 4 & 1 & & 1 & 4 \\ 24 & 16 & 4 & & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Данная структура кажется до такой степени несимметричной и странной людям, которые интуитивно чувствуют необходимость наличия сцентрированной матрицы, что их разум протестует. Тем не менее другой способ реализации процедуры означал бы сдвиг исходного цифрового изображения.

Другое соображение практического характера, которое может быть тесно связано с цикличностью, возникает в случае, когда сглаживающая матрица не обладает свойством симметрии. Например, предположим, что какая-то система регистрации изображений обладает астигматизмом, вследствие чего точечный объект приводит к формированию асимметричного отклика

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 6 & 1 \\ 7 & 14 & 25 & 20 & 5 \\ 5 & 18 & 36 & 30 & 10 \\ 2 & 15 & 20 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

центр тяжести которого, как очевидно, смещен вправо и вверх. С матрицей какого вида должна быть осуществлена свертка изображения протяженного объекта, чтобы получить изображение, для которого обнаруживается эффект астигматизма? Чтобы ответить на этот вопрос, сначала выполним поворот заданной матрицы на 180° , что необходимо для учета двух знаков «минус», фигурирующих в определении свертки для двумерного преобразования. Затем, как и выше, поместим центральный элемент, значение которого равно 36, на позицию с координатами (индексами матрицы) (1, 1). Таким образом, матрица, которая должна использоваться в формуле свертки, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 36 & 18 & 5 & & 10 & 30 \\ 25 & 14 & 7 & & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 1 & & 1 & 6 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 6 & 4 & 1 & & 1 & 3 \\ 20 & 15 & 2 & & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Трехмерный случай

Формулы преобразований непосредственно обобщаются на случай трех (и более) измерений; они применяются в кристаллографии, физике плазмы, газодинамике и многих других областях. Соотношения для трехмерного случая приведены ниже просто в качестве справочного материала без их последующего анализа:

$$H(v_1, v_2, v_3) = (1/N_1 N_2 N_3) \sum_{\tau_1=0}^{N_1-1} \sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} \sum_{\tau_3=0}^{N_3-1} f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ \times \cos [(2\pi v_1 \tau_1/N_1) + (2\pi v_2 \tau_2/N_2) + (2\pi v_3 \tau_3/N_3)], \\ f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \sum_{v_2=0}^{N_2-1} \sum_{v_3=0}^{N_3-1} H(v_1, v_2, v_3) \times \\ \times \cos [(2\pi v_1 \tau_1/N_1) + (2\pi v_2 \tau_2/N_2) + (2\pi v_3 \tau_3/N_3)].$$

Задачи

- 6.1. Числовые примеры. Получить дискретные двумерные преобразования Хартли нижеприведенных малоформатных цифровых изображений. Взять в качестве исходного, как это обычно принято, элемент с координатами $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$, расположенный в левом верхнем углу матрицы:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 3 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix}$$

- 6.2. *Изображение точечного объекта.* Преобразование цифрового изображения объекта подвергается умножению на приведенные ниже матрицы, являющиеся двумерными фильтрами нижних частот. Каким становится изображение в каждом из этих случаев для точечного объекта?

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- 6.3. *Теорема о сдвиге.* Доказать теорему о сдвиге для двумерного случая.
 6.4. *Произведение при разделении переменных.* Доказать теорему о произведении при разделении переменных.
 6.5. *Теорема о модуляции.* Объяснить, почему теоремы о модуляции полностью идентичны как для преобразования Хартли, так и для преобразования Фурье.
 6.6. *Функция, имеющая форму дома из гофрированного железа.* Показать, что функция $(a^2 - x^2)^{1/2} \Pi(x/2a) \Pi(y/4a)$ имеет преобразование Хартли вида $(a^2/2x) J_1(2\pi ax) \text{sinc } 4av$.
 6.7. *Сдвиг четной функции.* При условии, что $f(x, y)$ является четной функцией относительно x и y , показать, что функция $f(x - a, y - b)$ имеет преобразование Хартли $\text{cas}[2\pi(au + bv)] H(u, v)$.
 6.8. *Пары преобразований.* Убедиться в справедливости соотношений, приведенных в табл. 6.1.
 6.9. *Элементарные преобразования.* Получить дискретные преобразования Хартли следующих функций, представляющих собой матрицы с единственным единичным элементом, и объяснить характер каждого из этих преобразований:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- 6.10. *Дополнение нулями.* При условии что дискретное преобразование Хартли (ДПХ) двумерной последовательности $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ равно $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, найти ДПХ матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 6.11. *Дифракция на щели.* С целью получения некоторого подобия дифракционной картины на щели, а затем, возможно, и на других апертурах рассмотрим преобразования двух цифровых изображений квадратной формы: одно из них (т.е. соответствующая матрица) содержит единственный единичный элемент в левом нижнем углу, а все остальные элементы равны нулю, а другое изображение имеет элементы, равные единице, вдоль главной диагонали и нулевые недиагональные элементы.
 а) Определить преобразования этих изображений для $N_1 = N_2 = 4$ и получить результаты для изображений больших размеров.
 б) Идентичны ли при этом ДПХ и ДПФ?
 в) Сопласуются ли полученные результаты с условиями теоремы о вращении для непрерывных переменных?
 6.12. *Выбор начала отсчета.* Начало отсчета цифрового изображения выбирается в его левом нижнем углу, как в декартовой системе координат, а не в левом верхнем углу, что является общепринятым для матриц. Программист утверждает, что это никоим образом не повлияет на результат преобразования Хартли, за исключением того, разумеется, что преобразование будет перевернутым, т.е. его первая строка оказывается последней, последняя — первой и т.п. Справедливо ли подобное заявление программиста?
 6.13. *Четырехэлементные коэффициенты.*
 а) Табулировать 4 четырехэлементных двумерных образа $\text{cas}[2\pi(v_1\tau_1/2 + v_2\tau_2/2)]$ в τ -области для всех v_1 и v_2 , убедившись в том, что выполняются принятые допущения относительно строк и столбцов соответствующей матрицы.
 б) Отсюда показать, что матрица $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ имеет двумерное ДПХ вида

$$\left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} a + b + c + d & a - b + c - d \\ a + b - c - d & a - b - c + d \end{bmatrix}$$

- 6.14. *Восьмизлементные коэффициенты.* Сформировать шестнадцать 16-элементных образов $\text{cas}[2\pi(v_1\tau_1/4 + v_2\tau_2/4)]$ в τ -области.
 6.15. *Специальное преобразование.* Было предложено новое преобразование, определяемое соотношением

$$Q(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \text{cas}(2\pi ux) \text{cas}(2\pi vy) dx dy$$

Показать, что если данное преобразование дважды применить к вещественной функции, то вновь получается исходная функция. Проверить это для нескольких случаев в численной форме и установить, каким образом это преобразование связано с преобразованием Хартли.

Глава 7 ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

И вставь в него оправленные камни в четыре ряда. Рядом:
рубин, топаз, изумруд — один ряд.
Второй ряд: карбункул, сапфир и алмаз.
Третий ряд: яхонт, агат и аметист.
Четвертый ряд: хризолит, оникс и яспис.
В золотых гнездах должны быть вставлены они.

*Библия, Вторая книга Моисеева;
Исход, глава 28*

Один из подходов к рассмотрению операции суммирования, определяющей значение дискретного преобразования Хартли, заключается в приведении квадратной матрицы к N -мерному вектору. Ниже будет развит именно этот подход, так как он ведет к пониманию основ формирования быстрого алгоритма. Каждый элемент матрицы соответствует одному этапу реализации алгоритма, или его подпрограмме. Матричный подход проясняет операцию перестановки, когда сложная матрица может рассматриваться просто в виде графа (или диаграммы рассеяния), устанавливающего соответствие между выходным и входным индексами. Процедура перехода от преобразования Хартли к преобразованию Фурье к тому же может быть выражена с помощью матричного умножения, так как факторизация матрицы преобразования Хартли непосредственно ведет к новой факторизации матрицы преобразования Фурье; именно этой характерной особенностью обусловлена важность настоящей главы.

Матричное представление дискретного оператора

Для усвоения излагаемого материала не требуется обширных познаний из области матричной алгебры, так как единственной операцией, используемой ниже, является умножение матрицы на вектор-столбец. При этом результатом является другой вектор-столбец, r -й элемент которого равен сумме произведений элементов r -й строки квадратной матрицы на элементы исходного вектор-столбца. Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA + bB + cC + dD \\ eA + fB + gC + hD \\ iA + jB + kC + lD \\ mA + nB + oC + pD \end{bmatrix}$$

Если раскрыть знак суммы в формуле дискретного преобразования, то получится N отдельных равенств. Так, для случая $N = 4$

ДПФ, соответствующее формуле

$$F(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \exp[-i2\pi v\tau/N],$$

будет иметь вид

$$F(0) = 1/4 [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)],$$

$$F(1) = 1/4 \{f(0) + f(1) \exp[-i2\pi/N] + f(2) \exp[-i2\pi 2/N] + f(3) \exp[-i2\pi 3/N]\},$$

$$F(2) = 1/4 \{f(0) + f(1) \exp[-i2\pi 2/N] + f(2) \exp[-i2\pi 4/N] + f(3) \exp[-i2\pi 6/N]\},$$

$$F(3) = 1/4 \{f(0) + f(1) \exp[-i2\pi 3/N] + f(2) \exp[-i2\pi 6/N] + f(3) \exp[-i2\pi 9/N]\}.$$

Такая система уравнений может быть выражена через матричное умножение, связывающее входной 4-мерный вектор вида

$$\{f(0) \ f(1) \ f(2) \ f(3)\}$$

с выходным вектором

$$\{F(0) \ F(1) \ F(2) \ F(3)\}.$$

Изящный способ компактного представления матричного уравнения, поясняемый ниже, предполагает использование обозначения

$$W = \exp[-i2\pi/N],$$

что оправдано наличием экспоненциального множителя $\exp[-i2\pi/N]$ в большинстве слагаемых; там, где этот множитель отсутствует, можно предположить существование множителя W^0 , равного единице.

В матричном представлении приведенные уравнения сводятся к одному уравнению

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

Квадратная матрица представляет собой оператор, преобразующий последовательность $f(\cdot)$ в последовательность преобразования Фурье $F(\cdot)$. Используя буквы, набранные жирным шрифтом, для обозначения матриц, можем записать (опуская величину N^{-1} в соответствии с разделом «коэффициент N^{-1} » гл. 5):

$$\mathbf{F} = \mathbf{W} \mathbf{f},$$

где \mathbf{f} — вектор-столбец с элементами $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$; \mathbf{F} — вектор-столбец с элементами $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$ и

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W^4 \\ \dots & \dots & \dots \\ W^{(N-3)^2} & W^{(N-3)(N-2)} & W^{(N-1)(N-3)} \\ W^{(N-2)(N-3)} & W^{(N-2)^2} & W^{(N-2)(N-1)} \\ W^{(N-1)(N-3)} & W^{(N-1)(N-2)} & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Аналогично существует другая матрица Ψ , преобразующая исходную последовательность f в последовательность дискретного преобразования Хартли

$$H = \Psi f.$$

Интересным свойством матрицы W является возможность ее факторизации с помощью метода, который приводит к алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ). Факторизация матрицы Ψ в виде

$$\Psi = L_P L_{P-1} \dots L_3 L_2 L_1 P_N,$$

приводит к новому своеобразному быстрому алгоритму вычисления матрицы H дискретного преобразования Хартли.

Наименьшее значение N , для которого можно пояснить суть процедуры факторизации, равно 16, когда имеется пять матричных коэффициентов и постоянный коэффициент N^{-1} . Если $N = 2^P$, то число этих матричных коэффициентов равно $P + 1$.

Первый матричный коэффициент, который в порядке очередности первым осуществляет отображение последовательности f , является оператором перестановки. Последующие P операторов L_i могут быть названы каскадными матрицами. Если $N = 16$, то $P = 4$, т. е. имеются четыре каскадные матрицы, если $N = 32$, то их число равно 5 и т. д.

Перестановка

Перестановка — это изменение порядка следования элементов исходной матрицы f и может быть образно названо идеальным тасованием. Колоду карт можно перетасовать, разделив ее пополам так, чтобы одна половина входила в другую. Если каждая карта одной половины

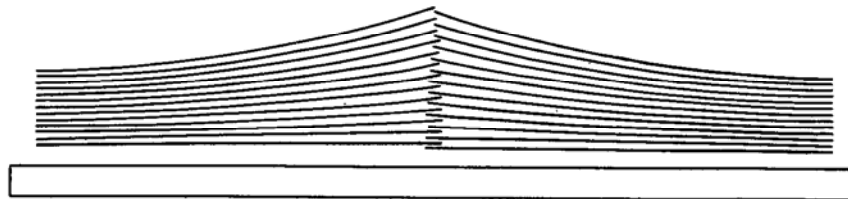


Рис. 7.1. Идеальное тасование.

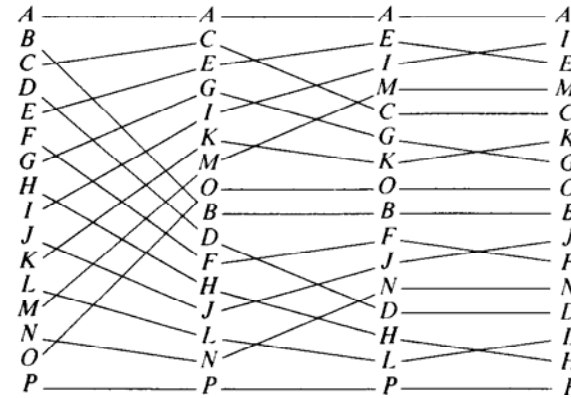


Рис. 7.2. Направленный граф, иллюстрирующий операцию перестановки.

колоды размещается между картами другой половины, то имеем идеальное тасование (рис. 7.1). Аналогичную терминологию можно применить и к последовательностям: мы утверждаем, что переход от последовательности $\{a b c d e f g h\}$ к последовательности $\{a e b f c g d h\}$ представляет собой процедуру идеального тасования (перемешивания). Инверсный переход от $\{a b c d e f g h\}$ к $\{a c e g b d f h\}$ является операцией инверсного перемешивания.

Перестановка последовательности из N элементов включает в себя следующие этапы: 1) инверсное перемешивание всей исходной последовательности, 2) инверсное перемешивание каждой половины полученной на первом этапе последовательности, 3) инверсное перемешивание каждой четверти, полученной на втором этапе и так далее до тех пор, пока не сформируются группы из 4 элементов. Данная операция завершается выполнением инверсного перемешивания этих «четверок». С целью детального анализа операции перестановки для 16-элементной последовательности проиллюстрируем выполнение трех последовательных перегруппировок строк:

Исходная последовательность	$\{a b c d e f g h i j k l m n o p\}$
Первое перемешивание	$\{a c e g i k m o b d f h j l n p\}$
Второе перемешивание	$\{a e i m c g k o b f j n d h l p\}$
Третье перемешивание	$\{a i e m c k g o b i f j n d h l p\}$

В данном случае, для которого $P = 4$, искомая перестановка реализуется в результате выполнения третьего перемешивания. Другой способ представления этой операции, а именно с помощью направленного графа, иллюстрируется на рис. 7.2.

Перестановочные диаграммы

Предположим, что i -й элемент последовательности из $N = 2^P$ элементов в результате операции перестановки становится j -м элементом. Тогда j будет функцией величин i и N , что можно записать в виде

$$j = P_N(i).$$

Таблица 7.1

Перестановочные последовательности для разных значений N

$N = 8$		$N = 16$		$N = 32$		$N = 64$		$N = 64$		$N = 128$	
i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j
0	0	0	0	0	0	0	0	36	9	0	0
	4		8		16		32		41		64
2	2		4		8		16		25		32
	6		12		24		48		57		96
4	1						8				16
	5	4	2	4	4	40	5	40	5	80	
6	3		10		20		24		37		48
	7		6		12		56		21		112
			14		28				53		
						8	4	13	8	8	
		8	1	8	2	36		45		72	
			9		18		20		29		40
			5		10		52		61		104
			13		26		12				24
							44	48	3	88	
		12	3	12	6	28		35		56	
			11		22		60		19		120
			7		14				51		
$N = 2$			15		30	16	2	11	16	4	
	i			16	1	18		27		36	
	0	0			17	50		59		100	
	1	1			9	10				20	
					25	42	56	7	84		
						26		39	52		
$N = 4$				5		58		23		116	
				21				55			
	i	j		13	24	6		15	24	12	
	0	0			29	38		47		76	
	1	2				22		31		44	
	2	1		24	3	54		63		108	
	3	3			19	14				28	
					11	46				92	
					27	30				60	
						62				124	
				7							
				23	32	1			32	2	
				15		33				66	
				31		17				34	
						49				98	

На рис. 7.3 иллюстрируется характер изменения этой функции для разных N . Эти графы напоминают статистические диаграммы рассеяния с отсутствием явной зависимости j от i . В действительности коэффициент корреляции в каждом случае равен нулю, однако направление связи между i и j является строго детерминированным. На

$N = 128$		$N = 128$		$N = 128$		$N = 256$		$N = 256$	
i	j	i	j	i	j	i	j	i	j
	18	72	9	104	11	0	0	32	4
	82		73		75	128		132	
	50		41		43	64		68	
	114		105		107	192		196	
			25		27	32		36	
40	10		89		91	160		164	
	74		57		59	96		100	
	42		121		123	224		228	
	106								
	26	80	5	112	7	8	16	40	20
	90		69		71	144		148	
	58		37		39	80		84	
	122		101		103	208		212	
			21		23	48		52	
48	6		85		87	176		180	
	70		53		55	112		116	
	38		117		119	240		244	
	102								
	22	88	13	120	15	16	8	48	12
	86		77		79	136		140	
	54		45		47	72		76	
	118		109		111	200		204	
			29		31	40		44	
56	14		93		95	168		172	
	78		61		63	104		108	
	46		125		127	232		236	
	110					88			
	30	96	3			24	24	56	28
	94		67			152		156	
	62		35			88		92	
	126		99			216		220	
			19			56		60	
64	1		83			184		188	
	65		51			120		124	
	33		115			248		252	
	97								
	17								
	81								
	49								
	113								

диаграммах рис. 7.3 направление отсчета величины j совпадает с положительным направлением оси ординат декартовой системы координат, т.е. отсчет j осуществляется по вертикали снизу вверх. Однако последовательный отсчет строк матрицы (рис. 7.2) выполняется, как это принято в европейской письменности, сверху вниз;

соотношения

$$F = \Phi L_4 L_3 L_2 L_1 P_{16} f.$$

Так как $F = Wf$, имеем

$$W = \Phi L_4 L_3 L_2 L_1 P_{16}.$$

Это выражение является новым факторизованным представлением матрицы преобразования W для ДПФ и является основой формирования быстрого алгоритма, рассматриваемого в следующей главе.

Задачи

7.1. Факторизация для БПФ. Для случая $N = 4$ показать, что

$$Wf = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}.$$

7.2. Преобразование матрицы Φ . Получить матрицу преобразования 16-элементного ДПФ в ДПХ при одной и той же исходной последовательности f .

7.3. Последовательности коэффициентов. Оператор $L_4 L_3 L_2 L_1$ применяется к последовательности f без предварительного выполнения операции перестановки. Справедливо ли утверждение, что получающаяся при этом последовательность состоит из истинных элементов преобразования Хартли H , но расположенных в другом порядке?

7.4. Диаграмма рассеяния. а) Показать, что средние значения $\langle i \rangle$ и $\langle j \rangle$ равны $(N - 1)/2 = m$.

б) Оценить центральные моменты $\langle (i - m)^2 \rangle$ и $\langle (j - m)^2 \rangle$.

в) Показать, что коэффициент корреляции $\langle (i - m)(j - m) \rangle$ для перестановочной диаграммы рассеяния достаточно мал, менее 1% для $N > 1024$.

7.5. Перестановка на кольце. а) Изобразить N малых окружностей, равномерно расположенных вдоль окружности много большего диаметра. Провести линию от малой окружности к точке, угловое положение которой характеризуется азимутом $j2\pi/N$, где $j = P_N(i)$ для всех i . Если $j \neq i$, то осуществить замещение для этой малой окружности. Выполнить данную процедуру для $N = 8, 16, 32$ и 64 .

б) Сколько осей симметрии у полученной фигуры?

7.6. Относительное число перестановок. Путем подсчета количества линий на кольцевой диаграмме предыдущей задачи или другим способом показать, что число операций перестановки (замещения), деленное на N , равно

$$0,5 - 2^{-IP[(P+1)/2]},$$

где $IP[x]$ — целая часть x .

Глава 8 АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Минуя древа молодые,
По грубой треснувшей земле
Скакал он на коне галопом
К подножию холма.
И лишь внизу коню дал отдых
И сам был цел и невредим.

А. Б. (Банджо) Патерсон.
Человек со снежной реки

Мы убедились в том, что может быть определено вещественное дискретное преобразование по аналогии с дискретным преобразованием Фурье; теперь мы покажем, что имеется быстрый метод вычислений, аналогичный быстрому преобразованию Фурье. Как было показано выше при рассмотрении факторизации матриц, данная процедура представляет собой простой способ перехода от дискретного преобразования Хартли к дискретному преобразованию Фурье. Следовательно, анализируемая ниже процедура быстрого преобразования также создает основу быстрого метода получения дискретного преобразования Фурье. Действительно, метод, предусматривающий переход от преобразования Хартли, оказывается предпочтительным, в основном в силу упрощения, обусловленного тем, что при обработке вещественных данных не требуются операции с комплексными величинами.

Определяющие соотношения

Когда раскрывается знак суммирования, фигурирующий в определении дискретного преобразования Хартли, мы получаем N равенств, в правой части каждого из которых имеется N слагаемых. Четыре равенства, приведенные в предыдущей главе с целью иллюстрации сказанного, применительно к дискретному преобразованию Хартли

$$H(v) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \cos 2\pi v\tau/N$$

можно переписать в виде

$$H(0) = (1/4) [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)];$$

$$H(1) = (1/4) [f(0) + f(1) \cos 2\pi/N + f(2) \cos 2\pi 2/N + f(3) \cos 2\pi 3/N];$$

$$H(2) = (1/4) [f(0) + f(1) \cos 2\pi 2/N + f(2) \cos 2\pi 4/N + f(3) \cos 2\pi 6/N];$$

$$H(3) = (1/4) [f(0) + f(1) \cos 2\pi 3/N + f(2) \cos 2\pi 6/N + f(3) \cos 2\pi 9/N].$$

Для $N = 2$ имеем только два равенства

$$H(0) = (1/2) [f(0) + f(1)],$$

$$H(1) = (1/2) [f(0) - f(1)].$$

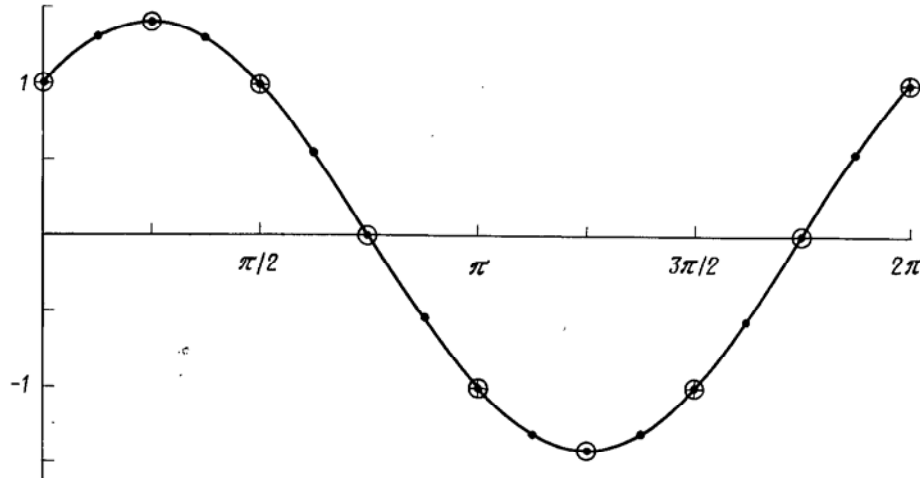


Рис. 8.1. График функции $y = \cos x$, по которому могут быть определены коэффициенты $\cos 2\pi/N$. Для $N = 4$ используются символы \oplus . Для случая $N = 8$ значения этих коэффициентов соответствуют точкам на графике, обозначенным символами \oplus и \odot . Случай $N = 16$ в дополнение к этим символам обозначен простыми точками.

При $N = 4$, выполняя подстановку численных значений \cos , для четырех вышеприведенных равенств получим выражения

$$\begin{aligned} H(0) &= (1/4)[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)], \\ H(1) &= (1/4)[f(0) + f(1) - f(2) - f(3)], \\ H(2) &= (1/4)[f(0) - f(1) + f(2) - f(3)], \\ H(3) &= (1/4)[f(0) - f(1) - f(2) + f(3)]. \end{aligned}$$

В правильности значений соответствующих коэффициентов можно убедиться, анализируя график функции \cos (рис. 8.1) и отмечая точки, равноудаленные друг от друга на четверть периода этой функции, крестиками в кружочке.

При $N = 8$ соответствующие равенства для ДПХ, в чем можно убедиться при анализе рис. 8.1, имеют вид

$$\begin{aligned} H(0) &= (1/8)[f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7)], \\ H(1) &= (1/8)[f(0) + \sqrt{2}f(1) + f(2) + 0 - f(4) - \sqrt{2}f(5) - f(6) - 0], \\ H(2) &= (1/8)[f(0) + f(1) - f(2) - f(3) + f(4) + f(5) - f(6) - f(7)], \\ H(3) &= (1/8)[f(0) + 0 - f(2) + \sqrt{2}f(3) - f(4) + 0 + f(6) - \sqrt{2}f(7)], \\ H(4) &= (1/8)[f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + f(6) - f(7)], \\ H(5) &= (1/8)[f(0) - \sqrt{2}f(1) + f(2) + 0 - f(4) + \sqrt{2}f(5) - f(6) + 0], \\ H(6) &= (1/8)[f(0) - f(1) - f(2) + f(3) + f(4) - f(5) - f(6) + f(7)], \\ H(7) &= (1/8)[f(0) + 0 - f(2) - \sqrt{2}f(3) - f(4) + 0 + f(6) + \sqrt{2}f(7)]. \end{aligned}$$

Можно рассчитать число операций умножения и сложения и использовать результаты этого расчета для оценки временных затрат, необходимых для вычисления всех N значений преобразования.

Свойство $N \log N$

Пусть количество элементов N в последовательности равно числу 2, возведенному в степень P . Тогда $P = \log_2 N$. Построение графиков логарифмов по основанию 2 является непростой задачей, однако желательно иметь некоторое представление о величине $\log_2 N$, просто равной степени P в равенстве

$$N = 2^P.$$

В табл. 8.1 иллюстрируется взаимосвязь величин N и P в пределах их изменения, имеющих практический интерес.

Полезно запомнить некоторые компоненты этой таблицы, особенно выделенные жирным шрифтом; тогда соседние компоненты будут восприниматься как таблица умножения. Если вы не знаете, что 2^{10} приблизительно равно 1000, то вы окажетесь в затруднительном положении при беседах на технические темы. Другим полезным соотношением является следующее: 2^{32} бит = $4 \cdot 10^9$ бит = 500 мега-

Таблица 8.1

Значения величин P , N и NP

P	N	NP
1	2	2
2	4	8
3	8	24
4	16	64
5	32	160
6	64 = 8 × 8	384
7	128	896
8	256 = 16 × 16	2048
9	512	4608
10	1024 = 32 × 32	10 240
11	2048	22 528
12	4096 = 64 × 64	49 152
13	8192	106 496
14	16 384	229 376
15	32 768	491 520
16	65 536	1 048 576
17	131 072	2 228 224
18	262 144 = 512 × 512	4 718 592
19	524 288	9 961 472
20	1 048 576 = 1024 × 1024	20 971 520

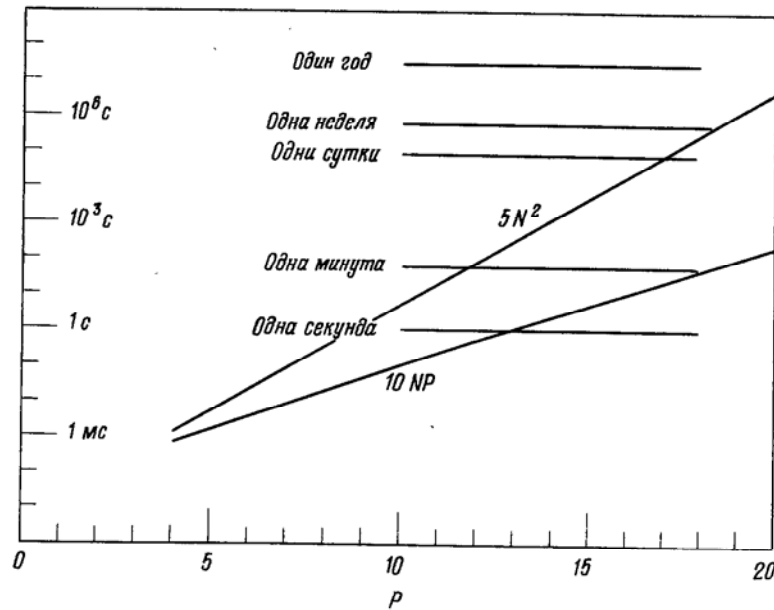


Рис. 8.2. Графики зависимостей величин $10NP$ мкс и $5N^2$ мкс от $P = \log_2 N$, построенные в логарифмическом масштабе и иллюстрирующие, каким образом быстрые алгоритмы обеспечивают возможность и целесообразность использования значений $10 < P < 20$ для широкого круга приложений.

байт. В некоторых случаях значения N приведены в виде произведения сомножителей как напоминание об N , соответствующих изображениям определенных размеров. Для $P = 18$ значение N составляет около четверти миллиона и приблизительно равно числу элементов разрешения в телевизионном изображении.

Общепринятым является утверждение, что число операций, выполняемых в вышеприведенных равенствах, увеличивается по закону N^2 . Это не так очевидно для $N = 2, 4$ и 8 . При больших N возникают сложности в расчете количества этих операций, обусловленные тем, что существенное число коэффициентов принимает значения, равные единице, и в силу этого не требуется умножение; некоторые коэффициенты равны нулю, что исключает выполнение операций и умножения, и деления. Несмотря на подобное усложнение, коэффициенты имеют вполне определенные значения и могут быть рассчитаны для последовательно возрастающих N . Тогда к оценке времени счета можно подойти с позиций определения количества операций сложения и умножения, что воспринимается как увеличение времени счета пропорционально N^2 . Естественно, имеется также возможность хронометрирования процесса фактических вычислений; этот подход выходит за рамки метода, предусматривающего подсчет количества операций, и предполагает оценку временных затрат на реализацию

соответствующих прецедур, что не учитывается в вышеописанном методе подсчета.

Когда величина N становится большой, зависимость вида N^2 означает, что мы столкнемся с практическими пределами для временных затрат или стоимости. Быстрый алгоритм — это алгоритм, не реализующий в чистом виде все операции, предусмотренные в соответствии с определением преобразования, вследствие чего требуемое количество операций пропорционально NP , или $N \log_2 N$, а не N^2 . В качестве примера, иллюстрирующего практическое значение этих рассуждений, рассмотрим быстрый алгоритм, для реализации которого требуется $10 NP$ мкс по сравнению с $5 N^2$ мкс для обычного алгоритма дискретного преобразования. На рис. 8.2 построены соответствующие графики зависимости временных затрат от величины P , изменяющейся от 0 до $P = 20$ ($N = 1048576$). Хотя $P = 20$ не является наибольшим значением P , которое может встретиться на практике, оно фигурировало бы при анализе изображений, имеющих структуру вида 1024×1024 элементов разрешения, для которых разрешающая способность выше реализуемой при использовании телевизионного экрана. Подавляющее большинство преобразований, осуществляемых в повседневной практике, без сомнения оперирует величинами P , не превышающими $P = 10$. Графики наглядно иллюстрируют, что при цифровой обработке изображений больших размеров крайне важным становится вопрос о скорости реализации алгоритма. Ясно, что введение быстрого преобразования Фурье (БПФ) сильно расширяет наши возможности. Необходимость обработки изображений в реальном времени требует на сегодняшний день еще более высокого быстродействия, и обратно, по мере увеличения быстродействия будут открываться новые приложения.

Повторное разбиение последовательностей

Если необходимо получить преобразование Фурье заданной последовательности, то можно выполнить разбиение последовательности на две части и осуществить преобразование каждой из этих частей в отдельности. Так как затрачиваемое время возрастает быстрее скорости изменения N , при реализации преобразования будет иметь место экономия времени счета; однако потребуется некоторое дополнительное время, так как два коротких преобразования объединяются каким-либо образом с целью получения совокупного более длинного преобразования. Данная идея представляется заманчивой, так как подобная процедура может быть применена вновь, а именно сами эти короткие последовательности могут быть поделены пополам с целью дальнейшей экономии времени. В принципе любая факторизация приводит к упрощению вычислительной процедуры. После выполнения $(P - 1)$ -го разбиения исходной последовательности получим двухэлементные сегменты. Теперь уже преобразование двухэлементной последовательности является тривиальным и включает в себя два действия сложения и ни одного действия умножения. Количество

операций, требуемых для объединения последовательностей, получаемых на каждом этапе разбиения, имеет порядок величины N , так как каждому из N элементов может быть присвоен некоторый коэффициент, а всего имеется $(P - 1)$ этапов разбиения. Следовательно, при достаточно больших N количество операций определяется как $N(P - 1)$ или приближенно как NP .

Так же как и при обосновании закона вида N^2 , рассуждения в подтверждение закономерности вида NP носят приближенный характер. Теперь мы подробно проанализируем механизм формирования преобразования Хартли. Далее мы выполним эмпирическую проверку временных затрат на реализацию преобразования в рамках анализа, заменяющего процедуру подсчета количества операций.

Преобразование с использованием разложения на подпоследовательности

Рассмотрим последовательность данных

$$f(\tau) = \{a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2 d_1 d_2\} = \{a_1 0 b_1 0 c_1 0 d_1 0\} + \{0 a_2 0 b_2 0 c_2 0 d_2\},$$

которая представляется в виде суммы двух слагаемых. Две короткие последовательности $\{a_1 b_1 c_1 d_1\}$ и $\{a_2 b_2 c_2 d_2\}$ при их точном «прослаивании» по аналогии с идеальным «тасованием» воспроизводят исходную последовательность $f(\tau)$.

Требуется найти преобразование Хартли $H(v)$ последовательности $f(\tau)$ исходя из преобразований коротких последовательностей. Будем полагать, что последовательность

$$\{a_1 b_1 c_1 d_1\} \text{ имеет ДПХ } \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1\},$$

$$\{a_2 b_2 c_2 d_2\} \text{ имеет ДПХ } \{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2\}.$$

На основании теоремы о растяжении для ДПХ (см. гл. 4) непосредственно можем утверждать:

$$\{a_1 0 b_1 0 c_1 0 d_1 0\} \text{ имеет ДПХ } \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1\},$$

$$\{a_2 0 b_2 0 c_2 0 d_2 0\} \text{ имеет ДПХ } \{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2\}.$$

Однако применительно к последнему выражению следует отметить, что нам требуется ДПХ последовательности $\{0 a_2 0 b_2 0 c_2 0 d_2\}$. С целью получения преобразования этой последовательности применим теорему о сдвиге. При сдвиге на один элемент вправо эта теорема формулируется следующим образом:

Если последовательность $g(\tau)$ имеет ДПХ $G(v)$, то $g(\tau - 1)$ имеет ДПХ вида

$$G(v) \cos(2\pi v/N) + G(N - v) \sin(2\pi v/N).$$

Используя обозначение $\theta = 2\pi/N$, можем утверждать, что последовательность $\{G(v)\}$ приобретает вид

$$\{G(0) \quad G(1) \cos \theta \quad G(2) \cos 2\theta \quad G(3) \cos 3\theta \quad G(4) \cos 4\theta \quad G(5) \cos 5\theta \\ G(6) \cos 6\theta \quad G(7) \cos 7\theta\} + \{G(7) \sin \theta \quad G(6) \sin 2\theta \quad G(5) \sin 3\theta \quad G(4) \sin 4\theta \\ G(3) \sin 5\theta \quad G(2) \sin 6\theta \quad G(1) \sin 7\theta \quad 0\}.$$

Следовательно, при условии что последовательность

$$g(\tau) = \{a_2 0 b_2 0 c_2 0 d_2 0\}$$

имеет ДПХ $G(v) = \{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2\}$, для последовательности $g(\tau - 1) = \{0 a_2 0 b_2 0 c_2 0 d_2\}$ ДПХ равно

$$\{\alpha_2 \beta_2 \cos \theta \quad \gamma_2 \cos 2\theta \quad \delta_2 \cos 3\theta \quad \alpha_2 \cos 4\theta \quad \beta_2 \cos 5\theta \quad \gamma_2 \cos 6\theta \quad \delta_2 \cos 7\theta\} + \\ + \{0 \quad \delta_2 \sin \theta \quad \gamma_2 \sin 2\theta \quad 0 \quad \delta_2 \sin 5\theta \quad \gamma_2 \sin 6\theta \quad \beta_2 \sin 7\theta\}.$$

Наконец, применяя теорему сложения, получим

$$H(v) = \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1\} + \{\alpha_2 \beta_2 \cos \theta \quad \gamma_2 \cos 2\theta \quad \delta_2 \cos 3\theta \quad \alpha_2 \cos 4\theta \\ \beta_2 \cos 5\theta \quad \gamma_2 \cos 6\theta \quad \delta_2 \cos 7\theta\} + \{0 \quad \delta_2 \sin \theta \quad \gamma_2 \sin 2\theta \quad 0 \quad \delta_2 \sin 5\theta \quad \gamma_2 \sin 6\theta \\ \beta_2 \sin 7\theta\}.$$

Если в это равенство для $N = 8$ входят коэффициенты 0, 1 или -1 , то оно упрощается:

$$H(v) = \{\alpha_1 + \alpha_2 \quad \beta_1 + r(\beta_2 + \delta_2) \quad \gamma_1 + \gamma_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 - r(\beta_2 + \delta_2) \quad \gamma_1 - \gamma_2 \quad \delta_1 - r(\beta_2 - \delta_2)\}.$$

На этом завершается доказательство того, что 8-элементное преобразование $H(v)$ может быть сформировано из двух четырех-элементных преобразований $\{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1\}$ и $\{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2\}$.

Общая формула разложения

Ясно, каким образом можно обобщить структуру вышеприведенного равенства. Для заданной последовательности $f(\tau)$, $\tau = 0, 1, \dots, N-1$ будем полагать, что N -элементные подпоследовательности

$$\{f(0) 0 f(2) 0 f(4) 0 \dots\}, \quad \{f(1) 0 f(3) 0 f(5) 0 \dots\}$$

имеют соответственно ДПХ $H_1(v)$ и $H_2(v)$. Тогда

$$H(v) = H_1(v) + H_2(v) \cos(2\pi v/N) + H_2(N - v) \sin(2\pi v/N).$$

Это равенство представляет собой общую формулу разложения, определяющую дискретное преобразование Хартли, с использованием последовательного разбиения последовательностей на две части.

Так как $H_1(v)$ и $H_2(v)$ могут быть получены путем непрерывно повторяющегося разбиения вплоть до четырехэлементных последовательностей, полное разложение выражается через исходные последовательности. Например, для простого 8-элементного преобразования элемент $H(3)$, как оказывается, связан с восемью элементами последовательности $f(\tau)$ следующим образом:

$$H(3) = (1/8)[f(0) + 0 - f(2) + \sqrt{2}f(3) - f(4) + 0 + f(6) - \sqrt{2}f(7)].$$

Эта зависимость согласуется с выражением

$$H(3) = (1/8)\{f(0) + f(1) \cos 3\theta + f(2) \cos 6\theta + f(3) \cos 9\theta + f(4) \cos 12\theta + \\ + f(5) \cos 15\theta + f(6) \cos 18\theta + f(7) \cos 21\theta\},$$

Соотношения, связывающие между собой последовательные этапы формирования 16-элементного БПХ

Исходная последовательность	Перестановка	1-й этап	2-й этап
$F(0,0)$	$F(0,0) \rightarrow F(0,0)$	$F(0,0) + F(0,1) \rightarrow F(1,0)$	$F(1,0) + F(1,2)C_0 + F(1,2)S_0 \rightarrow F(2,0)$
$F(0,1)$	$F(0,1) \rightarrow F(0,8)$	$F(0,0) - F(0,1) \rightarrow F(1,1)$	$F(1,1) + F(1,3)C_1 + F(1,3)S_1 \rightarrow F(2,1)$
$F(0,2)$	$F(0,2) \rightarrow F(0,4)$	$F(0,2) + F(0,3) \rightarrow F(1,2)$	$F(1,0) + F(1,2)C_2 + F(1,2)S_2 \rightarrow F(2,2)$
$F(0,3)$	$F(0,3) \rightarrow F(0,12)$	$F(0,2) - F(0,3) \rightarrow F(1,3)$	$F(1,1) + F(1,3)C_3 + F(1,3)S_3 \rightarrow F(2,3)$
$F(0,4)$	$F(0,4) \rightarrow F(0,2)$	$F(0,4) + F(0,5) \rightarrow F(1,4)$	$F(1,4) + F(1,6)C_0 + F(1,6)S_0 \rightarrow F(2,4)$
$F(0,5)$	$F(0,5) \rightarrow F(0,10)$	$F(0,4) - F(0,5) \rightarrow F(1,5)$	$F(1,5) + F(1,7)C_1 + F(1,7)S_1 \rightarrow F(2,5)$
$F(0,6)$	$F(0,6) \rightarrow F(0,6)$	$F(0,6) + F(0,7) \rightarrow F(1,6)$	$F(1,4) + F(1,6)C_2 + F(1,6)S_2 \rightarrow F(2,6)$
$F(0,7)$	$F(0,7) \rightarrow F(0,14)$	$F(0,6) - F(0,7) \rightarrow F(1,7)$	$F(1,5) + F(1,7)C_3 + F(1,7)S_3 \rightarrow F(2,7)$
$F(0,8)$	$F(0,8) \rightarrow F(0,1)$	$F(0,8) + F(0,9) \rightarrow F(1,8)$	$F(1,8) + F(1,10)C_0 + F(1,10)S_0 \rightarrow F(2,8)$
$F(0,9)$	$F(0,9) \rightarrow F(0,9)$	$F(0,8) - F(0,9) \rightarrow F(1,9)$	$F(1,9) + F(1,11)C_1 + F(1,11)S_1 \rightarrow F(2,9)$
$F(0,10)$	$F(0,10) \rightarrow F(0,5)$	$F(0,10) + F(0,11) \rightarrow F(1,10)$	$F(1,8) + F(1,10)C_2 + F(1,10)S_2 \rightarrow F(2,10)$
$F(0,11)$	$F(0,11) \rightarrow F(0,13)$	$F(0,10) - F(0,11) \rightarrow F(1,11)$	$F(1,9) + F(1,11)C_3 + F(1,11)S_3 \rightarrow F(2,11)$
$F(0,12)$	$F(0,12) \rightarrow F(0,3)$	$F(0,12) + F(0,13) \rightarrow F(1,12)$	$F(1,12) + F(1,14)C_0 + F(1,14)S_0 \rightarrow F(2,12)$
$F(0,13)$	$F(0,13) \rightarrow F(0,11)$	$F(0,12) - F(0,13) \rightarrow F(1,13)$	$F(1,13) + F(1,15)C_1 + F(1,15)S_1 \rightarrow F(2,13)$
$F(0,14)$	$F(0,14) \rightarrow F(0,7)$	$F(0,14) + F(0,15) \rightarrow F(1,14)$	$F(1,12) + F(1,14)C_2 + F(1,14)S_2 \rightarrow F(2,14)$
$F(0,15)$	$F(0,15) \rightarrow F(0,15)$	$F(0,14) - F(0,15) \rightarrow F(1,15)$	$F(1,13) + F(1,15)C_3 + F(1,15)S_3 \rightarrow F(2,15)$

3-й этап

16-х БПХ

$F(2,0) + F(2,4)C_0 + F(2,4)S_0 \rightarrow F(3,0)$	$F(3,0) + F(3,8)C_0 + F(3,8)S_0 \rightarrow F(4,0)$
$F(2,1) + F(2,5)C_1 + F(2,7)S_1 \rightarrow F(3,1)$	$F(3,1) + F(3,9)C_1 + F(3,15)S_1 \rightarrow F(4,1)$
$F(2,2) + F(2,6)C_2 + F(2,6)S_2 \rightarrow F(3,2)$	$F(3,2) + F(3,10)C_2 + F(3,14)S_2 \rightarrow F(4,2)$
$F(2,3) + F(2,7)C_3 + F(2,5)S_3 \rightarrow F(3,3)$	$F(3,3) + F(3,11)C_3 + F(3,13)S_3 \rightarrow F(4,3)$
$F(2,0) + F(2,4)C_4 + F(2,4)S_4 \rightarrow F(3,4)$	$F(3,4) + F(3,12)C_4 + F(3,12)S_4 \rightarrow F(4,4)$
$F(2,1) + F(2,5)C_5 + F(2,7)S_5 \rightarrow F(3,5)$	$F(3,5) + F(3,13)C_5 + F(3,11)S_5 \rightarrow F(4,5)$
$F(2,2) + F(2,6)C_6 + F(2,6)S_6 \rightarrow F(3,6)$	$F(3,6) + F(3,14)C_6 + F(3,10)S_6 \rightarrow F(4,6)$
$F(2,3) + F(2,7)C_7 + F(2,5)S_7 \rightarrow F(3,7)$	$F(3,7) + F(3,15)C_7 + F(3,9)S_7 \rightarrow F(4,7)$
$F(2,8) + F(2,12)C_0 + F(2,12)S_0 \rightarrow F(3,8)$	$F(3,0) + F(3,8)C_8 + F(3,8)S_8 \rightarrow F(4,8)$
$F(2,9) + F(2,13)C_1 + F(2,15)S_1 \rightarrow F(3,9)$	$F(3,1) + F(3,9)C_9 + F(3,15)S_9 \rightarrow F(4,9)$
$F(2,10) + F(2,14)C_2 + F(2,14)S_2 \rightarrow F(3,10)$	$F(3,2) + F(3,10)C_{10} + F(3,14)S_{10} \rightarrow F(4,10)$
$F(2,11) + F(2,15)C_3 + F(2,13)S_3 \rightarrow F(3,11)$	$F(3,3) + F(3,11)C_{11} + F(3,13)S_{11} \rightarrow F(4,11)$
$F(2,8) + F(2,12)C_4 + F(2,12)S_4 \rightarrow F(3,12)$	$F(3,4) + F(3,12)C_{12} + F(3,12)S_{12} \rightarrow F(4,12)$
$F(2,9) + F(2,13)C_5 + F(2,15)S_5 \rightarrow F(3,13)$	$F(3,5) + F(3,13)C_{13} + F(3,11)S_{13} \rightarrow F(4,13)$
$F(2,10) + F(2,14)C_6 + F(2,14)S_6 \rightarrow F(3,14)$	$F(3,6) + F(3,14)C_{14} + F(3,10)S_{14} \rightarrow F(4,14)$
$F(2,11) + F(2,15)C_7 + F(2,13)S_7 \rightarrow F(3,15)$	$F(3,7) + F(3,15)C_{15} + F(3,9)S_{15} \rightarrow F(4,15)$

которое непосредственно следует из определения преобразования Хартли. Представляет интерес вопрос: почему оба этих подхода требуют разных временных затрат на вычисление соответствующих алгоритмов? Суть этого различия заключается в многоэтапном характере организации вычислительного процесса, обусловленном процедурой последовательного разбиения. Структура данного алгоритма, хотя мы к ней пришли независимо, соответствует операции факторизации матриц.

С целью иллюстрации последовательности выполнения арифметических операций обратимся к табл. 8.2, в которой приведены соотношения, реализующие операции преобразований.

Соотношения для случая $N = 16$

Как и в случае факторизации матриц, все свойства процедуры преобразования могут быть выявлены при рассмотрении примера, когда $N = 16$. В табл. 8.2 первый столбец содержит исходную последовательность данных $F(0, v)$. Во втором столбце приводятся результаты выполнения определенной в предыдущей главе операции перестановки элементов исходной последовательности. В последующих столбцах символ $F(s, v)$ используется для обозначения v -го элемента 16-элементной последовательности на этапе с номером s ее преобразования. Таким образом, столбец с элементами $F(1, v)$ содержит результаты 1-го этапа преобразования. Стрелки, используемые в операторах присвоения, подчеркивают направление перехода на данном этапе. Видим, что во всех случаях величина $F(1, v)$ получается просто как сумма или разность двух элементов последовательности $F(0, v)$. На 2-м этапе эти комбинации используются в качестве операндов, а именно осуществляется суммирование трех слагаемых, заимствованных из формулы разложения; аналогичным образом реализуются 3-й и 4-й этапы. Значения $F(3, v)$, имеющие синусные коэффициенты, в явном виде иллюстрируют явление возвратной индексации.

Очевидно, имеет место экономия числа операций умножения по сравнению с N^2 , требуемым для формирования суммы, предусмотренной по определению ДПХ. Однако табл. 8.2 непригодна для точного подсчета количества операций из-за вырождения отдельных членов, наглядно иллюстрируемого в табл. 8.3, что становится очевидным при замене коэффициентов в виде тригонометрических функций их числовыми значениями. Как на 1-м, так и на 2-м этапах не требуется ни одной операции умножения, а на 3-м этапе необходимо выполнить только 16 операций умножения, в каждой из которых используется умножение на один и тот же коэффициент r , равный $1/\sqrt{2}$. Полный эффект от оценки, характеризующейся сложным механизмом упрощения, анализируется ниже при исследовании временных затрат на вычисления.

Соотношения для 16-элементной последовательности при подстановке числовых значений коэффициентов ($r = 1/\sqrt{2}$)

Исходная последовательность	Перестановка	1-й этап	
$F(0, 0)$	$F(0, 0) \rightarrow F(0, 0)$	$F(0, 0) + F(0, 1) \rightarrow F(1, 0)$	
$F(0, 1)$	$F(0, 8) \rightarrow F(0, 1)$	$F(0, 0) - F(0, 1) \rightarrow F(1, 1)$	
$F(0, 2)$	$F(0, 4) \rightarrow F(0, 2)$	$F(0, 2) + F(0, 3) \rightarrow F(1, 2)$	
$F(0, 3)$	$F(0, 12) \rightarrow F(0, 3)$	$F(0, 2) - F(0, 3) \rightarrow F(1, 3)$	
$F(0, 4)$	$F(0, 2) \rightarrow F(0, 4)$	$F(0, 4) + F(0, 5) \rightarrow F(1, 4)$	
$F(0, 5)$	$F(0, 10) \rightarrow F(0, 5)$	$F(0, 4) - F(0, 5) \rightarrow F(1, 5)$	
$F(0, 6)$	$F(0, 6) \rightarrow F(0, 6)$	$F(0, 6) + F(0, 7) \rightarrow F(1, 6)$	
$F(0, 7)$	$F(0, 14) \rightarrow F(0, 7)$	$F(0, 6) - F(0, 7) \rightarrow F(1, 7)$	
$F(0, 8)$	$F(0, 1) \rightarrow F(0, 8)$	$F(0, 8) + F(0, 9) \rightarrow F(1, 8)$	
$F(0, 9)$	$F(0, 9) \rightarrow F(0, 9)$	$F(0, 8) - F(0, 9) \rightarrow F(1, 9)$	
$F(0, 10)$	$F(0, 5) \rightarrow F(0, 10)$	$F(0, 10) + F(0, 11) \rightarrow F(1, 10)$	
$F(0, 11)$	$F(0, 13) \rightarrow F(0, 11)$	$F(0, 10) - F(0, 11) \rightarrow F(1, 11)$	
$F(0, 12)$	$F(0, 3) \rightarrow F(0, 12)$	$F(0, 12) + F(0, 13) \rightarrow F(1, 12)$	
$F(0, 13)$	$F(0, 11) \rightarrow F(0, 13)$	$F(0, 12) - F(0, 13) \rightarrow F(1, 13)$	
$F(0, 14)$	$F(0, 7) \rightarrow F(0, 14)$	$F(0, 14) + F(0, 15) \rightarrow F(1, 14)$	
$F(0, 15)$	$F(0, 15) \rightarrow F(0, 15)$	$F(0, 14) - F(0, 15) \rightarrow F(1, 15)$	
2-й этап		3-й этап	
$F(1, 0) + F(1, 2) \rightarrow F(2, 0)$		$F(2, 0) + F(2, 4) \rightarrow F(3, 0)$	
$F(1, 1) + F(1, 3) \rightarrow F(2, 1)$		$F(2, 1) + rF(2, 5) + rF(2, 7) \rightarrow F(3, 1)$	
$F(1, 0) - F(1, 2) \rightarrow F(2, 2)$		$F(2, 2) + F(2, 6) \rightarrow F(3, 2)$	
$F(1, 1) - F(1, 3) \rightarrow F(2, 3)$		$F(2, 3) - rF(2, 7) + rF(2, 5) \rightarrow F(3, 3)$	
$F(1, 4) + F(1, 6) \rightarrow F(2, 4)$		$F(2, 0) - F(2, 4) \rightarrow F(3, 4)$	
$F(1, 5) + F(1, 7) \rightarrow F(2, 5)$		$F(2, 1) - rF(2, 5) - rF(2, 7) \rightarrow F(3, 5)$	
$F(1, 4) - F(1, 6) \rightarrow F(2, 6)$		$F(2, 2) - F(2, 6) \rightarrow F(3, 6)$	
$F(1, 5) - F(1, 7) \rightarrow F(2, 7)$		$F(2, 3) + rF(2, 7) - rF(2, 5) \rightarrow F(3, 7)$	
$F(1, 8) + F(1, 10) \rightarrow F(2, 8)$		$F(2, 8) + F(2, 12) \rightarrow F(3, 8)$	
$F(1, 9) + F(1, 11) \rightarrow F(2, 9)$		$F(2, 9) + rF(2, 13) + rF(2, 15) \rightarrow F(3, 9)$	
$F(1, 8) - F(1, 10) \rightarrow F(2, 10)$		$F(2, 10) + F(2, 14) \rightarrow F(3, 10)$	
$F(1, 9) - F(1, 11) \rightarrow F(2, 11)$		$F(2, 11) - rF(2, 15) + rF(2, 13) \rightarrow F(3, 11)$	
$F(1, 12) + F(1, 14) \rightarrow F(2, 12)$		$F(2, 8) - F(2, 12) \rightarrow F(3, 12)$	
$F(1, 13) + F(1, 15) \rightarrow F(2, 13)$		$F(2, 9) - rF(2, 13) + rF(2, 15) \rightarrow F(3, 13)$	
$F(1, 12) - F(1, 14) \rightarrow F(2, 14)$		$F(2, 10) - F(2, 14) \rightarrow F(3, 14)$	
$F(1, 13) - F(1, 15) \rightarrow F(2, 15)$		$F(2, 11) + rF(2, 15) - rF(2, 13) \rightarrow F(3, 15)$	

Направленный сигнальный граф

По приведенным выше таблицам можно проследить траектории, иллюстрирующие характер влияния каждого элемента исходной последовательности на значения результирующего преобразования. Соответствующий направленный граф для $N = 8$ показан на рис. 8.3.

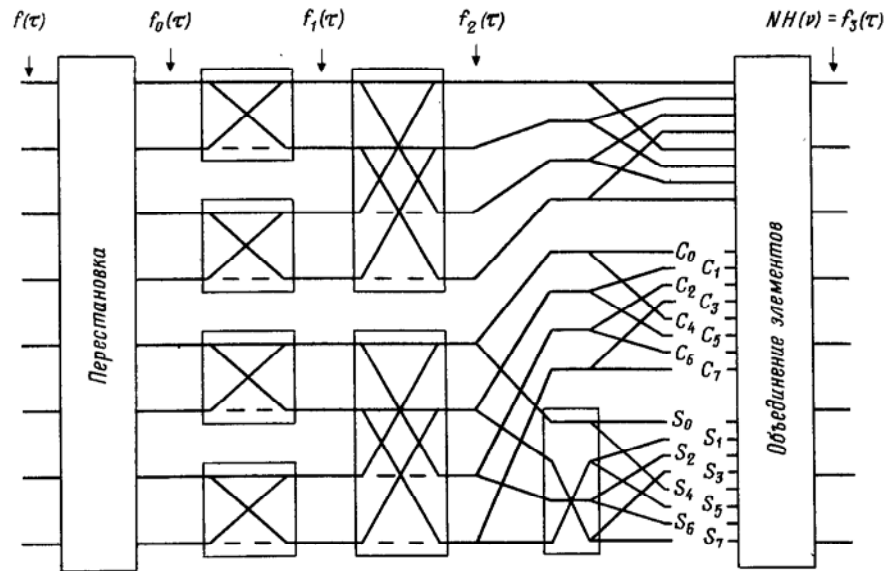


Рис. 8.3. Характер преобразования каждого элемента исходной последовательности в элементы результирующего преобразования при реализации быстрого алгоритма иллюстрируется линиями направленного графа, которым соответствуют косинусные и синусные коэффициенты C_n и S_n , которые в частных случаях сводятся к 1 (сплошные линии) или -1 (штриховые линии).

Первым структурным элементом является блок под названием «Перестановка», состав элементов которого анализируется ниже; в этом блоке просто осуществляется изменение порядка следования элементов исходной последовательности. Блоки, соответствующие 1-му этапу, имеют два входа и два выхода и реализуют операцию ДПХ двухэлементной последовательности ($N = 2$), аналитически описываемую соотношением

$$H(v) = (1/2) \sum_{\tau=0}^1 F(\tau) \cos 2\pi v\tau/2.$$

Раскрывая знак суммы в определении преобразования для этого частного случая, получим

$$H(0) = (1/2) [f(0) + f(1)];$$

$$H(1) = (1/2) [f(0) - f(1)].$$

Фигурирующий в этих равенствах коэффициент $1/2$ не включен в направленный граф, соответствующий 1-му этапу; аналогично этот коэффициент отсутствует на 2-м и 3-м этапах реализации алгоритма, что в дальнейшем учитывается в совокупности в виде коэффициента 8. На практике, чтобы избежать многократного выполнения операции умножения на промежуточных этапах, эта величина включается в

состав масштабного коэффициента, необходимого при реализации процедур нормировки, преобразования результатов или их графического отображения.

В результате переноса коэффициентов $1/2$ в завершающую стадию процедуры преобразования блок, соответствующий его 1-му этапу, просто реализует сложение двух элементов входной последовательности (выход тракта суммирования изображен в верхней части блока) и их вычитание (выход разностного канала изображен в нижней части). В приведенной диаграмме можно избежать использования в явном виде разностного тракта, если провести штриховые линии и полагать коэффициент передачи соответствующего канала равным -1 . Блоки, соответствующие 2-му этапу, являются четырехходовыми, как это следует из приведенных на рис. 8.3 соотношений, являющихся основой направленного графа, и имеют четыре выхода; при этом, как было установлено выше, не требуется выполнение операций умножения. В этой области графа имеются две пунктирные и шесть сплошных линий. И только на третьем этапе осуществления преобразования начинает проявляться эффект возвратной индексации.

Реализуется дублирование 4-элементного преобразования, сформированного на выходе верхнего блока столбца, соответствующего 2-му этапу, с целью получения 8-элементной последовательности, которая была приведена выше в виде

$$H_1(v) = \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1\};$$

элементы этого преобразования воспроизводятся на выходах каналов с нулевого по седьмой включительно. Выходы нижнего блока, на которых формируется 4-элементное преобразование, разделяются на косинусный и синусный каналы. Для косинусного канала по аналогии с процедурой, выполненной для верхнего блока, осуществляется дублирование четырех коэффициентов перед операцией умножения на коэффициенты $C_0 - C_7$, после чего реализуется суммирование соответствующих произведений, формируемых на выходах с нулевого по седьмой. Для синусного канала осуществлению процедуры согласования порядка, должен предшествовать блок, реализующий схему перекрестных переходов, что необходимо для обеспечения требуемой возвратной индексации. После использования синусных коэффициентов соответствующие произведения подаются на восемь идентичных суммирующих выходов блока, осуществляющего их комбинирование и получившего название «COMBINE».

Вычисление с замещением

При описании потока операций в неявном виде подразумевалось, что N -элементный массив памяти готов к приему выходной последовательности, являющейся результатом вычислений на предыдущем этапе. Этот подход упрощает объяснение и реализуется в программах вычислений FHTBAS и FHTBAS.FOR, приведенных в приложении 1. Однако имеется возможность более рационального использования

памяти ЭВМ. Можно заметить, что в табл. 8.2 и 8.3 массив $F(0, v)$ содержит не только элементы исходной последовательности, но и результаты их перестановки, обеспечивающей экономию числа ячеек памяти ЭВМ, для чего потребуется ряд искусственных приемов. Например, если элемент $F(0, 8)$ должен быть размещен на позиции $(0,1)$, то, как обусловлено второй строкой столбца «Перестановка», сначала элемент $F(0,1)$ следует занести на временную позицию. Затем этот элемент может быть размещен на позиции $(0,8)$, что определено 9-й строкой.

Аналогичные приемы предусматриваются в случае, когда результаты выполнения 1-го этапа преобразования должны быть возвращены к расположению исходной последовательности. Для каждого элемента на входе блока, реализующего 1-й этап преобразования, потребуются две временные позиции, на входе блока, реализующего 2-й этап — четыре позиции и т. д. В программе вычислений количество позиций, используемых для запоминания элементов массива, равно NP , а для наиболее эффективного варианта это число просто равно N . Тогда после завершения вычислительного процесса элементы преобразования займут позиции элементов исходной последовательности. Это означает, что будет выполнено стирание исходных данных; естественно, исходные данные всегда могут быть восстановлены в результате дальнейшего преобразования, но в общем случае следует заблаговременно уделить внимание выполнению любых требуемых операций над исходными последовательностями, таких, как табулирование или графическое построение, если массив памяти ограничен N позициями.

Вычислительная процедура с замещением используется в программах FHTSUB и FHTFOR.FOR (приложение 1). В результате освобождения сегментов памяти может осуществляться преобразование и намного более длинных последовательностей данных.

Анализ временных затрат на вычисление с помощью полосковой диаграммы

Найдя способ получения ДПХ, можно исследовать проблему оценки временных затрат на вычисление этого преобразования и сравнить их с аналогичным параметром для ДПФ. Традиционный метод решения этой задачи заключается в подсчете количества операций, используемых при вычислении преобразования; альтернативный метод предполагает хронометрирование вычислительного процесса, т. е. расчет фактических затрат времени на реализацию отдельных процедур. Анализ фактических временных затрат показывает, что отдельные компоненты программы вычисления имеют разный удельный вес в суммарном времени счета (машинном времени), изменяющийся при изменении величины N ; в результате отсутствует простое соотношение между скоростями выполнения математических программ (соответственно, между временем их реализации) для БПХ и БПФ. С

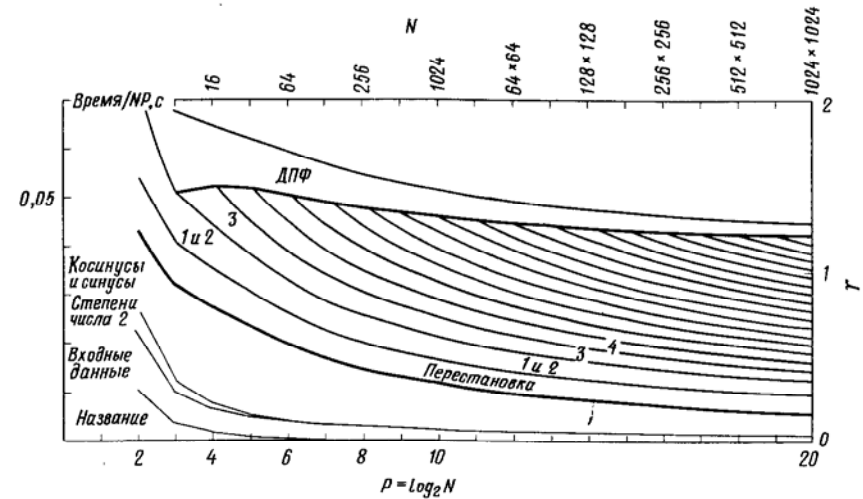


Рис. 8.4. Полосковая диаграмма, иллюстрирующая зависимость затрат времени, необходимых для выполнения ДПХ, от числа элементов последовательности данных.

полной определенностью можно допустить зависимость отношения интервалов машинного времени для двух преобразований от N , однако наряду с этим данное отношение будет зависеть и от других факторов. Чтобы понять это, необходимо проанализировать процедуру хронометрирования для какого-либо частного случая.

Реальная программа, которая детально будет исследоваться ниже, может быть проанализирована с помощью результатов, представленных на рис. 8.4 в виде полосковой диаграммы. Программа разбивается на ряд отдельных подпрограмм следующим образом: а) название программы, б) ввод данных, в) предварительное вычисление степеней числа 2, г) предварительное вычисление синусов и косинусов, д) перестановка, е) совокупность 1-го и 2-го этапов, ж) этапы с 3-го по $(P - 1)$ -й, з) преобразование в ДПФ.

Название программы является одной из ее существенных компонент, которая, однако, незначительно зависит (или совсем не зависит) от величины N ; для процедуры ввода данных специальные комментарии не требуются. Предварительное составление расчетной таблицы степеней числа 2 оказывается полезным в силу того, что многие элементы структуры программы связаны с блоками ее компонент, имеющими длину $N/2$, $N/4$ и т. д. Все эти величины являются степенями числа 2, если N представляет собой степень этого же числа, и гораздо целесообразнее располагать этими степенями заранее, чем вычислять требуемые $N/2$ значений (в случаях, когда деление на 2 занимает время, сравнимое с затратами времени на реализацию других операций); числа, субкратные величине N , встречаются в итерациях (циклах), и многократное повторение одного и того же

действия деления связано с неоправданными потерями времени. В некоторых ЭВМ действие деления на 2 может быть реализовано с помощью регистров сдвига; в подобных ситуациях вопрос предварительного вычисления, возможно, может быть пересмотрен. Этот примером иллюстрируется толкование вопроса, касающегося отношения скоростей (быстродействия в реализации алгоритмов БПХ и БПФ), которая, как очевидно, зависит как от параметра N , так и от типа используемой ЭВМ. Даже если рассматривать это отношение для одной ЭВМ при фиксированном N , то применительно к двум алгоритмам, использующим один и тот же метод реализации процедуры получения степеней числа 2, отношение скоростей будет изменяться при переходе к другому методу, если данная часть программы требует неодинаковых затрат времени в каждом случае.

Предварительное вычисление синусов и косинусов выполняется с той же целью: во избежание многократного повторения этих операций, однако оно требует временных затрат, превышающих на порядок величины время вычисления степеней числа 2, и явилось объектом внимания специалистов. Детали процедуры будут рассмотрены ниже.

На приведенной диаграмме можно заметить, что операция перестановки требует меньших временных затрат, чем вычисление тригонометрических функций, однако степень этого различия снижается по мере увеличения последовательности данных. Отсюда не следует, что данные пропорции будут выдерживаться в других случаях, а фактические затраты времени, включая их зависимость от N , могут быть определены путем хронометрирования.

Расчеты для 1-го и 2-го этапов исследуемой программы были выполнены с применением соотношений, приведенных в табл. 8.3. Альтернативный подход предполагает использование общей формулы, содержащей синусы и косинусы, которые, как показывают оценки для этих двух этапов, невелики. Экспериментально путем прямых измерений было показано, что время, требуемое для реализации 1-го и 2-го этапов преобразования, приблизительно делится между ними пополам при условии, что обработка данных на этих этапах осуществляется непосредственно перед повторным циклом.

Для всех последующих этапов, а именно с 3-го по $(P-1)$ -й использовалась общая формула, даже несмотря на незначительную экономию, которая была обнаружена при отдельном анализе 3-го этапа. Программа, представленная в приложении 1, реализует повторное вычисление константы $r = 0,707$, фигурирующей в процедуре выполнения 3-го этапа.

Наконец, значительное дополнительное время требуется при необходимости формирования ДПФ. Однако при определении спектра мощности не реализуются требуемые дополнительные резервы времени, так как спектр мощности может быть вычислен исходя из ДПХ путем оценки величины $[H(v)]^2 + [H(N-v)]^2$. Эта операция может быть реализована в пределах того же интервала

времени, что и для вычисления спектра мощности с помощью вещественной и мнимой частей ДПФ.

Естественно, время, требуемое на процедуру вычисления в целом, возрастает с увеличением N , однако зависимость от N по-разному проявляется на разных этапах выполнения преобразования. Как хорошо известно, время счета (машинное время) приближенно описывается законом вида $N \log_2 N$, или NP , по этой причине по оси ординат откладывается отношение времени к произведению NP . Можно убедиться в том, что по мере увеличения N

Машинное время $\rightarrow 0,045 NP$ секунд.

Коэффициент качества. Для ЭВМ с более высокой тактовой частотой коэффициент пропорциональности оказывается меньше 0,045 и может быть определен коэффициент качества γ , который учитывает неидентичность параметров разных ЭВМ в общем случае, когда время, затрачиваемое на выполнение операции умножения, существенно больше, чем параметр для таких часто используемых процедур, как сложение и оператор присвоения. Идея заключается в нормировке относительно T_4 —времени, затрачиваемого на выполнение четырех действий умножения. Тогда имеем

Машинное время $= \gamma N P T_4$.

Коэффициент качества, как оказывается, приближенно равен 1, а для приведенного выше случая он приближается к значению 1,3 при $P \rightarrow 20$. Для более коротких последовательностей γ несколько больше, в чем можно убедиться из анализа соотношения, поясняющего процедуру нормировки.

Важность коэффициента качества в том виде, в каком он определен выше, заключается в том, что можно ответить на вопрос об эффективности математического обеспечения или целесообразности его улучшения.

Степени числа 2

Подпрограмма вычисления величин $M(I) = 2^I$, заимствованная из приложения 1, имеет вид

```

2000  ! Subroutine: Get powers of 2
2010  DIM M(P)
2020  I=0
2030  M(0)=1
2040  M(I+1)=M(I)+M(I)
2050  I=I+1
2060  IF I<P THEN GOTO 2040
2070  RETURN

```

Переменной $P = \log_2 N$, для которой предварительно дается описание, должно быть присвоено ее числовое значение в операторе

размерности; например, если $P = 10$, то оператор размерности будет иметь вид 2010 DIM M (10). Однако в строке 2060 может быть использован символ P. В результате данная подпрограмма осуществляет присвоение конкретных значений элементам $M(0)$, $M(1)$, ..., $M(P)$. Например, если $P = 5$, то элементам массива $M()$ будут присвоены следующие значения:

I	M(I)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Первый элемент этой таблицы, а именно $M(0) = 1$, определяется оператором строки 2010, а последующие элементы получают удвоением очередного значения. Удвоение осуществляется сложением, а не умножением на 2, так как сложение реализуется быстрее, чем умножение. После каждого присвоения обеспечивается возврат к операции удвоения, что повторяется до тех пор, пока количество циклов не окажется равным P. Затраты времени на эту процедуру должны быть пропорциональны P. Поэтому после нормировки относительно NP вертикальный уровень полосы, соответствующей степени числа 2 (рис. 8.4), монотонно убывает до минимального уровня по закону N^{-1} . Как видно на полосковой диаграмме, предварительное составление таблицы степеней числа 2 для последовательностей большой длины требует пренебрежимо малых затрат времени по сравнению с суммарным временем счета.

Тригонометрические функции

Для последовательности данных длиной N требуются синусы и косинусы, представляющие собой функции всех аргументов, являющихся целочисленными кратными $(1/N)$ -й части окружности. Поэтому при заданном N целесообразно составить таблицу, элементами которой будут являться эти заранее вычисленные значения. Один из методов выполнения этой процедуры иллюстрируется в приведенной в приложении 1 программе FHTBAS:

```

3000 ! Subroutine: Get sines and cosines
3010 W=2*PI/N
3020 A=0
3030 FOR I=1 TO N
3040     A=A+W
3050     S(I)=SIN(A)

```

```

3060     C(I)=COS(A)
3070 NEXT I
3080 RETURN

```

В результате того, что эти величины рассчитываются раз и навсегда, исключается какое-либо повторное выполнение процедуры предварительного вычисления. Однако полосковая диаграмма показывает, что на вычисление тригонометрических функций затрачивается значительная доля общего времени счета; число этих рассчитываемых значений существенно превышает степени числа 2, пропорциональные N, а не P. После нормировки относительно произведения NP график для соответствующей полосы монотонно убывает по закону P^{-1} , но не до нуля, поэтому большое внимание уделяется сокращению временных затрат. Многое при этом зависит от самой ЭВМ, так как вычисление тригонометрических функций осуществляется в ЭВМ различными методами в зависимости от реализуемой точности и других факторов. При этом один из наиболее эффективных методов расчета заключается в вычислении в первую очередь тангенса, обозначаемого t, а затем в получении косинуса и синуса соответственно по формулам $(1+t^2)^{-1/2}$ и $t(1+t^2)^{-1/2}$. Естественно, это необязательно знать пользователю, и может оказаться неожиданностью выявление того факта, что синус и косинус могут быть вычислены гораздо быстрее в результате замены вышеприведенных строк подпрограммы следующими:

```

3030 FOR I=1 TO N/4
3040     A=A+W
3050     C(I)=COS(A)
3060     S(I)=TAN(A)*C(I)
3070 NEXT I

```

Результаты могут быть получены с гораздо более высокой скоростью с помощью фундаментального метода, уходящего корнями к Клавдию Птолемию. Этот метод вообще не зависит от реализуемых тригонометрических функций. Метод этого вида представлен в при-

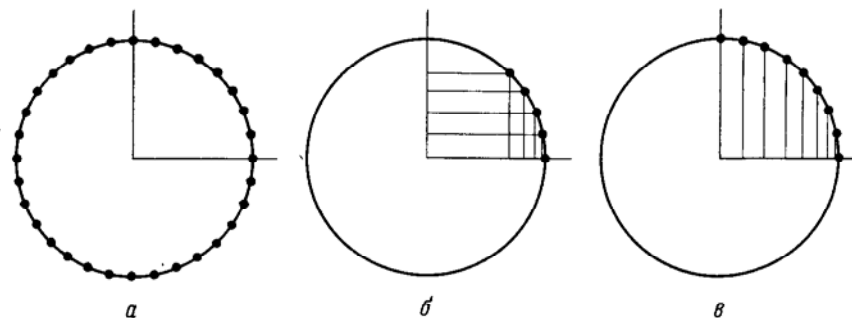


Рис. 8.5. Геометрическая интерпретация коэффициентов $C_{n,s}$ и $S_{n,s}$ для $s = 16$.

ложении 1 в виде части подпрограммы FHTSUB, которая может быть включена в программы общего характера.

Знание величин $\cos(2\pi n/N)$ и $\sin(2\pi n/N)$ для целочисленных значений n , изменяющихся от 0 до $N-1$, равноценно наличию информации о координатах N точек, равномерно распределенных вдоль окружности единичного радиуса, как это показано на рис. 8.5, а. Однако если известны координаты этих точек только в пределах одного октанта (рис. 8.5, б), то могут быть восстановлены координаты и всех остальных точек. С другой стороны, оказывается достаточным знание только координат точек в пределах одного квадранта (рис. 8.5, в).

Быстрое вычисление синусов

Табулирование синусов, аргументы которых составляют долю окружности единичного радиуса, не является достижением сегодняшнего дня, а было достаточно развито еще 1800 лет назад Птолемеем. Более эффективная процедура вычисления синусов по сравнению с использованием встроенных программ, реализуемых разработчиками ЭВМ, может быть изучена исходя из опыта предыдущих столетий.

Идея Птолемея заключалась в переходе от грубого к точному разбиению окружности. Из теории правильных многоугольников известно, что длины хорд, стягивающих дуги с центральными углами 60° и 72° , соответственно равны $ch 60^\circ = 1$ и $ch 72^\circ = 1,17557$, где $ch \theta = 2 \sin(\theta/2)$ — длина хорды, стягивающей дугу с центральным углом θ , для окружности единичного радиуса. Согласно изящной теореме Птолемея, длина хорды, соответствующей разности заданных центральных углов, может быть получена из соотношения

$$ch(\alpha - \beta) = ch \alpha ch(\pi - \beta) - ch(\pi - \alpha) ch \beta,$$

эквивалентного выражению

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

По известным значениям $ch 60^\circ$ и $ch 72^\circ$ Птолемей мог, таким образом, оценить $ch 12^\circ$, а также длины хорд для центральных углов, кратных 12° . Получающаяся при этом таблица эквивалентна таблице, составленной из синусов углов, кратных 6° .

В соответствии с теоремой Птолемея утверждается, что для четырехугольника $ABCD$ произвольной формы (рис. 8.6), вершины которого лежат на окружности с центром O , имеет место равенство $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Для четырехугольника, имеющего прямоугольную форму, как частный случай получаем теорему Пифагора. При $DOB = 2\alpha$ и $COB = 2\beta$ получаем теорему Птолемея для синуса разности углов.

Табличные данные для угла 12° применительно к обозначениям, принятым в этой книге, соответствуют случаю $N = 60$. Для перехода к более мелкому разбиению окружности Птолемей ввел в рассмотрение метод, эквивалентный методу определения длины хорды, стяги-

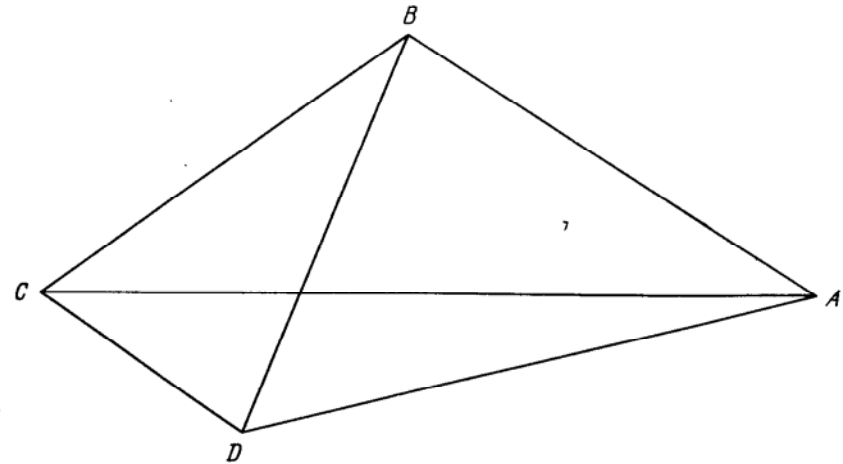


Рис. 8.6. Теорема Птолемея: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

вающей половину дуги:

$$ch \theta/2 = [2 - ch(\pi - \theta)]^{1/2},$$

который позволил получить результаты вплоть до угла $0,75^\circ$ и кратных ему значений, что соответствует $N = 480$. Этот метод не пригоден для углов, кратных 1° . Однако Птолемей исходил из неравенства

$$ch \theta / ch \phi < \theta / \phi \quad \text{при } \theta > \phi.$$

Таким образом,

$$ch 1^\circ / ch 0,75^\circ < 4/3, \quad ch 1,5^\circ / ch 1^\circ < 3/2.$$

С учетом того, что $ch 1,5^\circ = 0,026179$, а $ch 0,75^\circ = 0,013090$, из системы этих двух неравенств можно заключить:

$$0,0174528 < ch 1^\circ < 0,0174532.$$

Так как различие правой и левой частей начинает проявляться с шестого десятичного знака, это грубое приближение, но можно повысить точность вычислений, разбив метод Птолемея*.

Интересным представляется вывод для хорды, стягивающей дугу 1° (или для $\sin 0,5^\circ$), дальнейшее применение правила разбиения на две равные части позволило Птолемею составить таблицу длин хорд для интервалов, следующих через $0,5^\circ$ (для синуса — через каждые $0,25^\circ$), с точностью до пятого десятичного знака. Так как эта таблица соответствует случаю $N = 1440$, она отвечает требованиям программ вычисления БПФ, используемых в настоящее время.

* Высокий уровень этой традиции был продолжен Архимедом, который установил, например, что $256/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ (т.е. $1,732026 < < 1,732050 < 1,732051$).

Если составление таблицы начать с элементов $\sin(i\pi/8)$, $i = 1, 2, 3, 4$, т.е. для θ , следующих через интервалы $22,5^\circ$, то можно перейти к таблице, составленной из элементов, следующих через $11,25^\circ$, путем вычисления синусов каждого из промежуточных значений аргумента θ исходя из определенных значений функции $\sin(\theta \pm 11,25^\circ)$. Формула для разности имеет вид $\sin \theta = (1/2) \sec \beta [\sin(\theta + \beta) + \sin(\theta - \beta)]$.

Поправочный коэффициент $(1/2) \sec \beta$ может быть получен из формулы, определяющей длину хорды, стягивающей половину первоначальной дуги; для этой формулы исходной величиной является: $(1/2) \sec 11,25^\circ = 0,509795579$. Таким образом:

$$(1/2) \sec \beta/2 = [2 + 1/(1/2) \sec \beta]^{-1/2}.$$

Эта рекуррентная формула используется в программе FHTSUB, приведенной в приложении 1.

Составление таблицы косинусов представляет собой отдельный вопрос. В следующем разделе будет показано, что целесообразно располагать таблицей значений $\operatorname{tg} \theta/2$. При наличии такой таблицы косинусы могут быть получены из соотношения

$$\cos \theta = 1 - \sin \theta \operatorname{tg} \theta/2.$$

Однако нет необходимости заранее вычислять косинусы в явном виде, так как вместо этого можно использовать тангенсы половинных углов, что и целесообразно осуществлять на практике.

Операция быстрого поворота

Внутри программы FHTBAS (строки 6170, 6180) имеются две операции вида

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta,$$

$$y = y' \cos \theta + x' \sin \theta,$$

которые, очевидно, представляют собой стандартные формулы поворота системы координат на угол θ . Для этого требуются четыре операции умножения и две операции сложения, а от эффективности их выполнения в силу частого обращения к этому блоку программы в значительной степени зависит суммарное машинное время. Ниже будет описан метод быстрого поворота, введенный Бьюнеманом (*O. Buneman. Inversion of the Helmholtz (or Laplace-Poisson) Operator for Slab Geometry, J. Computational Phys., vol. 12, pp. 124–130, 1973.*—Обращение оператора Гельмгольца (Лапласа–Пуассона) для геометрии на плоскости). Посредством довольно удачного приема количество операций умножения уменьшено до трех. Число операций сложения возросло до трех, однако для многих ЭВМ, затрачивающих больше времени на выполнение операций умножения, чем на сложение, имеет место существенное сокращение машинного времени.

Для пояснения алгоритма Бьюнемана рассмотрим рис. 8.7. При

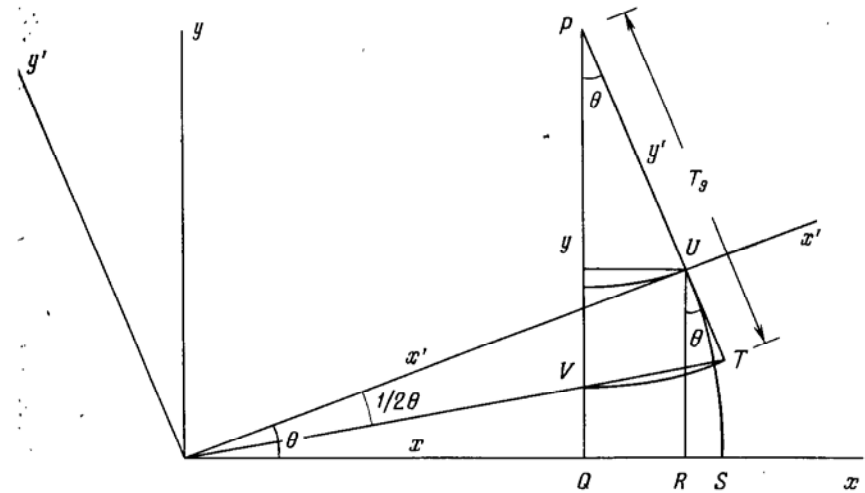


Рис. 8.7. Иллюстрация быстрого алгоритма Бьюнемана для поворота прямоугольной системы координат.

заданных координатах (x', y') точки P мы получаем ее новые координаты (x, y) в результате поворота исходных осей на угол θ и проектирования исходных координат на оси x, y . Таким образом, имеем $x = OR - QR = x' \cos \theta - y' \sin \theta$.

В качестве альтернативного подхода отложим на оси x отрезок OS , такой, что $OS = x'$. Тогда $x = OS - QS = x' - QS$, что представляет собой интересное соотношение, так как слагаемое x' не имеет коэффициентов. В этом случае QS является горизонтальной проекцией отрезка PT , выражаемого в виде суммы отрезков $PV = y'$ (одной из исходных координат) и VT , просто равного $x' \operatorname{tg} \theta/2$. Следовательно, $x = x' - PT \sin \theta$,

$$\text{где } PT = y' + x' \operatorname{tg}(\theta/2).$$

Зная координату x , можем выразить y в виде суммы QV и VP . Таким образом, имеем

$$y = x \operatorname{tg} \theta/2 + PT.$$

Вспомогательный линейный сегмент PT , введение которого ускоряет выполнение рассматриваемой процедуры, является связующим звеном между исходными данными и искомым результатом и ниже обозначается T_9 . Таким образом, алгоритм, заменяющий общепринятое преобразование, имеет вид

$$T_9 = y' + x' \operatorname{tg} \theta/2,$$

$$x = x' - T_9 \sin \theta, \quad y = x \operatorname{tg} \theta/2 + T_9.$$

Данный метод, реализуемый в программе FHTSUB, требует наличия таблицы значений функции $\operatorname{tg}(\theta/2)$, которые, как было

отмечено в предыдущем разделе, могут быть также использованы для определения функции косинуса.

Вычисление тангенсов может быть осуществлено с помощью таблицы синусов посредством соотношения

$$\operatorname{tg} \theta/2 = \{1 - \sin[(\pi/2) - \theta]\} / \sin \theta.$$

Фрагмент программы, реализующий эту процедуру, имеет вид

```
9000 K=N4
9000 FOR I=1 TO N4
9000   T(I)=(1-S(K))/S(I)
9000   K=K-1
9000 NEXT I
```

где $S(\)$ – синус, а $T(\)$ – тангенс половинного угла.

Быстрая перестановка

Как отмечалось при анализе полосковой диаграммы для оценки затрат машинного времени, на процедуру перестановки может затрачиваться значительная доля времени при выполнении программы расчета спектров. Традиционный медленный алгоритм перестановки использует процедуру изменения порядка следования символов последовательности на обратный (см. разд. «Ячеистая структура перестановочной диаграммы» в гл. 7) и требует для его реализации число операций, пропорциональное $N(P-1)$. Следовательно, даже для длинных последовательностей данных доля времени, затрачиваемая на перестановку элементов, никогда не становится пренебрежимо малой. Процедуру перестановки целесообразно осуществлять и иллюстрировать с помощью кристаллической структуры, упомянутой выше при рассмотрении перестановочной диаграммы. Сначала определим координаты ячеек с помощью следующих равенств:

$$x_{\mu,v} = N_0 \mu + P_{N_0}(v), \quad y_{\mu,v} = N_0 v + P_{N_0}(\mu),$$

где N_0 – число ячеек, укладываемых вдоль одной координаты, ($N_0 = [N/(4 \text{ или } 8)]^{1/2}$ в зависимости от того, является ли величина P четной (семейство I) или нечетной (семейство II), а $P_N(i)$ – перестановочная функция для N элементов.

Так как общее число ячеек N_0^2 пропорционально N , время, затрачиваемое на вычисление координат ячеек, возможно, окажется просто пропорциональным N . Если должно быть удовлетворено именно данное требование, то доля P_{N_0} в суммарных затратах времени будет незначительной. Для асимптотической оценки сложности процедуры, предусматривающей подсчет числа операций в пределе для больших N , считается, что так как перестановка предполагает выполнение $(P-1)$ этапов для каждой из N операций, время вычисления для $x_{\mu,v}$ будет асимптотически стремиться к $N(P-1)$. Однако был предложен интересный способ преодоления этого не-

достатка. Так как N_0 становится все меньше по сравнению с N при его увеличении, время, затрачиваемое на определение $P_{N_0}(i)$, становится незначительным. При этом доминирующими окажутся затраты времени на выполнение последовательных операций сложения для установления $x_{\mu,v}$ и $y_{\mu,v}$.

После вычислений координат элементов одной ячейки всегда имеется 4 или 8 изменений соответствующих состояний, т.е. различных значений координат, так как число «атомов», содержащихся в одной ячейке, не увеличивается с ростом N , а принимает поочередно значения 4 и 8. Экспериментальная оценка фактических затрат времени подтверждает, что для геометрического подхода требуется время, пропорциональное N . Для диаграммы временных затрат (рис. 8.4), на которой используется нормировка времени относительно NP , «ширина» полос по вертикали убывает по закону P^{-1} до пренебрежимо малого значения.

Описанный здесь метод иллюстрируется в программе вычислений FASTPERMUTE, приведенной в приложении 1. В эту программу в качестве подпрограммы включен сегмент, реализующий перестановку элементов с целью получения $P_{N_0}(i)$; в прежние времена мы бы использовали термин *definitio in circulo*, теперь же мы употребим термин «уплотненная упаковка». Парадоксально, но факт: вся программа реализуется быстрее, чем ее отдельный сегмент. При этом можно представить себе рекуррентную процедуру в виде операции, осуществляющей перестановку элементов укороченной последовательности с дальнейшим уменьшением ее размеров. Вскоре окажется, что результирующая последовательность будет состоять из двух элементов, вследствие чего не потребуются дальнейшая перестановка элементов.

Преобразование для последовательностей с основанием 4 и другие модификации

С чисто иллюстративной целью рассмотрение было ограничено последовательностями длины N , где $N = 2, 4, 8, 16, \dots$; другими словами, N – это число 2, возведенное в степень P :

$$N = 2^P.$$

Однако возникает вопрос: какова специфика ситуации и что следует делать, когда последовательность состоит из 300 элементов? Возможно, следует исключить 44 элемента, чтобы уменьшить их общее число до 256. Можно также дополнить исходную последовательность 212 нулями, тогда число элементов результирующей последовательности окажется равным 512. Ясно, что на практике нецелесообразно оценивать время, затрачиваемое на реализацию процедур над искусственно удлиненными последовательностями; в результате обычно используются средства, реализующие удлинение исходных последовательностей дополнительными элементами и согласующиеся с операцией вида 2^P ; вычисления и отображения цифровых изображений рассчитаны на формат 512×512 либо на формат вида $2^{P_1} \times 2^{P_2}$.

Однако выбор некоторых средств не находится в наших руках; например, число строк телевизионного изображения колеблется между 512 и 1024, а в ряде случаев составляет всего 525. Вне нашего контроля находятся также временные ряды, возникающие в геофизических исследованиях, астрономические данные и другая информация естественного происхождения. Последовательность чисел солнечных пятен содержала в 1985 г. 286 членов, поскольку регистрация числа пятен началась в 1700 г., очень немного информации можно извлечь относительно N , и остается только ждать дальнейших результатов.

Если вернуться к обоснованию доводов в пользу выбора закона вида 2^p , то вспомним, что этот выбор был обусловлен принципом «разделяй и властвуй», посредством которого поэтапно уменьшалась длина последовательности, пока не осталось два элемента. В результате мы имели тривиальные двухэлементные преобразования, для которых затем выполнялась процедура их объединения, т.е. получения комбинированного преобразования. Ясно, что простейшим является также трехэлементное преобразование

$$(1/3) \sum_{\tau=0}^2 f(\tau) \cos(2\pi\tau/3);$$

диаграмма для этого преобразования, имеющая форму бабочки, приведена на рис. 8.8. Как показал Гаусс, любые факторы, сокращающие число элементов последовательности, позволяют уменьшить время, затрачиваемое на вычисление.

Разумеется, в случае когда число представляется не только степенью 2, требуются дополнительные операции умножения, однако имеет место экономия времени вычисления. Алгоритм, реализующий в пределе данную идею для ДПФ посредством представления величины N в виде

$$N = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} \dots,$$

где последовательно расположенные основания 2, 3, 5, 7, ... представляют собой ряд простых чисел, был усовершенствован С. Виноградом. Соответствующий материал рассматривается в литературе [C. S. Burrus, T. W. Parks. DFT/FFT Convolution Algorithms, Wiley Interscience, 1985.-(Алгоритмы свертки для ДПФ/БПФ)]. Этими авторами рассмотрены алгоритмы перестановки для оснований степеней, отличающихся от числа 2.

При использовании этих алгоритмов на практике, когда возникают затруднения в представлении числа N , его часто все-таки можно представить в наиболее удобной и эффективной с точки зрения скорости реализации алгоритмов форме. Если мы потребуем представления N в виде 4^p , что представляет собой четную величину, принадлежащую к более узкому классу, нежели класс четных значений вида 2^p , то при этом будут использованы преимущества в скорости реализации алгоритма. Для 4-элементного ДПХ коэффициенты передачи (весовые коэффициенты усиления) равны 1 или

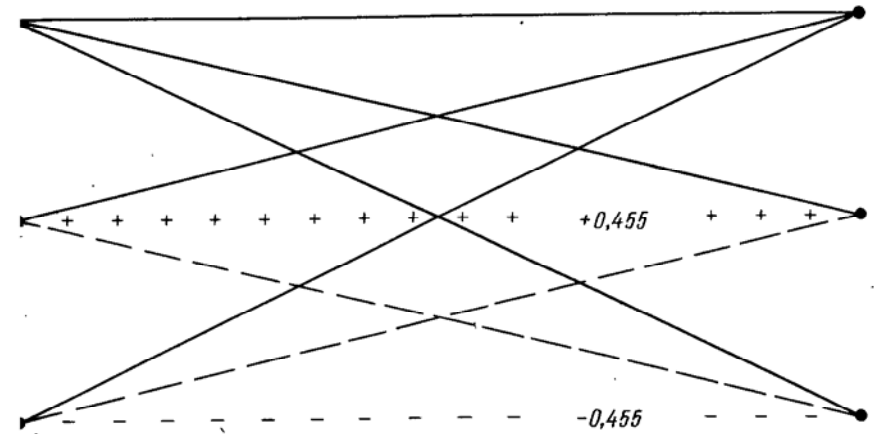


Рис. 8.8. Диаграмма в форме бабочки для 3-элементного ДПХ. Сплошные линии представляют коэффициент передачи, равный $1/3$; штриховые линии используются для обозначения коэффициента передачи $(\sqrt{3}-1)/6 = 0,122$, а остальные линии — для обозначения коэффициентов передачи $\pm(\sqrt{3}-11)/6 = \pm 0,455$.

-1 , что не влечет за собой операций умножения: аналогичное упрощение характерно и для диаграммы в форме бабочки при $N = 4^p$. При этом уменьшение длины исходной последовательности прекращается при получении 4-элементных подпоследовательностей, в результате чего существенно сокращается общее число операций умножения, для типового случая приблизительно на одну треть. Следовательно, преобразование для основания степени 4 даст заметные преимущества. Программа вычислений FHTRX 4 представлена в приложении 1.

Ранее применявшиеся подходы к преобразованию вещественных данных

Когда данные вещественные, а не комплексные, что обычно и имеет место, БПФ оказывается неэффективным методом преобразования, так как в принципе оно предназначено для комплексных исходных данных. С другой стороны, если мы находимся в области прямого преобразования, манипулирующего комплексными коэффициентами, и хотим выполнить обратный переход в область вещественных данных, то БПФ оказывается идеальным инструментом обработки исходных данных. Однако обращение к БПФ лишь с целью получения вещественных данных, в то время как это преобразование обладает способностью формирования комплексной функции, означает использование алгоритма, который «слишком хорош» для данной задачи и поэтому по-прежнему неэффективен, но уже с другой точки зрения.

Может быть использован ряд методов с целью усовершенст

ния БПФ при его применении для спектрального анализа вещественных данных. Если мы предполагаем осуществить переход в область прямого преобразования и остаться в ней, что имеет место при вычислении и отображении спектров мощностей, реализуемых, например, в коммерческих спектрометрах, то один из способов увеличения быстродействия БПФ состоит в исключении переменных, представляющих несуществующую мнимую исходную функцию. Подобный усеченный алгоритм, разумеется, уже не является преобразованием Фурье (поскольку для него не имеет силы свойство взаимной однозначности отображения), однако при прочих равных условиях на его реализацию требуется такое же время, как и на ДПХ.

Если предполагается осуществить переход в область прямого преобразования, реализовать при этом такие операции, как фильтрация, свертка или другие методы обработки сигналов, а затем выполнить обратный переход в область вещественных данных, то усеченный алгоритм непригоден, так как теперь исходные данные являются комплексными. Однако может быть предложен другой алгоритм, использующий в качестве исходной функции комплексные данные и формирующий в результате только вещественные данные. Следовательно, осуществляя запись в память ЭВМ этих двух частных алгоритмов, каждый из которых является соответствующим модифицированным вариантом БПФ, можно достичь скорости вычислений, сравнимой со скоростью БПХ. Этот подход является общепринятым при разработке математического обеспечения коммерческого характера.

По сравнению с БПХ описанная выше процедура требует ячеек памяти ЭВМ для двух разных преобразований. Пользователь, кроме того, должен следить за тем, какой алгоритм должен быть использован, а процедура записи соответствующих массивов должна быть организована с учетом вещественных и мнимых переменных, так как оба преобразования оперируют комплексными величинами. Результаты оказываются вполне приемлемыми для пользователей программ долговременного хранения, но для специалистов, заинтересованных в модификации, обслуживании этих программ или включении их в состав более крупных программ, соответствующие процедуры оказываются неудобными и громоздкими. Однако были использованы и другие подходы.

Последовательность вещественных данных

$\{abcdefgh\}$

в компактной форме может быть представлена в виде комплексной последовательности с меньшим числом элементов

$\{a + ib \ c + id \ e + if \ g + ih\}$,

к которой может быть применено БПФ с целью получения преобразования $\{\alpha + i\beta \ \gamma + i\delta \ \varepsilon + i\zeta \ \eta + i\theta\}$. Теперь можно вычислить четную и нечетную компоненты последовательностей $\{\alpha \ \gamma \ \varepsilon \ \eta\}$ и $\{\beta \ \delta \ \zeta \ \theta\}$ и объединить их с учетом соответствующих коэффициентов, преду-

смотренных теоремой о сдвиге и фигурирующих в искомом БПФ $\{A \ B + iB' \ C + iC' \ D + iD' \ E \ D - iD' \ C - iC' \ B - iB'\}$.

Из этого представления ясно, что увеличение скорости выполнения преобразования обусловлено применением 4-элементного БПФ вместо неэффективного 8-элементного БПФ. При необходимости возврата из области преобразования может быть достигнута такая же экономия. В данном случае мы осуществляем усечение 8-элементной последовательности, а именно уменьшение числа ее элементов до четырех, что, как очевидно, может быть достаточным для определения 8-элементного преобразования. Все, кроме одного из оставшихся коэффициентов, можно полагать комплексно сопряженными другим коэффициентам последовательности. Пятый элемент E можно считать вещественным; поэтому он может быть представлен в совокупности с первым элементом, который также всегда является вещественным. Усеченное представление имеет вид $\{A + iE \ B + iB' \ C + iC' \ D + iD'\}$. В результате обратного БПФ получается 4-элементная комплексная последовательность, из которой после дальнейших манипуляций может быть получена 8-элементная вещественная последовательность. Соответствующие программы в доступной форме приводятся в литературе [Programs for Digital Signal Processing, IEEE Press, 1979.-(Программы вычислений для цифровой обработки сигналов)].

Эти оригинальные методы и результаты прошлых лет были вытеснены преобразованием Хартли, которое в явном виде исключает применение комплексных процедур и позволяет использовать одну и ту же программу вычислений как при анализе в области прямого преобразования, так и при обратном переходе в область исходных данных. Когда требуются комплексные числа, они формируются на последнем этапе решения задачи. Интересно отметить, что вещественная и мнимая части в явном виде требуются только в ряде задач. Они обычно используются на промежуточных этапах получения окончательного результата, так как логика рассуждений оказывается в выигрыше из-за преимуществ процедур комплексного анализа. В соответствии со сказанным спектр мощности часто понимается как сумма квадратов вещественной и мнимой частей. Однако если бы в вычислениях мы оперировали вещественными данными с использованием вещественных процедур, то не было бы необходимости перехода к вещественным и комплексным компонентам для получения спектра мощности, так как результат может быть получен вообще без использования комплексной плоскости. Таким образом, исходя из ДПХ $H(v)$, непосредственно получим спектр мощности $P(v)$ из соотношения

$$P(v) = [H(v)]^2 + [H(N - v)]^2.$$

Аналогичный подход применим к фазе $\phi(v)$, которая обычно определяется как отношение мнимой и вещественной частей, но в равной степени она может быть выражена через четную и нечетную состав-

ляющие чисто вещественного преобразования Хартли. Таким образом,
 $\varphi(v) = \text{arctg} \{ [H(N-v) - H(v)] / [H(v) + H(N-v)] \}$.

Задачи

- 8.1. *Формула секанса.* Получить соотношение $(1/2) \sec(\beta/2) = (2 + 2/\sec \beta)^{-1/2}$ из формулы для длины хорды, стягивающей дугу, равную половине исходного центрального угла: $ch(\theta/2) = [2 - ch(\pi - \theta)]^{1/2}$.
- 8.2. *Быстрый алгоритм определения секанса.* а) Показать, что корень квадратный величины x , близкой к единице, с высокой степенью точности определяется из выражения $x^{1/2} = (2a + 1)/(2a - 1)$, где $a = (x + 1)/(x - 1)$.
 б) Применить это правило к величине $x = 2$, являющейся только грубым приближением к единице, для доказательства того, что при этом достигается 1%-ная точность.
 в) Показать, что, исходя из приближенного равенства Бьюнемана для секанса

$$(1/2) \sec \beta/2 = 0,7001 - \frac{0,16016004}{0,3004 + (1/2) \sec \beta}$$
 неправочный коэффициент $(1/2) \sec \beta/2$ для $\beta \leq 11,25^\circ$ может быть вычислен с точностью до восьмого десятичного знака.
- 8.3. *Тождество для поворота системы координат.* Показать, что тождество $\text{tg } \theta/2 = (1 - \cos \theta)/\sin \theta$ может иметь геометрическую интерпретацию.
- 8.4. *Алгоритм поворота Бьюнемана.* Получить алгоритм Бьюнемана непосредственно из формулы преобразования координат $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$.
- 8.5. *Теорема Птолемея.* Доказать теорему Птолемея.
- 8.6. *Формула для разности аргументов.* Вывести тригонометрическую формулу $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ из теоремы Птолемея.
- 8.7. *Деление аргумента на три равные части.* Использовать тождество для величины $ch(\alpha + \beta)$ при ее представлении в виде $ch(2\alpha + \alpha)$ для доказательства того, что величина $ch(1/2)^\circ$ может быть получена из значения $ch(3/2)^\circ$ для утросенного аргумента по формуле $ch(1/2)^\circ = (1/3)ch(3/2)^\circ + (4/81)ch^3(3/2)^\circ$.
- 8.8. *Обратная перестановка.* Какой вид имеет матрица размерности 8×8 , обратная матрице перестановки P_8 ?
- 8.9. *О применении систем счисления.* Показать, каким образом Клавдий Птолемей мог составить тригонометрические таблицы с точностью до пятого десятичного знака более тысячелетия тому назад, прежде чем нашла применение десятичная система счисления.

Глава 9

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ В ОПТИКЕ

Если вы разрушите Логополис, то полностью раскроете причинную связь.

Доктор Ху

Изображения могут быть подвергнуты цифровой обработке на ЭВМ, однако существуют и аналоговые методы обработки. Действительно, прежде чем изображение внешнего объекта поступит в ЭВМ, оно подвергнется обработке аналоговыми оптическими системами, которые могут выполнять такие функции, как низкочастотная фильтрация и улучшение четкости и контрастности. Обычно эти операции оптической обработки рассматриваются с использованием двумерного преобразования Фурье, однако теперь мы знаем, что каждому применению преобразования Фурье соответствует применение преобразования Хартли, поэтому представляет интерес вопрос: применимо ли двумерное преобразование Хартли к оптической обработке сигнала? В этой главе мы покажем, что ответ на данный вопрос однозначно утвердительно.

В качестве комментария исторического характера можно отметить, что, хотя работы Хартли были опубликованы в связи с исследованием систем телефонной связи, сам автор выполнил ряд исследований в области оптики. В самом деле, концепция Габора относительно измерения информации в световых лучах [*D. Gabor. Light and Information, in Progress in Optics, ed. E. Wolf, vol. I, North-Holland, 1961, pp. 109-153.* (Свет и информация в сб. «Прогресс в оптике»)] непосредственно восходит к закону Хартли, который заключает в себе открытие, а именно: количество информации, передаваемой по линии телефонной связи, пропорционально произведению полосы пропускания канала связи на длительность передачи. В настоящее время представляется очевидным, что этот закон заложил основы закона Шеннона, который дополнен вероятностью появления символа. Это в конечном счете привело к мере Габора для количества информации, содержащейся в световом луче.

Целесообразность преобразования Хартли в оптике

За исключением общих аспектов применения преобразования Хартли для вычислений, в явном виде неочевидны его роль и место среди методов аналоговой обработки. Все же именно преобразование Фурье, а не другие типы преобразований является инструментом анализа многих явлений природы, например действия линзы в обеих

ее фокальных плоскостях. Объект, расположенный в передней фокальной плоскости и облучаемый когерентным источником, формирует в другой фокальной плоскости преобразование Фурье, а не преобразование Хартли. Таким образом, для любого вещественного сигнала «на входе» его изображение в фокальной плоскости обладает двойной сопряженной аксиальной симметрией (т.е. поле в любой точке является комплексно сопряженным полю по другую сторону оптической оси на таком же расстоянии). Преобразование Хартли в общем случае не обладает такими особыми свойствами.

Разумеется, линзы не формируют, строго говоря, преобразование Фурье, так как комплексные числа – изобретение человеческого разума, а не свойство физического мира. Точнее следовало бы принять допущение о том, что поля в так называемой плоскости Фурье являются вещественными. В любом случае, когда для описания реальной ситуации используются комплексные числа, при математическом представлении соответствующего физического состояния мы приходим именно к преобразованию Фурье.

Несмотря на то что преобразование Фурье является удачным средством описания операций, реализуемых линзами, тем не менее некоторые свойства этого преобразования, являются причиной ряда неудобств. Например, существенная доля информации заключена в фазе поля, однако существующие оптические датчики восприимчивы только к интенсивности поля оптического излучения, но не к его фазе. Таким образом, результаты фоторегистрации в плоскости преобразования Фурье не содержат информации о фазе, что может оказаться очень важным. С другой стороны, непосредственная регистрация квадрата модуля преобразования Хартли обеспечила бы гораздо более ценную информацию. Когда преобразование неотрицательно, знания функции $|H(u, v)|^2$ достаточно для полного восстановления $f(x, y)$; в других ситуациях в плоскости (u, v) имеются области, в пределах которых $H(u, v)$ отрицательно, и знание величины $|H(u, v)|^2$ само по себе не определяет знак. Однако неопределенность в знаке – гораздо менее серьезный недостаток, чем отсутствие информации о фазе, и этот изъян часто можно устранить простым способом.

Так как оперирование понятием вещественного поля имеет преимущества, целесообразно поставить вопрос: каким образом можно построить оптическую систему, формирующую преобразование Хартли данного объекта?

Свойства симметрии

Преобразование Хартли $H(u, v)$ равно разности вещественной и мнимой частей преобразования Фурье $F(u, v)$. Пусть

$$F(u, v) = F_r(u, v) + iF_i(u, v).$$

Тогда

$$H(u, v) = F_r(u, v) - F_i(u, v),$$

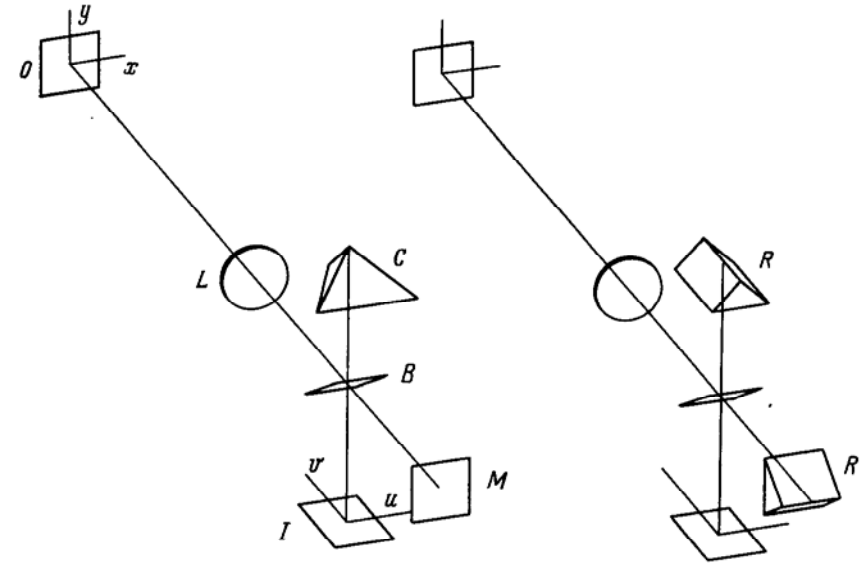


Рис. 9.1. Интерферометр Майкельсона, в котором осуществляется поворот одного пучка на угол π с помощью призмы в форме тетраэдра с его последующей интерференцией с исходным пучком. O – плоскость объекта, L – линза, B – расщепитель пучка, M – плоское зеркало в виде четвертьволновой пластины, I – плоскость изображения.

Рис. 9.2. Интерферометр с трехгранными призмами, обеспечивающий рекомбинацию компонент расщепленного пучка с поворотом относительно друг друга.

где

$$F_r(u, v) = (1/2)[F(u, v) + F(-u, -v)],$$

$$iF_i(u, v) = (1/2)[F(u, v) - F(-u, -v)].$$

Сначала возникает вопрос: каким образом можно сформировать $F_r(u, v)$? Один из методов решения заключается в расщеплении поля в плоскости преобразования Фурье на две равные компоненты, одна из которых повернута вокруг оптической оси относительно другой компоненты на угол π (в результате чего формируется $F(-u, -v)$, и последующем объединении этих компонент.

Соответствующая процедура может быть реализована с помощью интерферометра Майкельсона, в одном плече которого установлена призма в форме тетраэдра, а в другом – плоское зеркало на расстоянии, равном расстоянию до вершины призмы (рис. 9.1). В другом варианте в каждом плече интерферометра можно установить трехгранные призмы, ребра которых образуют с оптической осью ортогональную систему (рис. 9.2). Одна призма инвертирует поле относительно оси, параллельной ребрам, а другая – относительно перпендикулярной ей оси, чем достигается требуемый поворот на угол π .

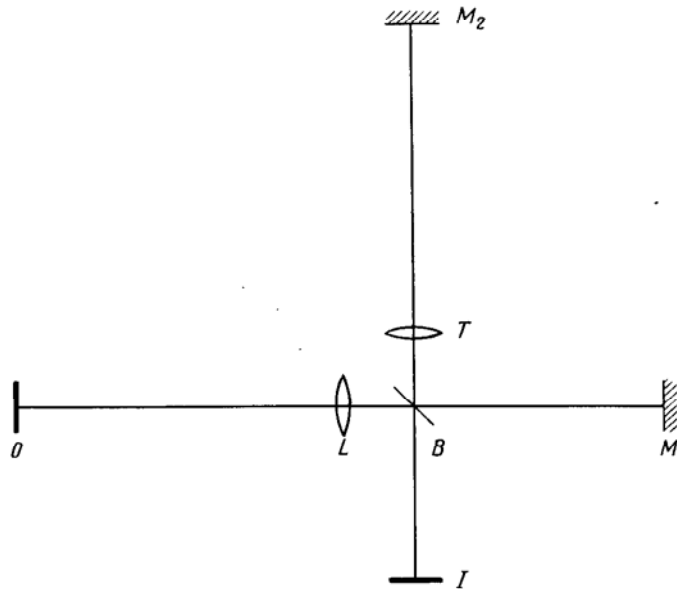


Рис. 9.3. Интерферометр, использующий вращение пучка, имеющее место в телескопе.

Призма в форме тетраэдра осуществляет этот поворот в одном плече в результате трех отражений. Результирующее совокупное изображение окажется обратным, т. е. перевернутым по отношению к изображению, получаемому с помощью системы трехгранных призм, и эта характерная черта должна приниматься во внимание при построении оптических систем. Оптическая система третьего типа, показанная на рис. 9.3, может использовать вращение пучка, имеющее место в телескопе.

Для формирования компоненты $F_i(u, v)$ могут быть использованы те же устройства с той лишь разницей, что в одном плече интерферометра должно осуществляться изменение знака на обратный. Применяемый для этого монохроматический метод заключается в получении разности хода волн в полволны с помощью установленных в каждом плече фазосдвигающих пластин с фазовым сдвигом $\pi/2$, в результате чего полный сдвиг фазы равен π , а значит, имеет место изменение знака на обратный. Может использоваться покрытие отражающей поверхности оптического элемента слоем, реализующим фазовый сдвиг $\pi/2$, что осуществляется только для одного плеча. Еще один способ — изменение геометрического положения одного из отражателей на четверть длины волны.

Осуществление преобразования Хартли, использующее поляризацию

Вышеприведенный анализ был посвящен отдельному формированию F_r или F_i с помощью разных оптических систем. Для того чтобы одновременно получить компоненты F_r и F_i , разность которых используется для непосредственного определения преобразования Хартли, можно осуществлять облучение объекта линейно-поляризованным светом, для которого направление вектора напряженности электрического поля совпадает с диагональю плоскости x, y . Тогда горизонтально- и вертикально-поляризованные компоненты поля будут изменяться идентичным образом при прохождении через равноплечую систему трехгранных призм, и в результате этого, как и ранее, сформируются одинаковые компоненты F_r . Тогда если в одном из плеч установить соответствующим образом ориентированную четвертьволновую пластину, то для компонент с ортогональной поляризацией возникает разность хода, равная половине длины волны излучения (с учетом прохождения волны в прямом и обратном направлениях). В результате в выходной плоскости, т. е. в плоскости преобразования будет сформирована компонента F_r для составляющей с одной поляризацией и F_i для другой поляризации. Колебание, соответствующее диагональному направлению в плоскости (u, v) , будет представлять собой либо преобразование Хартли $F_r - F_i$, либо (в зависимости от условий) $F_r + F_i$, которое представляет то же преобразование, повернутое на пол-оборота в плоскости u, v . Преобразование может быть отображено с помощью соответствующим образом ориентированного анализатора.

Изначально представленное именно в таком виде устройство, формирующее преобразование Хартли, имеет более простую форму реализации, описанную в литературе [R. N. Bracewell, H. Bartelt, A. W. Lohmann, N. Streibl, Optical Synthesis of Hartley Transform, Applied Optics, 24, pp. 1401–1402, 1985. (Р. Брейсуэлл и др. Оптический синтез преобразования Хартли)].

Практическое осуществление

Вместо двумерного преобразования Хартли, представляемого в виде разности вещественной и комплексной составляющих преобразования Фурье, можно манипулировать этим определением несколько иным способом, который приводит к упрощенным оптическим системам, что выполняется следующим образом. Вспоминая о том, что

$$\sqrt{2} \cos [x - (\pi/4)] = \cos x + \sin x = \text{cas } x,$$

можно записать преобразование Хартли в виде

$$H(u, v) = \sqrt{2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cos [2\pi(ux + vy) - \pi/4] dx dy.$$

Полагая эту форму записи отправной точкой дальнейших рассуждений, следует заметить, что преобразование Хартли может быть синтезировано из двух преобразований Фурье с соответствующими фазовыми множителями:

$$H(u, v) = \sqrt{2} \iint_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} f(x, y) (1/2) \{ \exp [2\pi i (ux + vy) - i\pi/4] + \exp [-2\pi i (ux + vy) + i\pi/4] \} dx dy = (1/\sqrt{2}) \exp [-i\pi/4] F(-u, -v) + (1/\sqrt{2}) \exp [i\pi/4] F(u, v) = \{ \exp [i\pi/4] / \sqrt{2} \} \{ F(u, v) + \exp [-i\pi/2] F(-u, -v) \}.$$

Однако появление постоянного фазового множителя $\exp [i\pi/4]$ связано только с выбором начала отсчета времени. Следовательно, комбинацию вышеприведенных преобразований Фурье можно получить с помощью интерферометра Майкельсона, в одном плече которого устанавливается призма в форме тетраэдра, осуществляющая «поворот» поля $F(u, v)$ на угол π с целью формирования $F(-u, -v)$. В другом плече интерферометра может быть установлено плоское зеркало на расстоянии от расщепителя пучка, равном расстоянию до вершины призмы в форме тетраэдра, как на рис. 9.1. С другой стороны, могут применяться системы двух трехгранных призм (рис. 9.2), телескопические системы (рис. 9.3), а также другие структуры, включающие призмы Дове или интерферометр типа Маха-Цендера.

В результате формирования комбинации волновых полей с относительным поворотом π в одно плечо интерферометра должен быть введен фазовый множитель $\exp [-i\pi/2]$. Один из способов реализации этой процедуры заключается в использовании фазосдвигающей пластины, а другой – в геометрическом смещении одного из зеркал на расстояние, равное одной восьмой длины волны. Казалось бы, ни один из способов регулировки не влияет на характер этих процедур, но получаемый эффект характеризуется глубокими различиями. Если источник, расположенный в плоскости объекта, является когерентным, то соответствующее устройство реализует требуемое преобразование Хартли, а фотопластинка обеспечивает регистрацию квадрата модуля преобразования Хартли.

Источник некогерентного излучения

На практике источники когерентного излучения далеко не являются единственными, и поэтому представляет интерес возможность построения преобразования Хартли в случае некогерентного источника, при котором происходит наложение распределений интенсивностей и устойчивое смещение. Рассмотрим элемент некоторого некогерентного источника с координатами x_0, y_0 на плоскости x, y . Этот элемент обуславливает формирование в плоскости преобразо-

вания интерференционной картины с интенсивностью, пропорциональной

$$1 + \cos [4\pi(x_0 u + y_0 v) - \varphi],$$

где φ – разность фаз в двух плечах интерферометра. Так как для некогерентного источника выполняется условие аддитивности интенсивностей, можно сложить все интерференционные картины от различных элементов этого источника для получения полной интенсивности I_{out} , определяемой интегралом

$$I_{out} = \iint_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} I_{in}(x, y) dx dy + \iint_{-\infty - \infty}^{\infty \infty} I_{in}(x, y) \cos [4\pi(ux + vy) - \varphi] dx dy.$$

При правильном выборе φ вновь получается преобразование Хартли, причем в этом случае имеет место наложение распределения интенсивностей объекта и устойчивое смещение. Интересной особенностью смещения является то, что оно автоматически устраняет неопределенность знака преобразования Хартли.

Система, реализующая преобразование Хартли, может быть многокаскадной для целей обработки сигналов. С другой стороны, если установить зеркало в плоскости преобразования, то преобразователь Хартли может быть использован для выполнения обратной процедуры. Фильтр, расположенный в плоскости преобразования (либо в передающем канале, либо в тракте отражения), позволяет осуществить операцию свертки по аналогии со случаями, когда функция, осуществляющая свертку, является четной.

Пример

На рис. 9.4 показан транспарант с ограниченным пятном гауссовской формы с координатами X, Y в первом квадранте плоскости. Передаточные характеристики объекта математически можно описать формулой

$$f(x, y) = \exp \{ -\pi[(x - X)^2/A^2 + (y - Y)^2/B^2] \},$$

где A и B – эквивалентная ширина вдоль осей x и y . След пятна представляется одним контуром на уровне $+0,125$. Для справки отметим, что соответствующее преобразование Хартли имеет вид

$$H(u, v) = AB \cos [-2\pi(Xu + Yv)] \exp [-\pi(A^2 u^2 + B^2 v^2)],$$

а преобразование Фурье есть

$$F(u, v) = AB \exp [-i2\pi(Xu + Yv)] \exp [-\pi(A^2 u^2 + B^2 v^2)].$$

Для вещественной и мнимой составляющих преобразования Фурье

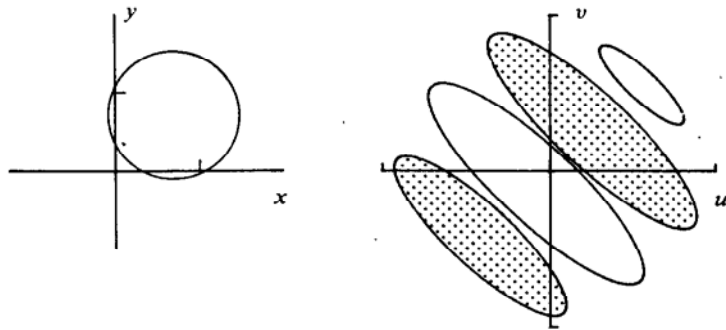


Рис. 9.4. Транспарант (слева) и распределение значений в плоскости преобразования Хартли (справа), представленное в виде контуров на уровне $\pm 0,125$ относительно пикового значения преобразования. Этими контурными линиями двух видов разделяются только четыре области.

имеем

$$F_r(u, v) = AB \cos [2\pi(Xu + Yv)] \exp [-\pi(A^2u^2 + B^2v^2)],$$

$$F_i(u, v) = -AB \sin [2\pi(Xu + Yv)] \exp [-\pi(A^2u^2 + B^2v^2)].$$

Преобразование Хартли $H(u, v)$ представляется в плоскости u, v в виде контуров, изображенных на уровнях $\pm AB/8$. Фаза поля одинакова в пределах всей плоскости u, v (для поляризации, выделяемой анализатором), за исключением заштрихованных участков, в которых значения отрицательны. Напротив, фаза преобразования Фурье в пределах того же самого поля непрерывно изменяется на величину, соответствующую почти трем полным оборотам.

В общем случае, однако, нулевые контуры в плоскости u, v разделяют области положительных и отрицательных значений преобразования Хартли, так что проблема неопределенности знака, существующая при регистрации поля, например на фотопластинке, и ее решение часто достаточно очевидны. Справедливо утверждение, что объекты, симметричные относительно оптической оси, в ряде частных случаев могут дать геометрическое место нулевого уровня, для которого отсутствует изменение знака, однако возникающая при этом неоднозначность может быть устранена нарушением симметрии путем смещения объекта. Тем не менее знак преобразования легко определить. Один из способов идентификации областей с отрицательным знаком преобразования заключается в применении малой апертуры с координатами $x = 0, y = 0$, открытой до размеров, обеспечивающих пропускание слабой изофазной опорной волны; при этом интенсивность поля будет возрастать в области положительных значений преобразования, а характерным признаком области отрицательных значений поля будет низкая интенсивность поля. Изофазный опорный пучок излучения низкого уровня с временной модуляцией, например веерообразный пучок, позволяет идентифицировать

области отрицательных значений посредством временной модуляции, наблюдаемой в плоскости преобразования; в области отрицательных значений закон временной модуляции интенсивности находится в противофазе по отношению к области их положительных значений. С целью реализации вспомогательной процедуры определения знака может также использоваться переключение опорного пучка. Опорный пучок, изменяющий положение при смене экспозиций, может быть использован в кинематографии при съемках движущихся объектов.

Интересно отметить, что явление суперпозиции для опорного излучения с нулевой фазой и начальными координатами $x = 0, y = 0$ может иметь более широкое применение, чем «средство диагностики», т. е. идентификации знака; в ряде случаев такое излучение можно использовать для «смещения» некоторых или всех областей отрицательных значений в область соответствующих положительных значений.

Голография в плоскости Хартли

Естественно, можно осуществить запись сложного поля голографическими методами. Хотя голографическая обработка несколько сложнее простой фоторегистрации в фокальной плоскости, тем не менее методы голографии также могут быть применены к плоскости изображения Хартли. Голограмма реального объекта, получаемая на основе метода Хартли, будет отличаться от обычной голограммы тем, что положение интерференционных полос и прозрачных участков в основном будет определяться длиной пути до источника опорного пучка, а не одновременно расстоянием до этого источника и фазой излучения в плоскости преобразования; естественно, на границах областей отрицательных значений преобразования будут иметь место разрывы и резкие переходы. Для частного случая изофазного опорного пучка, формируемого, в частности, в исходной точке в плоскости объекта, голограмма оказывается особенно простой. Суть данной процедуры формирования аналогична упомянутому в предыдущем разделе методом «смещения» областей отрицательных значений, но опорное излучение теперь достаточно интенсивно по сравнению с значениями преобразования Хартли, что в принципе характерно для опорного пучка в голографии. Этот новый тип голограмм более удобен для их формирования, воспроизведения, перемещения и транспортировки, чем голограммы, имеющие контуры тонкой структуры с субмикронными расстояниями между элементами, так как они воспроизводятся более грубо. Это явление вынуждает заниматься выбором структуры объекта, а не длины волны излучения.

Замена реального (вещественного) объекта комплексным для одной и той же оптической системы приводит к получению голограммы более общего характера, содержащей тонкую структуру, наблюдаемую в обычных голограммах. Однако если голограмма

может быть сформирована для реального объекта, то же самое можно выполнить для «мнимого объекта»; таким образом, имеется способ представления комплексного объекта с помощью пары частных голограмм. Реализация этой процедуры потребует поворота изображения и суперпозиции вида, описанного выше для плоскости преобразования Хартли, с целью формирования вещественной и мнимой компонент комплексного объекта. Одним из преимуществ оперирования вещественными полями является то, что фоторегистрация, не учитывающая фазовых соотношений, может заключать в себе всю информацию. Это справедливо для электронно-лучевых трубок, фотоумножителей, инфракрасных детекторов и многих других датчиков, которые в отличие от радиоприемных устройств не реагируют на фазу излучения.

Приложение 1 ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ

Кто вдруг, напившись, одержал победу,
Тот только по-латыни изъясняться б
стал.

Дж. Чосер

Данное приложение содержит ряд оригинальных программ общего назначения, снабженных поэтому большим числом поясняющих комментариев и замечаний, которым предшествует знак «!». При воспроизведении этих программ пользователь может опустить любую строку-комментарий или любую часть строки, расположенную после знака «!». Данные программы написаны на удобочитаемом языке БЕЙСИК и предназначены для пользователей, которые в принципе будут приспосабливать их для собственных нужд. Для этой группы пользователей представляется более простым переход (трансляция) с БЕЙСИКа на язык ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ, СИ.

С целью обеспечения наглядности программам была использована нумерация строк, например для нумерации подпрограмм применяются числа, кратные 1000. Таким образом, одним и тем же подпрограммам, используемым в разных программах, могут быть присвоены кодовые признаки в виде порядкового номера строки. Поэтому можно исключить процедуру вызова подпрограммы и связанного с ней списка параметров, однако при этом предполагается, что пользователи, часто использующие одну и ту же подпрограмму, должны применять в составе главной программы набор команд CALL. Для небольшого числа представляемых здесь коротких программ не предусматривается использование команд CALL. Все приведенные программы структурно в явном виде содержат преамбулу, главную программу, используемые данные и подпрограммы. Команды GOTO используются только в тех случаях, когда они обладают приоритетом, а циклы FOR-NEXT выделены в виде блоков по отношению к другим командам. Алгебраические символы, как это принято, выделены курсивом и используются в описаниях массивов (DIM), а также при необходимости подстановки численных значений.

Каждая программа дополнена выборками результатов вывода данных на терминал и примечаниями; при этом для облегчения изучения программ особое внимание уделяется наглядности их представления.

Характерные признаки языка

Достоинства языка БЕЙСИК заключаются в том, что его совершенствование обусловлено конкуренцией фирм-разработчиков программного обеспечения ЭВМ для удовлетворения потребностей студентов и владельцев персональных компьютеров. В результате в настоящее время этот язык имеет свободное толкование и, не будучи втиснутым в жесткие рамки стандартизации, оказывается в состоянии удовлетворять жестким требованиям. Лучшие свойства этого языка получили широкое распространение в промышленности. Это динамичное развитие подтверждает, что отдельные достижения должны широко рекламироваться. Для приведенных ниже программ можно выделить следующие условные обозначения.

Знак «!» не является командой для ЭВМ. REM может его заменять, однако использование одного символа предпочтительно при составлении программ, так как он может быть легко помещен в строку-пробел и удален из нее.

Знак @ – разделитель операторов, позволяющий разместить в строке с одним и тем же номером более одного оператора. Использование этого символа экономит место при составлении программы, делает ее более наглядной и увеличивает быстродействие в реализации некоторых операций. Обычно может применяться последовательная запись отдельных операторов в виде следующих друг за другом строк. Однако удобство этого символа состоит в использовании условных операторов в естественной форме без скобок и повтора:

```
999 IF B > A THEN C = 2@ D = D/10.
```

Если условие $B > A$ не выполняется, то, естественно, C не полагается равным 2, однако также и D не приводится к $1/10$, нужно непосредственно перейти к выполнению процедуры, реализуемой в строке со следующим порядковым номером.

Используются следующие обозначения: $A \dots Z$, $A0 \dots Z9$ – для переменных, $A() \dots Z(9)()$ и $A(,) \dots Z9(,)$ – для переменных массивов, $A\$ \dots Z9\$$ – для переменных последовательностей. Массивы последовательностей $A\$()$ в данных программах отсутствуют.

Так как интервалы в языке БЕЙСИК не учитываются, блок циклов FOR – NEXT используется только для наглядности представления и нет необходимости сохранять его при переписывании.

Функция $VAL\$(X)$ – это выражение для последовательности, соответствующее численному значению переменной X .

Введение в программы

FHTBAS – программа для алгоритма быстрого преобразования Хартли, обеспечивающая определение дискретного преобразования Фурье и вывод на печать комплексного результата наряду с ДПХ, из которого получается ДПФ. Она приводится в связи с обсуждением в тексте различных подпрограмм.

FHTSUB – частный быстрый алгоритм, представляемый в форме подпрограммы, которая может быть включена в программу общего назначения. Этот алгоритм позволяет определить ДПХ вещественной последовательности. Данная программа представлена в сжатой форме и быстрее осуществляет выполнение ее составных частей, чем путем перехода к подпрограммам в пределах большой подпрограммы. Однако нумерация ее строк продолжает нумерацию строк программы FHTBAS, так что при необходимости может быть восстановлена вся структура алгоритма. Для тригонометрических функций и для операции перестановки используются более сложные методы, что увеличивает время счета. Встроенный алгоритм снижает требования к памяти ЭВМ и позволяет получить результаты для больших N . В общем случае применимы методы, используемые для табулированных функций и базирующиеся на работе [O. Buneman. Conversion of FFT's to Fast Hartley Transforms, SIAM J. Sci. Statist. Comp., 1985 (Переход от БПФ к быстрому преобразованию Хартли)]. Метод перестановки описан Эвансом. Соответствующие программы на языке ФОРТРАН можно найти в работе [Z. Wang. Fast Algorithms for the Discrete W Transform and for the Discrete Fourier Transform, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-32, pp. 803–816, 1984 (Быстрые алгоритмы для дискретного преобразования Винограда и дискретного преобразования Фурье)] и (в том числе для основания 4) в статье [H. V. Sorensen, D. L. Jones, S. C. Burrus, M. T. Heideman. On Computing the Discrete Hartley Transform, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985 (О вычислении дискретного преобразования Хартли) в печати].

FHTPS вычисляет спектр мощности вещественной последовательности с помощью ДПХ и иллюстрирует использование FHTSUB в качестве подпрограммы, входящей в частную программу. Дается подпрограмма для сглаживания спектров мощности. Спектр мощности получается без использования преобразования Фурье.

CONV вычисляет обычную свертку $f_1 * f_2$. Для вычисления обычной взаимной корреляционной функции последовательностей f_1 и f_2 выполняется реверсирование f_1 .

CCONV вычисляет циклическую свертку $f_1 \otimes f_2$. Для циклической взаимной корреляционной функции осуществляется реверсирование f_1 .

MATCON выполняет в компактной форме процедуру свертки путем умножения матриц.

ACF реализует вычисление корреляционной функции.

SACF реализует вычисление циклической корреляционной функции.

ICONV осуществляет обращение свертки.

RECIP инвертирует вещественную последовательность для получения обратной ее последовательности, которая при выполнении свертки с заданной последовательностью дает $\{1\}$.

ICORR осуществляет обращение корреляционной функции, что дает исходную последовательность при заданной корреляционной функции.

FHTCONV выполняет свертку при операции умножения в области преобразования.

FHTACF вычисляет корреляционную функцию при операции умножения в области преобразования.

FHTRX4 является вариантом ДПХ для основания 4.

FASTPERMUTE реализует перестановку элементов последовательности с числом элементов N с помощью программы с меньшим быстродействием, осуществляющей перестановку элементов последовательности $N_0 < N$, где N_0 – число ячеек вдоль одной оси координат, а также шаг решетки в ячейке.

FHTBAS.FOR – версия на языке ФОРТРАН программы FHTBAS, написанной на БЕЙСИКе. Переход от программ, написанных на языке БЕЙСИК, к программам на языке ФОРТРАН, оказывается достаточно простым. Этот пример – своего рода Розеттский камень. Принципиальное различие для $I < P$ состоит в замене циклов DO соответствующими циклами FOR-NEXT и в необычной фразеологии языка, например (I.L.T.P).

FHTFOR.FOR – версия программы FHTSUB на языке ФОРТРАН, написанная в качестве подпрограммы, входящей в главную программу.

Программа FHTBAS

```

10 ! "FHTBAS "
20 DIM F(8,n) ! Этапы выполнения преобразования Хартли
30 DIM R(1/2 n + 1), X(1/2 n + 1) ! Преобразование Фурье
40 DIM S(1/4 n), C(1/4 n) ! sin & cos
50 P = p
60 N4 = 2^(P - 2) @ N2 = N4 + N4 @ N = N2 + N2 @ N7 =
    N - 1 @ P7 = P - 1
70 DEF FN F(I) = I + 1 ! Выборочная функция

100 TO = TIME ! Включить таймер
110 GOSUB 1000 ! Ввести данные
120 GOSUB 2000 ! Получить степени числа 2
130 GOSUB 3000 ! Получить C( ) и S( )
140 IF P > 1 THEN GOSUB 4000 ! Выполнить перестановку
150 GOSUB 5000 ! Этапы 1 и 2
160 GOSUB 6000 ! Этапы 3, 4, ...
170 GOSUB 7000 ! Получить ДПФ
180 TO = TIME - TO ! Остановить таймер
190 GOSUB 8000 ! Вывести результаты на печать
200 END

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N7 @ F(0,I), F(1,I) = FNF(I) @ NEXT I
1020 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Получение степеней числа 2"
2010 I = 1 @ M(0) = 1 @ M(1) = 2
2020 M(I + 1) = M(I) + M(I)
2030 I = I + 1
2040 IF I < P THEN GOTO 2020
2050 RETURN

```

```

3000 ! Подпрограмма "Получение синусов и косинусов"
3010 W = 2*PI/N @ A = 0
3020 FOR I = 1 TO N4 @ A = A + W @ S(I) = SIN(A) @ C(I) =
    COS(A) @ NEXT I
3030 RETURN

```

```

4000 ! Подпрограмма "Перестановка"
4010 J, I = -1
4020 I = I + 1 @ T = P
4030 T = T - 1 @ J = J - M(T)
4040 IF J > = -1 THEN GOTO 4030
4050 J = J + M(T + 1)
4060 IF I <= J THEN GOTO 4020
4070 T = F(0, I + 1)
4080 F(0, I + 1) = F(0, J + 1)
4090 F(0, J + 1) = T
4100 IF I < N - 3 THEN GOTO 4020
4110 RETURN

```

```

5000 ! Подпрограмма "Этапы 1 и 2"
5010 ! Получить F(1, I), двухэлементные ДПХ
5020 FOR I = 0 TO N - 2 STEP 2
5030 F(1, I) = F(0, I) + F(0, I + 1)
5040 F(1, I + 1) = F(0, I) - F(0, I + 1)
5050 NEXT I
5060 IF P = 1 THEN L = 1 @ GOTO 170 ! Выполнено
5070 ! Получить F(2, I), четырехэлементные ДПХ с использованием таблицы
5080 L = 2
5090 FOR I = 0 TO N - 4 STEP 4
5100 F(2, I) = F(1, I) + F(1, I + 2)
5110 F(2, I + 1) = F(1, I + 1) + F(1, I + 3)
5120 F(2, I + 2) = F(1, I) - F(1, I + 2)
5130 F(2, I + 3) = F(1, I + 1) - F(1, I + 3)
5140 NEXT I
5150 IF P = 2 THEN GOTO 170 ! Выполнено
5160 RETURN

6000 ! Подпрограмма "Этапы 3, 4, ..."
6010 U = P7
6020 S = 4
6030 FOR L = 2 TO P7
6040 S2 = S + S
6050 U = U - 1
6060 S0 = M(U - 1)
6070 FOR Q = 0 TO N7 STEP S2
6080 I = Q
6090 D = I + S
6100 F(L + 1, I) = F(L, I) + F(L, D)
6110 F(L + 1, D) = F(L, I) - F(L, D)
6120 K = D - 1
6130 FOR J = S0 TO N4 STEP S0
6140 I = I + 1
6150 D = I + S
6160 E = K + S
6170 X = F(L, E) * C(J) - F(L, D) * S(J)
6180 Y = F(L, D) * C(J) + F(L, E) * S(J)
6190 F(L + 1, I) = F(L, I) + Y
6200 F(L + 1, D) = F(L, I) - Y

```

```

6210      F(L + 1,K) = F(L,K) - X
6220      F(L + 1,E) = F(L,K) + X
6230      K = K - 1
6240      NEXT J
6250      E = K + S
6260      NEXT Q
6270      S = S2
6280      NEXT L
6290      RETURN

```

```

7000 ! Подпрограмма "Получение ДПФ "
7010 R(0) = F(L,0) + F(L,0) @ X(0) = 0
7020 FOR I = 1 TO N2
7030   B = F(L,N - I)
7040   R(I) = F(L,I) + B
7050   X(I) = -F(L,I) + B
7060 NEXT I
7070 RETURN

```

```

8000 ! Подпрограмма "Вывод результатов на печать"
8005 IF P > 1 THEN GOSUB 1000 ! Повторное считывание данных
8010 CLEAR @ PRINT @ PRINT "r,ν f(r) H(ν) R(ν) + jX(ν)"
      @ PRINT
8020 J$ = ""
8030 FOR I = 0 TO N7
8040   J = MIN(I,N - I) ! Отобразить
8050   F = INT(.5 + 1000*F(0,I))/1000 ! Округлить
8060   H = INT(.5 + 1000/N*F(L,I))/1000
8070   R = INT(.5 + 1000*R(J)/N)/2000 @ X = INT(.5 + 1000*X(J)
      /N)/2000*SGN(N2 - I)
8080   J$ = " +j " & VAL$(ABS(X)) @ IF SGN(X) = -1 THEN
      J$ = " -j " & VAL$(ABS(X))
8090   IF X = 0 THEN J$ = ""
8100   PRINT I; TAB(6); F; TAB(12); H; TAB(21); R; J$
8110 NEXT I
8120 PRINT @ PRINT " N = " & VAL$(N) & ", Time was " & VAL$(
      TO) & " sec"
8130 RETURN

```

Результаты вывода на печать для n=8, p=3

r,ν	f(r)	H(ν)	R(ν) + jX(ν)
0	1	4.5	4.5
1	2	-1.707	-.5 + j 1.207
2	3	-1	-.5 + j .5
3	4	-.707	-.5 + j .207
4	5	-.5	-.5
5	6	-.293	-.5 - j .207
6	7	0	-.5 - j .5
7	8	.707	-.5 - j 1.207

N=8. Время счета оказалось равным 1,045 с.

Примечания. а) Подставить численные значения для $n = 2p$ в строки 20, 30 и 40 и значение p в строку 50.

б) Используемые переменные: A B D E F H I J K L N N2 N4

N7 P P7 Q R S S0 S2 T TO T6 T7 T8 T9 U W X Y C() F() M() R() S() X() J\$.

в) © 1985 The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior Univ.

Программа FHTSUB

```

9000 ! "FHTSUB"
9010 ! Данная подпрограмма в качестве входных данных использует F( ) и возвращает
      ДПХ в ячейки F( )
9020 ! Дать описание массива DIM F(n), N = n и P = p перед входом в
      подпрограмму
9030 IF P = 1 THEN J = F(0) + F(1) @ F(1) = F(0) - F(1) @
      F(0) = J @ RETURN
9040 DIM S9(n/4), T9(n/4), N9(10) ! sin θ, tan θ/2 & 2ΛI
9050 DIM A9(64) ! Ордината ячейки
9060 DIM V9(10), C9(10) ! Константы
9070 N9 = 2^(P-2) @ N = 4*N9 @ C9(5) = N - 1 @ C9(6) = P - 1
9080 ON ERROR GOTO 9200 ! Обход при неудаче инициализации NO в главной
      программе
9090 IF N = NO THEN GOTO 9400 ! Пропуск предварительного табулирования
9100 OFF ERROR ! Отмена последующих обходов по отказам

9200 ! Получение степеней числа 2
9201 I = 1 @ M9(0) = 1 @ M9(1) = 2
9202 M9(I + 1) = M9(I) + M9(I) @ I = I + 1
9204 IF I < P THEN GOTO 9202

9296 IF N = 2 THEN GOTO 9411 ! Частный случай
9297 IF N < 8 THEN GOTO 9400 ! Пропуск тригонометрических функций
9298 S9(N9) = 1
9299 IF N = 8 THEN S9(1) = SIN(PI/4) @ GOTO 9330 !

9300 ! Получение синусов
9301 FOR I = 1 TO 3 @ S9(I*N9/4) = SIN(I*PI/8) @ NEXT I !
      Исходная таблица для синусов (грубая)
9302 H9 = 1/2/COS(PI/16) ! Начальное значение половины секанса
9303 ! Заполнить таблицу синусов
9304 C9(4) = P - 4
9305 FOR I = 1 TO P - 4
9306   C9(4) = C9(4) - 1 @ V9(0) = 0
9307   FOR J = M9(C9(4)) TO N9 - M9(C9(4)) STEP M9(C9(4) + 1)
9308     V9(1) = J + M9(C9(4))
9309     S9(J) = H9*(S9(V9(1)) + V9(0)) @ V9(0) = S9(V9(1))
9310   NEXT J
9311   H9 = 1/SQR(2 + 1/H9) ! Рекурсия половины секанса
9312 NEXT I

9330 ! Получение тангенсов
9340 C9(0) = N9 - 1
9350 FOR I = 1 TO N9 - 1
9360   T9(I) = (1 - S9(C9(0)))/S9(I)
9370   C9(0) = C9(0) - 1
9380 NEXT I
9381 T9(N9) = 1

```

```

9400 ! Быстрая перестановка
9402 ! Для P = 2, 3 непосредственно выполнить перестановку
9403 IF P = 2 THEN V9(9) = F(1) @ F(1) = F(2) @ F(2) = V9(9)
    @ GOTO 9500
9404 IF P = 3 THEN V9(9) = F(1) @ F(1) = F(4) @ F(4) = V9(9)
    @ V9(9) = F(3) @ F(3) = F(6) @ F(6) = V9(9)
9405 IF P = 3 THEN GOTO 9500
9406 ! For P = 4, 5, 6 (Q9 = 2, 3), Пропуск структурной таблицы
9407 Q9 = P DIV 2 @ C9(2) = N9(Q9)
9408 Q9 = Q9 + P MOD 2
9409 IF Q9 = 2 THEN A9(1) = 2 @ A9(2) = 1 @ A9(3) = 3 @
    GOTO 9420
9410 IF Q9 = 3 THEN A9(1) = 4 @ A9(2) = 2 @ A9(3) = 6 @
    A9(4) = 1 @ A9(5) = 5 @ A9(6) = 3 @ A9(7) = 7 @ GOTO 9420
9411 IF N = 2 THEN V9(6) = F(0) @ F(0) = F(1) @ F(1) = V9(6)
    ! Частный случай
9412 ! Построить структурную таблицу
9413 A9(0) = 0 @ A9(1) = 1
9414 FOR I = 2 TO Q9
9415     FOR J = 0 TO N9(I - 1) - 1
9416         A9(J) = A9(J) + A9(I)
9417         A9(J + N9(I - 1)) = A9(J) + 1
9418     NEXT J
9419 NEXT I

9420 ! Выполнить перестановки
9421 FOR I = 1 TO C9(2) - 1
9422     V9(4) = C9(2)*A9(I)
9423     V9(5) = 1 @ V9(6) = V9(4)
9424     V9(7) = F(V9(5)) @ F(V9(5)) = F(V9(6)) @ F(V9(6))
        = V9(7)
9425     FOR J = 1 TO A9(I) - 1
9426         V9(5) = V9(5) + C9(2) @ V9(6) = V9(4) + A9(J)
9427         V9(7) = F(V9(5)) @ F(V9(5)) = F(V9(6)) @
            F(V9(6)) = V9(7)
9428     NEXT J
9429 NEXT I

9500 ! Этапы 1 и 2
9501 ! Получить двухэлементные ДПХ
9502 FOR I = 0 TO N - 2 STEP 2
9503     V9(6) = F(I) + F(I + 1) @ V9(7) = F(I) - F(I + 1)
9505     F(I) = V9(6) @ F(I + 1) = V9(7)
9507 NEXT I
9508 IF P = 1 THEN RETURN ! Завершено
9509 ! Получить четырехэлементные ДПХ
9510 FOR I = 0 TO N - 4 STEP 4
9511     V9(6) = F(I) + F(I + 2) @ V9(7) = F(I + 1) + F(I + 3)
9513     V9(8) = F(I) - F(I + 2) @ V9(9) = F(I + 1) - F(I + 3)
9515     F(I) = V9(6) @ F(I + 1) = V9(7) @ F(I + 2) = V9(8)
        @ F(I + 3) = V9(9)
9519 NEXT I
9520 IF P = 2 THEN RETURN ! Завершено

9600 ! Этапы 3, 4, ...
9601 U9 = C9(6) @ S9 = 4

```

```

9603 FOR L9 = 2 TO C9(6)
9604     V9(2) = S9 + S9 @ U9 = U9 - 1 @ V9(3) = N9(U9 - 1)
9607     FOR Q9 = 0 TO C9(5) STEP V9(2)
9608         I = Q9 @ D9 = I + S9
9610         V9(6) = F(I) + F(D9) @ V9(7) = F(I) - F(D9)
9612         F(I) = V9(6) @ F(D9) = V9(7) @ K9 = D9 - 1
9615         FOR J = V9(3) TO N9 STEP V9(3)
9616             I = I + 1 @ D9 = I + S9 @ E9 = K9 + S9
9617             V9(9) = F(D9) + F(E9)*T9(J)
9618             X9 = F(E9) - V9(9)
9621             V9(6) = F(I) + Y9 @ V9(7) = F(I) - Y
                V9(8) = F(K9) - X9 @ V9(9) = F(K9) + X9 @
                F(I) = V9(6) @ F(D9) = V9(7) @ F(K9) = V9(8)
                @ F(E9) = V9(9) @ K9 = K9 - 1
9630         NEXT J
9631         E9 = K9 + S9
9632     NEXT Q9
9633     S9 = V9(2)
9634 NEXT L9
9635 NO = N ! Запомнить
9636 RETURN

```

Примечания: а) Подставить числовые значения n в строку 9040.

б) Дать описание массива DIM F(n), $N = n$ и $P = p$ перед входом в подпрограмму.

в) Эта подпрограмма предполагает, что пользователь будет последовательно осуществлять деление на N .

г) За исключением F() I, J, K, N и P, названия переменных в основном такие же, как в FHTBAS с дополнительной цифрой 9, что позволяет избежать дублирования. Список переменных: D9 E9 H9 I J K L9 N N0 P Q9 S9 U9 X9 Y9 C9() F() M9() S9() T9() V9().

д) Строка 9635 запоминает переменную N . Пользователь может выразить желание начать с упоминания в главной программе того, что $N0 = 0$, так что строка 9090 не завершает выполнения процедуры; тогда строки 9080 и 9100, ответственные за ошибки в упоминании $N0$, могут быть исключены.

е) © 1985 The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior Univ.

Программа FHTPS

```

10 ! "FHTPS"
20 ! Вычисление спектра мощности P( ) по последовательности данных
    F( ) через ДПХ
30 N = 64 @ P = 6 ! Эти данные необходимы для подпрограммы 9000
40 DIM F(64), P(32)
50 D = 1 ! Подобрать степень сглаживания

100 ! Главная программа
110 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
120 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
130 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Получение спектра мощности"
140 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Сглаживание спектра мощности"
150 GOSUB 4000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
160 END

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 ! Генератор полосового шума

```

```

1020 F(0) = RND @ F(1) = RND
1030 FOR I = 2 TO N
1040   F(I) = 1.65*F(I - 1) - 0.95*F(I - 2) + RND - .5
1050 NEXT I
1060 RETURN

```

```

2000 ! Подпрограмма "Получение спектра мощности"
2010 P(0) = 2*F(0)^2
2020 FOR I = 1 TO N/2 - 1
2030   P(I) = F(I)^2 + F(N - I)^2
2040 NEXT I
2050 RETURN

```

```

3000 ! Подпрограмма "Сглаживание спектра мощности"
3010 IF D = 0 THEN RETURN
3020 FOR I = 1 TO D
3030   K = N/2 - 1 - I
3040   FOR J = 0 TO K @ P(J) = P(J) + P(J + 1) @ NEXT J
3050   FOR J = 0 TO K - 1 @ P(K - J) = P(K - J) +
     P(K - J - 1) @ NEXT J
3060   P(0) = 2*P(0)^2
3070 NEXT I
3080 RETURN

```

```

4000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
4010 PRINT "ν      P(ν)" @ PRINT
4020 FOR I = 0 TO N/2 - 1 - D
4030   PRINT I; P(I)/4^D/N/N/2
4040 NEXT I
4050 RETURN

```

9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"

Выборочные результаты вывода данных для $D = 1$

ν	$P(\nu)$
0	.007
1	.007
2	.004
3	.025
4	.062
5	.157
6	.238
7	.140
8	.026
9	.007
10	.003
11	.003
12	.003
13	.003
14	.003
15	.002
...	...
28	.000
29	.000
30	.001

Примечания. а) Дать описание для N и P, как это требуется строкой 30.
б) Подпрограмма 1000 формирует последовательность данных, представляющих полосовой шум.

в) Подпрограмма 2000 обеспечивает грубый спектр мощности.

г) Подпрограмма 3000 обеспечивает сглаживание спектра мощности использованием быстрого и изящного алгоритма биномиального сглаживания. Подобрать степень сглаживания D в соответствии с требованием строки 50. При $D = 1$ соответствующие коэффициенты сглаживающей последовательности равны $\{1\ 2\ 1\}/4$, при $D = 2$ они имеют вид $\{1\ 4\ 6\ 4\ 1\}/16$ и т. д. В подпрограмме вывода данных на терминал коэффициент вида $4 \wedge D$ предусматривает значения 4, 16 и т. д., что также обуславливает аннулирование коэффициента 2 в строке 2010 и коэффициента N в подпрограмме 9000.

Программа CONV

```

10 ! "CONV"
20 ! Выполнение свертки F1( ) с F2( ) для получения
   дискретной свертки C( )
30 ! Для последовательностей F1( ) и F2( ) имеют число элементов
   l1 и l2. Число элементов C( ) будет l1 + l2 - 1

100 ! Установление размерности
110 ! DIM F1(l1), F2(l2), C(l1 + l2 - 1)
120 ! Указать число элементов
130 L1 = l1 ! Число элементов последовательности F1( )
140 L2 = l2 ! Число элементов последовательности F2( )
150 L3 = L1 + L2 - 1 ! Число элементов последовательности C( )
160 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1700 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Свертка"
180 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
190 END

```

```

500 DATA 1, 2, 3, 4, 5
510 DATA 1, 2, 2, 4

```

```

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 1 TO L1 @ READ F1(I) @ NEXT I
1020 FOR I = 1 TO L2 @ READ F2(I) @ NEXT I
1030 RETURN

```

```

2000 Подпрограмма "Свертка"
2010 FOR I = 1 TO L3
2020   C(I) = 0 ! Подготовить для суммирования
2030   FOR J = MAX(1 - L2 + I, 1) TO MIN(L1, I)
2040     K = I - J + 1
2050     C(I) = C(I) + F1(J)*F2(K)
2060   NEXT J
2070 NEXT I
2080 RETURN

```

```

3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT "F1(I) F2(I) C(I)"
3020 PRINT
3030 FOR I = 1 TO L3
3040   F1$ = " " @ IF I <= L1 THEN F1$ = VAL$ (F1(I))
3050   F2$ = " " @ IF I <= L2 THEN F2$ = VAL$ (F2(I))
3060   PRINT F1$ ; TAB(8); F2$ ; TAB(14); C(I)

```

```
3070 NEXT I
3080 RETURN
```

Выборочные результаты вывода данных для $l_1 = 5$ и $l_2 = 4$

F1(I)	F2(I)	C(I)
1	1	1
2	2	4
3	2	9
4	4	18
5		27
.		30
.		26
.		20

Примечания. а) Подставить числовые значения l_1 и l_2 в строки 110, 130 и 140. Для вывода данных на терминал использовались значения $l_1 = 5$ и $l_2 = 4$.

б) Ввод данных может осуществляться с помощью формулы, а не с использованием оператора DATA, например:

```
1010 FOR I = 1 TO L1 @ F1(I) = I @ NEXT I
```

или с применением оператора присвоения, в частности:

```
1020 F2(1) = 1 @ F2(2) = 2 @ F2(3) = 2 @ F2(4) = 4.
```

в) Для взаимной корреляционной функции последовательностей f_1 и f_2 , а именно для $f_1 \star f_2$, перепишем строку 1010 в виде

```
1010 FOR I = L1 TO 1 STEP - 1 @ F1(I) = I @ NEXT I.
```

Программа CCONV

```
10 ! "CCONV"
20 ! Выполнение циклической свертки F1( ) с F2( ) для получения
    C( )
30 ! Последовательности F1( ) и F2( ) могут иметь любое число элементов  $l_1$  и  $l_2$ 
40 ! Указать величину N, равную или большую наибольшей из переменных
     $l_1$  и  $l_2$ 
50 N = n
60 DIM F1(n), F2(n), C(n)
70 ! Инициализация
80 FOR I = 0 TO N - 1 @ F1(I), F2(I), C(I) = 0 @ NEXT I

100 ! Главная программа
110 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
120 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Свертка"
130 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
140 END

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N - 1
1020 F1(I) = 1/2 ^ I
1030 NEXT I

1040 F2(0) = 256
1050 F2(1) = -128
1060 F2(2) = -128
1070 RETURN
```

142

```
2000 ! Подпрограмма "Свертка"
2010 FOR S = 0 TO N - 1 ! Каждый очередной сдвиг осуществляется по
    мере перемещения вдоль элементов последовательности F1( )
2020 C(S) = 0 ! Подготовить для суммирования
2030 FOR T = 0 TO N - 1
2040 U = (S - T) MOD N ! Индекс сдвига циклически
2050 C(S) = C(S) + F1(U) * F2(T) ! Суммировать произведения
2060 NEXT T
2070 NEXT S
2080 RETURN
```

```
3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT "I F1(I) F2(I) C(I)"
3020 PRINT
3030 FOR I = 0 TO N - 1
3040 PRINT I; TAB(6); F1(I); TAB(16); F2(I); C(I)
3050 NEXT I
3060 RETURN
```

Выборочные результаты вывода данных для $n = 8$

I	F1(I)	F2(I)	C(I)
0	1	256	253
1	.5	-128	-1
2	.25	-128	-128
3	.125	0	-64
4	.0625	0	-32
5	.03125	0	-16
6	.015625	0	-8
7	.0078125	0	-4

Примечания: а) Для приведенных данных $n = 8$. Требуемые числовые значения n должны быть подставлены в строки 50 и 60.

б) Ввод данных (при соответствующем выборе констант.— *Перев.*) может быть осуществлен с помощью оператора DATA по аналогии с программой CONV; подпрограмма 1000 иллюстрирует другие методы.

в) Для циклической взаимной корреляционной функции $f_1 \star f_2$ осуществляется реверсирование f_1 .

Программа MATCON

```
10 ! "MATCON"
20 ! Выполнение свертки A( ) с B( ) путем умножения матриц для получения
    дискретной свертки C( )
30 L1 =  $l_1$  @ L2 =  $l_2$ 
40 DIM A( $l_1 + l_2 - 2, l_2 - 1$ ), B( $l_2 - 1$ ), C( $l_1 + l_2 - 2$ )
50 L3 = L1 + L2 - 1
60 ! Читать элементы вектора-столбца
70 FOR I = 0 TO L2 - 1
80 READ B(I)
90 NEXT I
100 ! Заполнить прямоугольную матрицу [A]
110 FOR I = 0 TO L3 - 1
120 IF I < L1 THEN READ A(I,0) ELSE A(I,0) = 0 ! Col. 1
130 FOR J = 1 TO L2 - 1
.140 A((I + J) MOD L3, J) = A(I,0)
```

143

```

150 NEXT J
160 NEXT I
170 ! Сформировать произведение [A] x [B]
180 MAT C = A*B
190 ! Вывести результаты на терминал
200 FOR I = 0 TO L3 - 1
210 PRINT C(I)
220 NEXT I
230 END
240 ! Вектор-столбец [B]
250 DATA 1,2,3
260 ! Столбец 1 матрицы [A]
270 DATA 1,1,1,1,2
280 END

```

Примечания.

а) Подставить численные значения l_1 и l_2 (число элементов последовательностей A() и B()) в строки 30 и 40. В выборке используются $l_1 = 5$ и $l_2 = 3$.

б) Ниже полностью приведена циклическая матрица [A], соответствующая последовательности A(), и вектор-столбцы в соотношении $[C] = [A] \times [B]$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Программа ACF

```

10 ! "ACF"
20 ! Определение простой корреляционной функции последовательности F( )
    для получения C( )
30 ! Последовательность F( ) имеет число элементов l1, а C( ) -
    число элементов 2l1 - 1
40 L1 = l
50 L3 = 2*L1 - 1 ! Число элементов последовательности C( )
60 ! DIM F(l1), C(2l1 - 1)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Вычисление корреляционной функции"
120 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
130 END

500 DATA 1, 4, 6, 4, 1

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 1 TO L1 @ READ F(I) @ NEXT I
1020 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Вычисление корреляционной функции"
2010 FOR I = 1 TO L3

```

```

2020 C(I) = 0 ! Подготовить для суммирования
2030 FOR J = MAX(1 - L1 + I, 1) TO MIN(L1, I)
2040 K = J - I + L1
2050 C(I) = C(I) + F(J)*F(K)
2060 NEXT J
2070 NEXT I
2080 RETURN

```

```

3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT " I      F(I)      C(I)"
3020 PRINT
3030 FOR I = 1 TO L3
3040 F$ "" @ IF I <= L1 THEN F$ = VAL$(F(I))
3050 PRINT I; TAB(7); F$; TAB(12); C(I)
3060 NEXT I
3070 RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных для $l_1 = 5$

I	F(I)	C(I)
1	1	1
2	4	8
3	6	28
4	4	56
5	1	70
6		56
7		28
8		8
9		1

Примечание. а) Подставить числовое значение l_1 в строки 40 и 60. В примере используется значение $l_1 = 5$.

Программа CACF

```

10 ! "CACF"
20 ! Определение циклической корреляционной функции последовательности
    F( ) для получения C( )
30 N = n
40 DIM F(n), C(n)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Вычисление корреляционной функции"
120 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
130 END

500 DATA 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N - 1 @ READ F(I) @ NEXT I
1020 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Вычисление корреляционной функции"
2010 FOR S = 0 TO N - 1 ! Каждый сдвиг выполнять поочередно
2020 C(S) = 0 ! Подготовить для суммирования
2030 FOR T = 0 TO N - 1
2040 U = (T - S) MOD N ! Индекс сдвига циклический

```

```

2050      C(S) = C(S) + F(U)*F(T) ! Суммировать произведения
2060      NEXT T
2070 NEXT S
2080 RETURN

```

```

3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT " I      F(I)      C(I)" @ PRINT
3020 FOR I = 0 TO N_ - 1
3030   PRINT I; TAB(6); F(I); TAB(12); C(I)
3040 NEXT I
3050 RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных для $n = 8$

I	F(I)	C(I)
0	1	4
1	1	3
2	1	2
3	1	1
4	0	0
5	0	1
6	0	2
7	0	3

Примечание. Подставить числовое значение для n в строки 30 и 40. В примере используется значение $n = 8$.

Программа ICONV

```

10 ! "ICONV"
20 ! Обращение свертки F1( ) * F2( ) = G( ) для определения F1( )
    при заданных F2( ) и G( )
30 L1 = I1 ! Определить число элементов последовательности F1( )
40 L2 = I2 ! Число элементов последовательности F2( )
50 L3 = I3 ! Число элементов G( )
60 DIM F1(I1 - 1), F2(I2 - 1), G(I1 + I2 - 2)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Обращение свертки"
120 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
130 END

500 DATA 2,2,3,3,4
510 DATA 2,4,9,10,13,10,8

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 1 TO L2 @ READ F2(I) @ NEXT I
1020 FOR I = 1 TO L3 @ READ G(I) @ NEXT I
1030 FOR I = L3 TO L1 + L2 - 2 @ G(I) = 0 @ NEXT I
1040 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Обращение свертки"
2010 F1(1) = G(1)/F2(1)
2020 FOR I = 2 TO L1
2030   S = 0 ! Подготовить для суммирования
2040   FOR J = MAX(1, I + 1 - L2) TO I - 1
2050     S = S + F1(J)*F2(I + 1 - J)

```

```

2060 NEXT J
2070 F1(I) = (G(I) - S)/F2(0)
2080 NEXT I
2090 RETURN

```

```

3000 ! "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT " I      F1(I)      F2(I)      G(I)" @ PRINT
3020 FOR I = 1 TO L1
3030   F2$ = " " @ IF I <= L2 - 1 THEN F2$ = VAL$ (F2(I))
3040   G$ = " " @ IF I <= L3 - 1 THEN G$ = VAL$ (G(I))
3050   PRINT I; TAB(6); F1(I); TAB(14); F2$ ; TAB(22); G$
3060 NEXT I
3070 RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных для $I_1 = 3, I_2 = 5$ и $I_3 = 7$:

I	F1(I)	F2(I)	G(I)
1	1	2	2
2	1	2	4
3	2	3	9
4	0	3	10
5	0	4	13
6	0		10
7	0		8
8	0		

Примечания. а) Подставить значения I_1, I_2, I_3 в строки 30, 40, 50 и 60. В этом примере используются значения $I_1 = 3, I_2 = 5, I_3 = 7$.

б) Данная программа реализует прямой алгоритм «ручного счета», опубликованный в книге *R. N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 1965 (Р. Брейсуэлл. Преобразование Фурье и его приложения).

Программа RECIP

```

10 ! "RECIP"
20 ! Получение последовательности I( ), обратной заданной последовательности F( )
30 L1 = I1 ! Определить число элементов последовательности I( )
40 L2 = I2 ! Число элементов последовательности F( )
50 DIM I(I1 - 1), F(I2 - 1)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Инвертирование"
120 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
130 END

500 DATA 1,1,1,1,1

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO L2 - 1 @ READ F(I) @ NEXT I
1020 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Инвертирование"
2010 I(0) = 1/F(0)
2020 FOR I = 1 TO L1 - 1
2030   S = 0 ! Подготовить для суммирования
2040   FOR J = MAX(0, I + 1 - L2) TO I - 1

```

```

2050     S = S + I(J)*F(I - J)
2060     NEXT J
2070     I(I) = - S/F(0)
2080     NEXT I
2090     RETURN

3000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
3010 PRINT " I F(I) I(I)" @ PRINT
3020 FOR I = 0 TO L1 - 1
3030     F$ = " " @ IF I <= L2 - 1 THEN F$ = VAL$ (F(I))
3040     PRINT I; TAB(7); F$ ; TAB(14); I(I)
3050     NEXT I
3060     RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных для $l_1 = 8$ и $l_2 = 5$

I	F(I)	I(I)
1	1	1
2	1	-1
3	1	0
4	1	0
5	1	0
6		1
7		-1
8		0

Примечания: а) Подставить значения l_1 и l_2 в строки 30, 40 и 50. В примере используются значения $l_1 = 8$ и $l_2 = 5$.

б) Данный алгоритм является частным случаем программы ICONV, когда $G(I) = \{1\ 0\ 0\ \dots\}$.

Программа ICORR

```

10 ! "ICORR"
20 DIM A(2h + 1), F(2h + 1)
30 N = h ! Число элементов последовательности данных
40 N = 2*h - 1 ! Полное число элементов корреляционной последовательности

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 4000 ! Подпрограмма "Инвертирование корреляционной функции"
120 GOSUB 5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
130 END

500 DATA 20, 15, 6, 1 ! Биномиальные коэффициенты

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N - 1 @ READ A(I + N - 1) @ A(N - 1 - I)
    = A(I + N - 1) @ NEXT I
1020 A0 = A(0)
1030 FOR I = 0 TO N - 1 @ A(I) = A(I)/A0 @ NEXT I
1040 RETURN

4000 ! ...Подпрограмма "Инвертирование корреляционной функции"
4010 F(0) = 1
4020 F(1) = A(1)/2
4030 F(2) = A(2)/2 - F(1)*F(1)/2
4040 FOR I = 3 TO N - 1 ! Индексирование

```

```

4050     K = I DIV 2 ! Число шагов
4060     S = 0 ! Подготовить для суммирования
4070     FOR J = 1 TO K - 1
4080         S = S + F(J)*F(I - J)
4090     NEXT J
4100     IF I MOD 2 = 0 THEN S = S + F(K)*F(K)/2
    ELSE S = S + F(K)*F(I - K) ! Последний элемент
4110     F(I) = A(I)/2 - S
4120     NEXT I
4130     RETURN

```

```

5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
5010 PRINT "I A() F()" @ PRINT
5020 FOR I = 0 TO N - 1
5030     IF I > N - 1 THEN A$ = " " ELSE A$ = VAL$(A(I))
5040     PRINT I; TAB(6); A$; TAB(12); F(I)
5050     NEXT I
5060     RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных:

I	A()	F()
0	1	1
1	6	3
2	15	3
3	20	1
4	15	0
5	6	0
6	1	0

Примечания. а) Подставить числовые значения h в строку 30, а значения $2h+1$ в строку 20.

б) Алгоритм реализует аналоговый метод вычисления, для которого последовательность $A()$ записывается на внешнем кольце соответствующего вычислительного устройства, а $F()$ будет последовательно наблюдаться на двух его внутренних кольцах, но в противоположных направлениях. На каждом шаге, когда величина $F()$ становится известной, она регистрируется.

в) За исключением случая, когда $A()$ – корреляционная функция конечной последовательности (что имеет место в данном примере), последовательности $F()$ будут иметь бесконечное число элементов.

г) Термин «каузальный», используемый в смысле $A(i) < 0, i < 0$, является важным условием в физике и безусловно выполняемым в вычислительной технике.

д) В общем случае ясно, что корреляционные функции не могут быть обращены однозначно. Представленный алгоритм дает четное решение для конечной последовательности, если оно существует. Однако при этом в качестве отправной точки берется левый элемент последовательности $A()$, который может иметь небольшое значение и может быть подвержен ошибке или искажению. Анализ характера возникновения и распространения ошибки на всю последовательность может быть выполнен путем изменения $A(0)$, скажем, до величины $1,1$ и осуществления дополнительной процедуры нормировки.

Программа FHTCONV

```

10 ! "FHTCONV"
20 ! Вычисление свертки двух функций (последовательностей)
    с числом элементов N/2 с помощью быстрого алгоритма
30 P = 4 @ N = 2^P
40 DIM F(16), T(16)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Получение первой функции"
110 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
120 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Перемещение к промежуточному массиву"
130 GOSUB 3000 ! Подпрограмма "Получение второй функции"
140 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
150 GOSUB 4000 ! Подпрограмма "Перемножение двух ДПХ"
160 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
170 GOSUB 5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
180 END

1000 ! Подпрограмма "Получение первой функции"
1010 FOR I = 0 TO N - 1
1020 IF I < 4 OR I > 12 THEN F(I) = 1 ELSE F(I) = 0
1030 NEXT I
1040 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Перемещение к промежуточному массиву"
2010 FOR I = 0 TO N - 1
2020 T(I) = F(I)
2030 NEXT I

3000 ! Подпрограмма "Получение второй функции"
3010 FOR I = 0 TO N - 1
3020 IF I < 8 THEN F(I) = I + 1 ELSE F(I) = 0
3030 NEXT I
3040 RETURN

4000 ! Подпрограмма "Перемножение двух ДПХ"
4010 FOR I = 0 TO N - 1
4020 F(I) = F(I)*T(I)
4030 NEXT I
4040 RETURN

4400 ! Подпрограмма "Отсутствие симметрии"
4410 DIM F1(16) ! Реверсирование F( )
4420 FOR Z = 1 TO N - 1
4430 F1(Z) = F(N - Z)
4440 NEXT Z ! Запомнить результат реверсирования F( )
4450 F(0) = F(0)*T(0)*2
4460 FOR I = 1 TO N - 1
4470 F(I) = F(I)*(T(I) + T(N - I)) + F1(I)*(T(I)
    - T(N - I))
4480 NEXT I
4490 RETURN

5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
5010 FOR I = 0 TO N - 1
5020 PRINT INT(0.5 + F(I)/N)

```

150

```

5030 NEXT I
5040 RETURN

```

9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"

Выборочные результаты вывода данных

10 15 21 28 35 33 30 26 21 15 8 0 0 1 3 6

Примечания. а) Дать описания функций (последовательностей) в подпрограммах 1000 и 3000 и дополнить каждую из них до числа элементов, равного N, с помощью дополнения нулями.

б) Указать числовое значение переменной P в строке 30.

в) Подставить числовое значение N в строку 30 и заменить им величину n в строке 900.

г) Заменить в строке 150 подпрограмму 4000 подпрограммой 4400, если ни одна из рассматриваемых функций не обладает свойством симметрии; в строке 5020 заменить F(I)/N на F(I)/N/2.

Программа FHTACF

```

10 ! "FHTACF"
20 ! Вычисление автокорреляционной функции последовательности с числом
    элементов N/2 с использованием быстрого алгоритма
30 P = p @ N = 2^P
40 DIM F(n), P(n)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Описание функции"
110 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
120 GOSUB 2000 ! Подпрограмма "Получение спектра мощности"
130 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
140 GOSUB 5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
150 END

1000 ! Подпрограмма "Описание функции"
1010 FOR I = 0 TO N - 1
1020 IF I < 7 THEN F(I) = 1 ELSE F(I) = 0
1030 NEXT I
1040 RETURN

2000 ! Подпрограмма "Получение спектра мощности"
2010 P(0) = 2*F(0)^2
2020 FOR I = 1 TO N/2
2030 P(I), P(N - I) = (F(I)^2 + F(N - I)^2)
2040 NEXT I
2050 FOR I = 0 TO N - 1 @ F(I) = P(I) @ NEXT I
2060 RETURN

5000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
5010 FOR I = 0 TO N - 1
5020 PRINT F(I)/N/2
5030 NEXT I
5040 RETURN

```

9000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"

151

Выборочные результаты вывода данных для последовательности, содержащей 7 единичных элементов, при $n = 16$ ($p = 4$)

7 6 5 4 3 2 1 0 0 0 1 2 3 4 5 6

Примечания. а) Записать $N/2$ значений функции в подпрограмме 1000 и дополнить ее нулями до N.

б) Указать числовое значение p в строке 40.

в) Подставить числовое значение N в строку 30 и заменить им величину n в строке 900.

Программа FHTRX4

```

10 ! "FHTRX4"
20 ! Вычисление БПХ последовательности F( ) для основания 4
30 P = p
40 N = 4^P @ N4 = N/4
50 R = SQR(2)
60 DIM F(n)

100 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
110 GOSUB 4000 ! Подпрограмма "Перестановка для основания 4"
120 GOSUB 5000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
130 GOSUB 8000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
140 END

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N - 1 @ F(I) = I + 1 @ NEXT I
1020 RETURN

4000 ! Подпрограмма "Перестановка для основания 4"
4010 J = 1 @ I = 0
4020 I = I + 1 @ IF I >= J THEN GOTO 4040
4030 T = F(J - 1) @ F(J - 1) = F(I - 1) @ F(I - 1) = T
4040 K = N4
4050 IF 3*K >= J THEN GOTO 4070
4060 J = J - 3*K @ K = K/4 @ GOTO 4050
4070 J = J + K @ IF I < N - 1 THEN GOTO 4020
4080 RETURN

5000 ! Подпрограмма "Получение ДПХ"
5010 ! Этап 1
5020 FOR I = 0 TO N - 1 STEP 4
5030 T1 = F(I) + F(I + 1)
5040 T2 = F(I) - F(I + 1)
5050 T3 = F(I + 2) + F(I + 3)
5060 T4 = F(I + 2) - F(I + 3)
5070 F(I) = T1 + T3
5080 F(I + 1) = T1 - T3
5090 F(I + 2) = T2 + T4
5100 F(I + 3) = T2 - T4
5110 NEXT I

5130 ! Этапы от 2 до P
5140 FOR L = 2 TO P

```

```

5150 D1 = 2^(L + L - 3)
5160 D2 = D1 + D1
5170 D3 = D2 + D2
5180 D4 = D2 + D3
5190 D5 = D3 + D3
5200 FOR J = 0 TO N - 1 STEP D5
5210 T1 = F(J) + F(J + D2)
5220 T2 = F(J) - F(J + D2)
5230 T3 = F(J + D3) + F(J + D4)
5240 T4 = F(J + D3) - F(J + D4)
5250 F(J) = T1 + T3
5260 F(J + D2) = T1 - T3
5270 F(J + D3) = T2 + T4
5280 F(J + D4) = T2 - T4
5290 T1 = F(J + D1)
5300 T2 = F(J + D1 + D2)*R
5310 T3 = F(J + D1 + D3)
5320 T4 = F(J + D1 + D4)*R
5330 F(J + D1) = T1 + T2 + T3
5340 F(J + D1 + D2) = T1 - T3 + T4
5350 F(J + D1 + D3) = T1 - T2 + T3
5360 F(J + D1 + D4) = T1 - T3 - T4
5370 FOR K = 1 TO D1 - 1
5380 L1 = J + K
5390 L2 = L1 + D2
5400 L3 = L1 + D3
5410 L4 = L1 + D4
5420 L5 = J + D2 - K
5430 L6 = L5 + D2
5440 L7 = L5 + D3
5450 L8 = L5 + D4
5460 A1 = PI*K/D3 @ A2 = A1 + A1 @ A3 = A1 + A2
5470 C1 = COS(A1) @ C2 = COS(A2) @ C3 = COS(A3)
    @ S1 = SIN(A1) @ S2 = SIN(A2) @ S3 = SIN(A3)
5480 T5 = F(L2)*C1 + F(L6)*S1
5490 T6 = F(L3)*C2 + F(L7)*S2
5500 T7 = F(L4)*C3 + F(L8)*S3
5510 T8 = F(L6)*C1 - F(L2)*S1
5520 T9 = F(L7)*C2 - F(L3)*S2
5530 T0 = F(L8)*C3 - F(L4)*S3
5540 T1 = F(L5) - T9
5550 T2 = F(L5) + T9
5560 T3 = - T8 - T0
5570 T4 = T5 - T7
5580 F(L5) = T1 + T4
5590 F(L6) = T2 + T3
5600 F(L7) = T1 - T4
5610 F(L8) = T2 - T3
5620 T1 = F(L1) + T6
5630 T2 = F(L1) - T6
5640 T3 = T8 - T0
5650 T4 = T5 + T7
5660 F(L1) = T1 + T4
5670 F(L2) = T2 + T3
5680 F(L3) = T1 - T4
5690 F(L4) = T2 - T3
5700 NEXT K

```

```

6710 NEXT J
6720 NEXT L
6730 RETURN

```

```

8000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
8010 PRINT " ν H(ν)" @ PRINT
8020 FOR I = 0 TO N - 1 @ PRINT I; TAB(6); F(I)/N @ NEXT I
8030 RETURN

```

Примечания. а) Подставить числовые значения p в строку 30 и n в строку 60 так, чтобы число элементов n было равно $n = 4^p = 16, 64, 256, 1024, \dots$

б) См. обсуждение в гл. 8.

в) Предварительное табулирование тригонометрических функций осуществляется по аналогии с программой FHTSUB.

г) © 1985 The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior Univ.

Программа FASTPERMUTE

```

10 ! "FASTPERMUTE"
20 ! Выполнение быстрой перестановки
30 ! NO есть число ячеек, укладываемых вдоль одной
    координаты, шаг решетки в ячейке
40 DIM F(1024), J(16)
50 P = p @ N8 = 2^(P - 3)
60 N4 = N8 + N8 @ N2 = N4 + N4 @ N = N2 + N2
70 P1 = P @ N1 = N ! Семейство I
80 IF P MOD 2 = 1 THEN N1 = N2 @ P1 = P - 1 ! Семейство II
90 NO = SQR(N1/4) ! Число ячеек, укладываемых вдоль одной координаты
100 S = N/NO ! Размер ячейки

150 GOSUB 1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
160 GOSUB 4000 ! Подпрограмма "Получение перестановочной функции J(I)"
170 GOSUB 5000 ! Подпрограмма "Получение координат ячеек X, Y" и перестановка"
180 GOSUB 9000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
190 END

```

```

1000 ! Подпрограмма "Ввод данных"
1010 FOR I = 0 TO N - 1 @ F(I) = I @ NEXT I
1020 RETURN

```

```

4000 ! Подпрограмма "Получение J(I)"
4010 P2 = P1/2 - 1 @ J = 0
4020 J(0) = 0 @ J(NO - 1) = NO - 1
4030 FOR IO = 1 TO NO - 2 @ PO = P2 - 1
4040 IF J < 2*PO THEN GOTO 4060
4050 J = J - 2*PO @ PO = PO - 1 @ GOTO 4040
4060 J = J + 2*PO @ J(IO) = J
4070 NEXT IO
4080 RETURN

```

```

5000 ! Подпрограмма "Получение координат ячеек X, Y"
5010 S9 = -S
5020 FOR J = 0 TO NO - 1
5030 S9 = S9 + S
5040 X = J(J) - S + J*S
5050 FOR I = J TO NO - 1

```

```

5060 X = X + S
5070 Y = J(I) + S9
5080 GOSUB 8000 ! Подпрограмма "Перестановка содержимого ячеек"
5090 NEXT I
5100 NEXT J
5110 RETURN

```

```

8000 ! Подпрограмма "Перестановка содержимого ячеек"
8010 ! Начать с диагональных ячеек
8020 IF X = Y AND P MOD 2 = 0 THEN T = F(X + NO) @ F(X + NO)
    = F(Y + 2*NO) @ F(Y + 2*NO) = T @ RETURN ! Семейство I

```

```

8030 IF X = Y AND P MOD 2 = 1 THEN T = F(X + NO) @ F(X + NO)
    = F(Y + 4*NO) @ F(Y + 4*NO) = T

```

```

8040 IF X = Y AND P MOD 2 = 1 THEN T = F(X + 3*NO) @ F(X +
    3*NO) = F(Y + 6*NO) @ F(Y + 6*NO) = T @ RETURN
    ! Семейство II

```

```

8050 ! Внедиагональные ячейки
8060 A = X - NO
8070 FOR I9 = 0 TO 3 + 4*(P MOD 2)
8080 IF P MOD 2 = 1 THEN I2 = I9 + 3*((I9=1) + (I9=3)
    - (I9=4) - (I9=6)) ELSE I2 = I9 + (I9=1) - (I9=2)
8090 A = A + NO
8100 B = Y + I2*NO
8110 T = F(A) @ F(A) = F(B) @ F(B) = T ! Заменить
8120 NEXT I9
8130 RETURN

```

```

9000 ! Подпрограмма "Вывод данных на терминал"
9010 PRINT " i j" @ PRINT
9020 FOR I = 0 TO N - 1
9030 PRINT I; F(I)
9040 NEXT I
9050 RETURN

```

Выборочные результаты вывода данных для $p = 3$

```

1 j
0 0
1 4
2 2
3 6
4 1
5 5
6 3
7 7

```

Примечания: а) Для строки 80 установить значение P , а для строки 70—соответствие размерности $F(\)$ и величины 2^P .

б) Описание массива DIMJ(16) справедливо для $N < 4096$; для больших N ввести $N0$ в качестве максимального значения индекса массива.

в) См. обсуждение в гл. 8.

Программа FHTBAS.FOR

```

C FHTBAS.FOR
C
  DIMENSION F(0:8,0:256), R(0:256), X(0:256), M(0:20)
  DIMENSION S(64), C(64)
  INTEGER D, E, I, J, K, L, M0, N, N2, N4
  INTEGER N7, P, P0, P7, Q, S1, S0, S2, S4, U
  FIN(I)=I+1.
  P=8
  N4=2**(P-2)
  N2=N4+N4
  N=N2+N2
  N7=N-1
  P7=P-1

C INSERT DATA
  DO I=0,N7
    F(0,I)=FIN(I)
    F(1,I)=F(0,I)
  END DO

C GET POWERS OF 2
  I=1
  M(0)=1
  M(1)=2
10  M(I+1)=M(I)+M(I)
  I=I+1
  IF (I.LT.P) GO TO 10

C GET SINES AND COSINES
  PI=3.14159265
  W=2*PI/N
  A=0
  DO I=1,N4
    A=A+W
    S(I)=SIN(A)
    C(I)=COS(A)
  END DO

C PERMUTE
  J=-1
  I=-1
20  I=I+1
  P0=P
30  P0=P0-1
  J=J-M(P0)
  IF (J.GE.-1) GO TO 30
  J=J+M(P0+1)
  IF (I.LE.J) GO TO 20
  T=F(0,I+1)
  F(0,I+1)=F(0,J+1)
  F(0,J+1)=T
  IF (I.LT.(N-3)) GO TO 20

```

156

```

C GET F(I,1), 2-ELEMENT DHTs
  DO I=0,N-2,2
    F(1,I)=F(0,I)+F(0,I+1)
    F(1,I+1)=F(0,I)-F(0,I+1)
  END DO
  IF (P.EQ.1) GO TO 40

C GET F(2,I), 4-ELEMENT DHTs
  L=2
  M0=2
  DO I=0,N-4,4
    F(2,I)=F(1,I)+F(1,I+2)
    F(2,I+1)=F(1,I+1)+F(1,I+3)
    F(2,I+2)=F(1,I)-F(1,I+2)
    F(2,I+3)=F(1,I+1)-F(1,I+3)
  END DO
  IF (P.EQ.2) GO TO 40

C STAGES 3,4,...
  U=P7
  S1=4
  DO L=2,P7
    S2=S1+S1
    U=U-1
    S0=M(U-1)
    DO Q=0,N7,S2
      I=Q
      D=I+S1
      F(L+1,I)=F(L,I)+F(L,D)
      F(L+1,D)=F(L,I)-F(L,D)
      K=D-1
      DO J=S0,N4,S0
        I=I+1
        D=I+S1
        E=K+S1
        Y=F(L,D)*C(J)+F(L,E)*S(J)
        Z=F(L,D)*S(J)-F(L,E)*C(J)
        F(L+1,I)=F(L,I)+Y
        F(L+1,D)=F(L,I)-Y
        F(L+1,K)=F(L,K)+Z
        F(L+1,E)=F(L,K)-Z
        K=K-1
      END DO
      E=K+S1
    END DO
    S1=S2
  END DO

C GET DFT
  R(0)=(F(L,0)+F(L,0))/2.
  X(0)=0
  DO I=1,N7
    B=F(L,N-I)
    R(I)=(F(L,I)+B)/2.
    X(I)=(F(L,I)-B)/2.
  END DO
40  CONTINUE

```

40

157

```

C WRITE RESULTS
  TYPE 50
50  FORMAT (' Input H( ) R( ) X( ) ')
    DO I=0,N7
    TYPE 60, I,FIN(I),F(L,I)/N,R(I)/N,X(I)/N
60  FORMAT (I6,4 F9.3)
    END DO
    END

```

Выборочные результаты вывода на печать для P = 8, N = 256

	Input	H()	R()	X()	
.	0	1.000	128.500	128.500	0.000
.	1	2.000	-41.242	-0.500	-40.742
.	2	3.000	-20.868	-0.500	-20.368
.	3	4.000	-14.075	-0.500	-13.575
.	4	5.000	-10.678	-0.500	-10.178
.	5	6.000	-8.639	-0.500	-8.139
.	6	7.000	-7.278	-0.500	-6.778
.	7	8.000	-6.306	-0.500	-5.806
.	8	9.000	-5.577	-0.500	-5.077
.	9	10.000	-5.009	-0.500	-4.509
.

Примечания: а) Версия программы FHTBAS на языке ФОРТРАН.

б) Получить ДПХ как $F(P-1, I)$, а ДПФ - в виде $R(I) + iX(I)$ для $I = 0$ до $I = N-1$ (for $I = 0$ to $N-1$).

в) © 1985 The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior Univ.

Программа FHTFOR. FOR

```

C FHTFOR.FOR
C CALLING PROGRAM FOR FHTFOR
C

```

```

COMMON N0
DIMENSION F(1024)
P = 5

```

```

C INSERT DATA
DO I = 1,64
F(I) = I
END DO
CALL FHTFOR(P,F)
WRITE(5,20)F
STOP
END

```

```

C SUBROUTINE FHTFOR TAKES INPUT F() AND RETURNS THE DHT
C IN THE SAME F()
C LENGTH OF F() IS 2**P
SUBROUTINE FHTFOR(P,F)
COMMON N0
DIMENSION F(1024)

```

```

9020 P1 = 3.141592
9030 IF (P.NE.Q.1) GO TO 9040
9033 J = F(0) + F(1)
9034 F(1) = F(0) - F(1)

```

```

9035 F(0) = J
9036 RETURN
9040 CONTINUE
9040 DIMENSION S9(256), T9(256)
9050 INTEGER A9(64), M9(10)
9060 DIMENSION V9(10), C9(10)
9070 N9 = 2**(P - 2)
9071 N = 4*N9
9072 C9(5) = N - 1
9073 C9(6) = P - 1
9090 IF N(.EQ.)N0 GO TO 9400

```

```

C GET POWERS OF 2
9201 I = 1
9202 M9(0) = 1
9203 M9(1) = 2
9204 M9(I + 1) = M9(I) + M9(I)
9205 I = I + 1
9206 IF I(.LE.)P GO TO 9204
C SPECIAL CASE
9296 IF N(.EQ.)2 GO TO 9411
C SKIP TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
9297 IF N(.LE.)8 GO TO 9400
9298 S9(N9) = 1
C SKIP SINES
9299 IF (N.NEQ.8) GO TO 9300
S9(1) = SIN(P1/4)
GO TO 9330

```

```

C GET SINES
9300 CONTINUE
C COARSE SEED TABLE FOR SINES
9301 DO I = 1,3
S9(I*N9/4) = SIN(I*P1 /8)
END DO
C INITIAL HALF SECANT
9302 H9 = 1/2/COS(P1/16)
C FILL SINE TABLE
9304 C9(4) = P - 4
9305 DO I = 1,P - 4
9306 C9(4) = C9(4) - 1
V9(0) = 0
9307 DO J = M9(C9(4)),N9 - M9(C9(4)),M9(C9(4) + 1)
9308 V9(1) = J + M9(C9(4))
9309 S9(J) = H9*(S9(V9(1)) + V9(0))
V9(0) = S9(V9(1))
9310 END DO
C HALF SECANT RECURSION
9311 H9 = 1/SQRT(2 + 1/H9)
9312 END DO

```

```

C GET TANGENTS
9340 C9(0) = N9 - 1
9350 DO I = 1,N9 - 1
9360 T9(I) = (1 - S9(C9(0)))/S9(I)
9370 C9(0) = C9(0) - 1

```

```

9380 END DO
9381 T9(N9) = 1
9400 CONTINUE

C FAST PERMUTE
C FOR P = 2, 3 PERMUTE DIRECTLY
9403 IF P(.NEQ.)2 GO TO 9404
    V9(9) = F(1)
    F(1) = F(2)
    F(2) = V9(9)
    GO TO 9500
9404 CONTINUE
    IF P(.NEQ.)3 GO TO 9405
    V9(9) = F(1)
    F(1) = F(4)
    F(4) = V9(9)
    V9(9) = F(3)
    F(3) = F(6)
    F(6) = V9(9)
9405 IF P(.EQ.)3 GO TO 9500
C FOR P = 4, 5, 6 (Q9 = 2, 3), SKIP STRUCTURE TABLE
9407 Q9 = P DIV 2
    C9(2) = M9(Q9)
9408 Q9 = Q9 + MOD(P,2)
9409 IF Q9(.NEQ.)2 GO TO 9410
    A9(1) = 2
    A9(2) = 1
    A9(3) = 3
    GO TO 9420
9410 CONTINUE
    IF Q9(.NEQ.)3 GO TO 9411
    A9(1) = 4
    A9(2) = 2
    A9(3) = 6
    A9(4) = 1
    A9(5) = 5
    A9(6) = 3
    A9(7) = 7
    GO TO 9420
9411 CONTINUE
9411 IF N(.NEQ.)2 GO TO 9412
C SPECIAL CASE
    V9(6) = F(0)
    F(0) = F(1)
    F(1) = V9(6)
9412 CONTINUE
C SET UP STRUCTURE TABLE
9413 A9(0) = 0
    A9(1) = 1
9414 DO I = 2, Q9
9415 DO J = 0, M9(I - 1) - 1
9416 A9(J) = A9(J) + A9(I)
9417 A9(J + M9(I - 1)) = A9(J) + 1
9418 END DO
9419 END DO
9420 CONTINUE

```

```

C PERMUTE
9422 DO I = 1, C9(2) - 1
9423 V9(4) = C9(2)*A9(I)
9424 V9(5) = 1
    V9(6) = V9(4)
9425 V9(7) = F(V9(5))
    F(V9(5)) = F(V9(6))
    F(V9(6)) = V9(7)
9426 DO J = 1, A9(I) - 1
9427 V9(5) = V9(5) + C9(2)
    V9(6) = V9(4) + A9(J)
9428 V9(7) = F(V9(5))
    F(V9(5)) = F(V9(6))
    F(V9(6)) = V9(7)
9429 END DO
9430 END DO

C STAGES 1 & 2
C GET TWO-ELEMENT DHTs
9502 DO I = 0, N - 2, 2
9503 V9(6) = F(I) + F(I + 1)
    V9(7) = F(I) - F(I + 1)
9505 F(I) = V9(6)
    F(I + 1) = V9(7)
9507 END DO
9508 IF P = 1 RETURN
C GET FOUR-ELEMENT DHTs
9510 DO I = 0, N - 4, 4
9511 V9(6) = F(I) + F(I + 2)
    V9(7) = F(I + 1) + F(I + 3)
9513 V9(8) = F(I) - F(I + 2)
    V9(0) = F(I + 1) - F(I + 3)
9515 F(I) = V9(6)
    F(I + 1) = V9(7)
    F(I + 2) = V9(8)
    F(I + 3) = V9(0)
9519 END DO
9520 IF P(.EQ.)2 RETURN

C STAGES 3, 4, ...
9601 U9 = C9(6)
    S9 = 4
9603 DO L9 = 2, C9(6)
9604 V9(2) = S9 + S9
    U9 = U9 - 1
    V9(3) = M9(U9 - 1)
9607 DO Q9 = 0, C9(5), V9(2)
9608 I = Q9
    D9 = I + S9
9610 V9(6) = F(I) + F(D9)
    V9(7) = F(I) - F(D9)
9612 F(I) = V9(6)
    F(D9) = V9(7)
    K9 = D9 - 1
9615 DO J = V9(3), N9, V9(3)
9616 I = I + 1

```

```

D9 = I + S9
E9 = K9 + S9
9617 V9(9) = F(D9) + F(E9)*T9(J)
9618 X9 = F(E9) - V9(9)
9621 V9(6) = F(I) + Y9
      V9(7) = F(I) - Y9
      V9(8) = F(K9) - X9
      V9(9) = F(K9) + X9
9625 F(I) = V9(6)
      F(D9) = V9(7)
      F(K9) = V9(8)
      F(E9) = V9(9)
      K9 = K9 - 1
9630 END DO
9631 E9 = K9 + S9
9632 END DO
9633 S9 = V9(2)
9634 END DO
C REMEMBER
9635 N0 = N
9636 RETURN
      END

```

Примечания. а) Данная подпрограмма предполагает, что пользователь будет последовательно осуществлять деление на N.

б) В данной подпрограмме имена переменных и нумерация строк в основном аналогичны программе FHTSUB.

в) © 1985 The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior Univ.

Приложение 2 АТЛАС ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАРТЛИ

После этого, взяв на кривой произвольную точку, скажем *C*, я провожу из этой точки отрезок *CB*, параллельный *GA*, и, в силу того что *CB* и *BA* не определены и неизвестны, в качестве меры одной из этих линий я использую обозначение *y*, а другой из них — обозначение *x*.

Рене Декарт. Рассуждения о методе
1637

[Первое использование декартовых координат.]

В нижеприведенном сводном атласе преобразований Хартли функции времени $f(t)$ изображены на левом графике, а соответствующие им преобразования Хартли — на правом. Прямое и обратное преобразования Хартли имеют вид

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{cas} 2\pi ft \, dt,$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \operatorname{cas} 2\pi ft \, df.$$

Ниже на соответствующих графиках используются следующие условные обозначения:

функция *cas*

$$\operatorname{cas} t = \cos t + \sin t,$$

единичная прямоугольная функция

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2, \end{cases}$$

единичная треугольная функция

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0 & \text{для других } t, \end{cases}$$

единичная ступенчатая функция Хевисайда

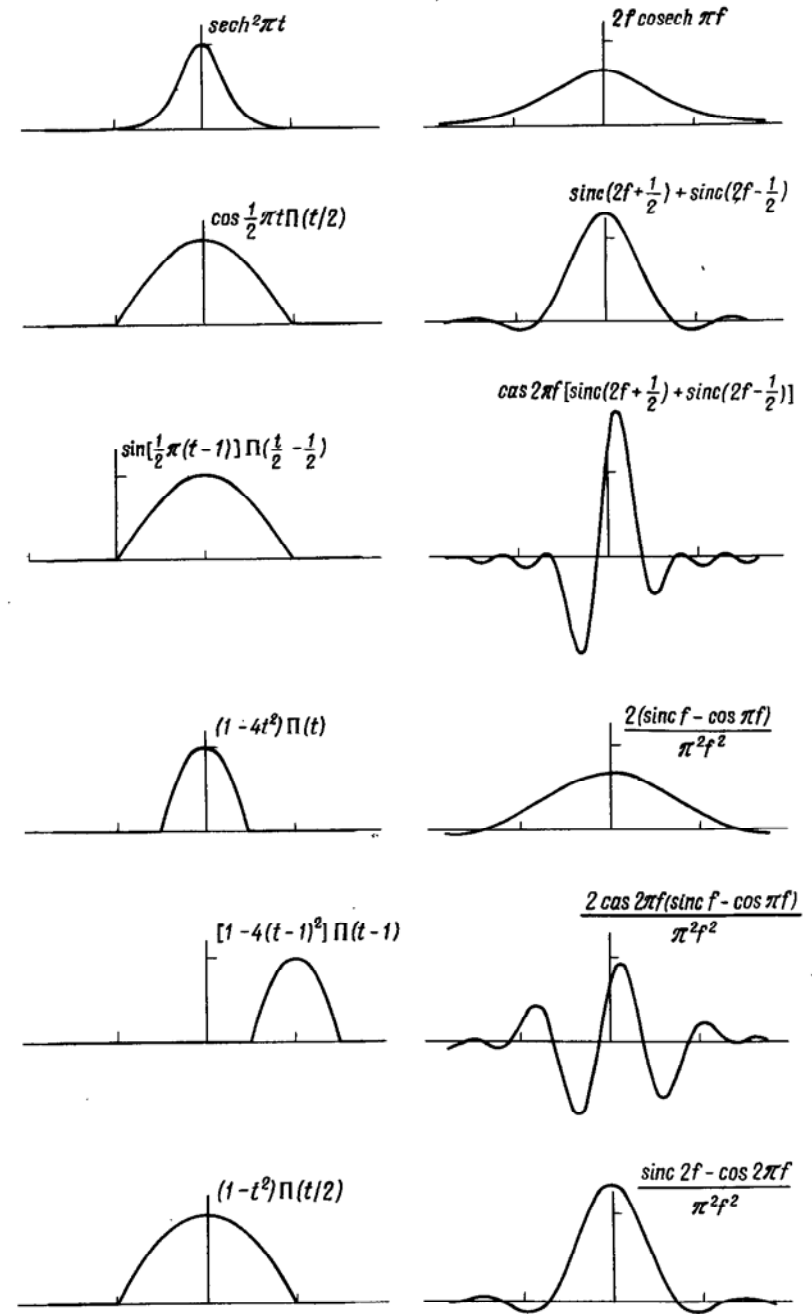
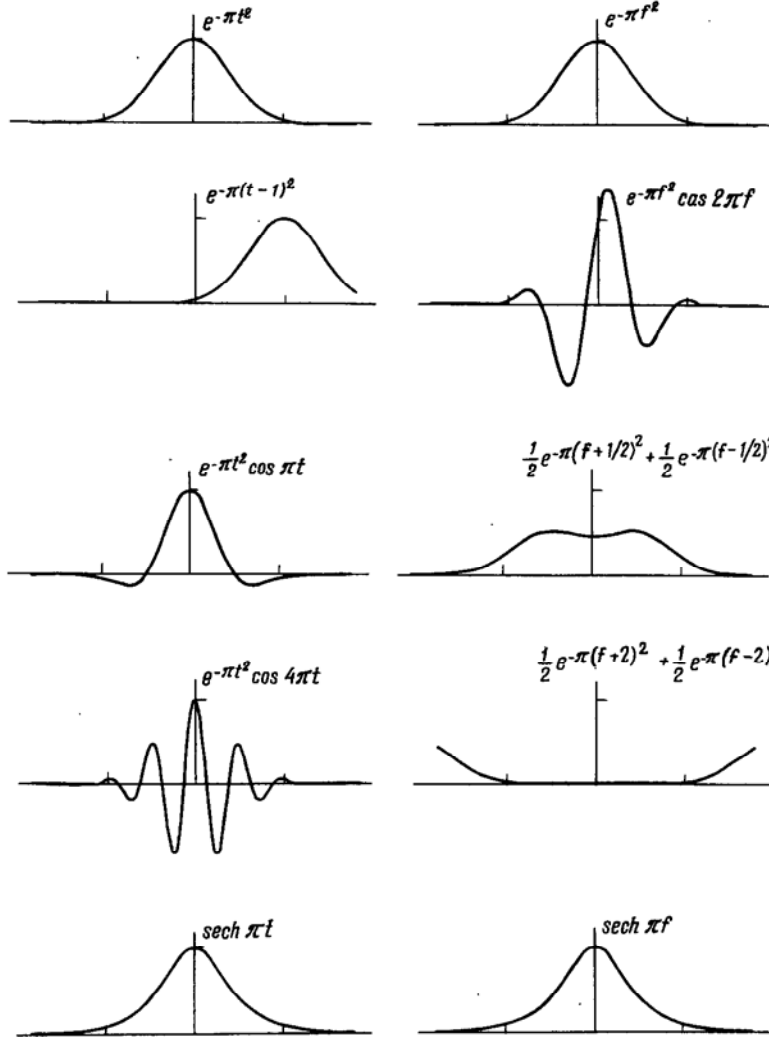
$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

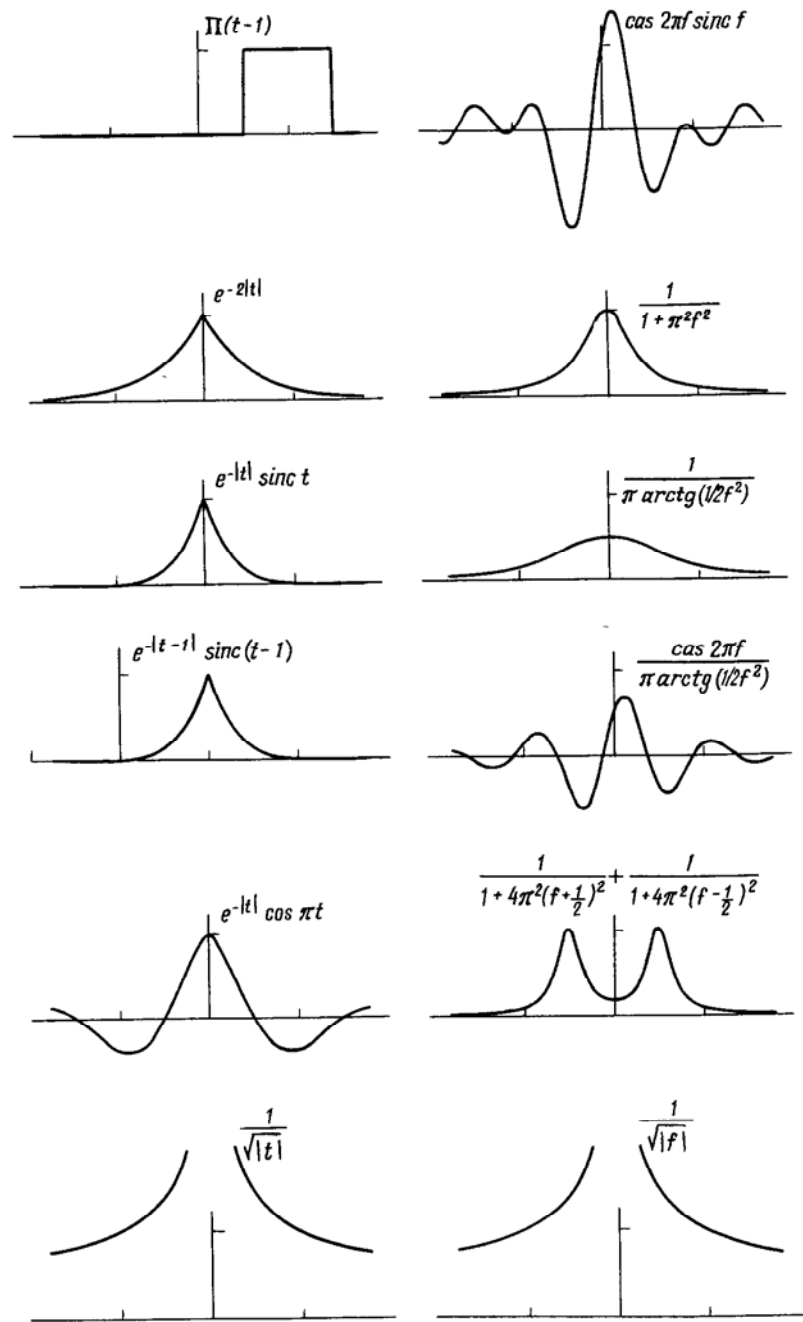
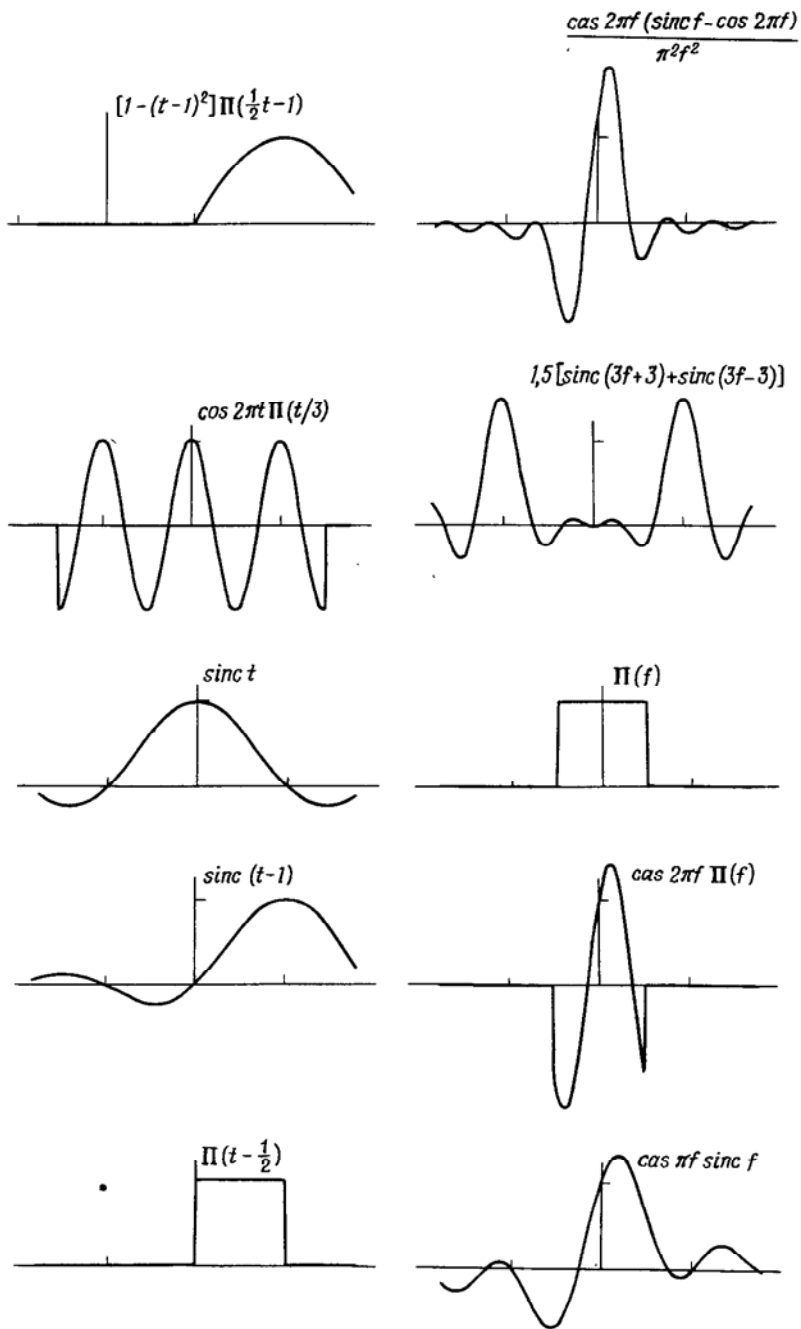
Отметки на осях координат означают соответствующие единичные интервалы.

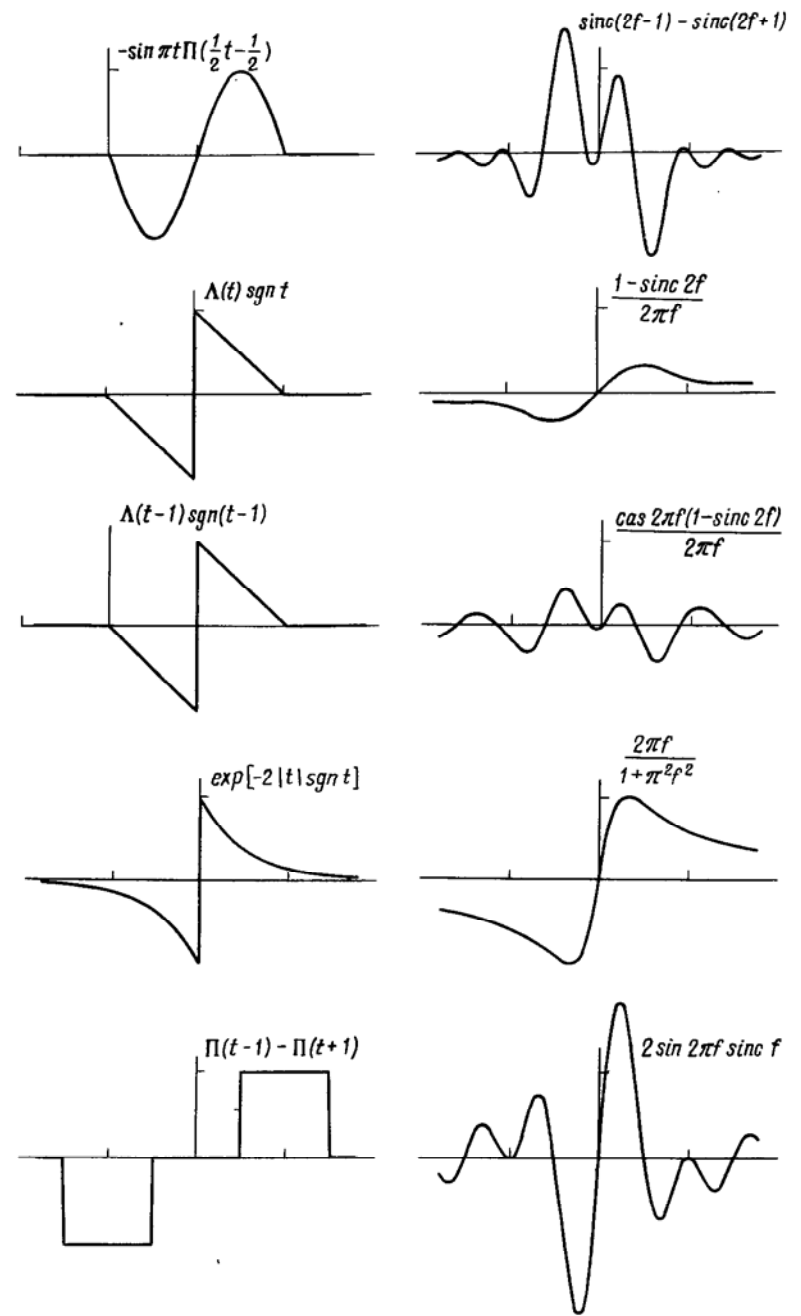
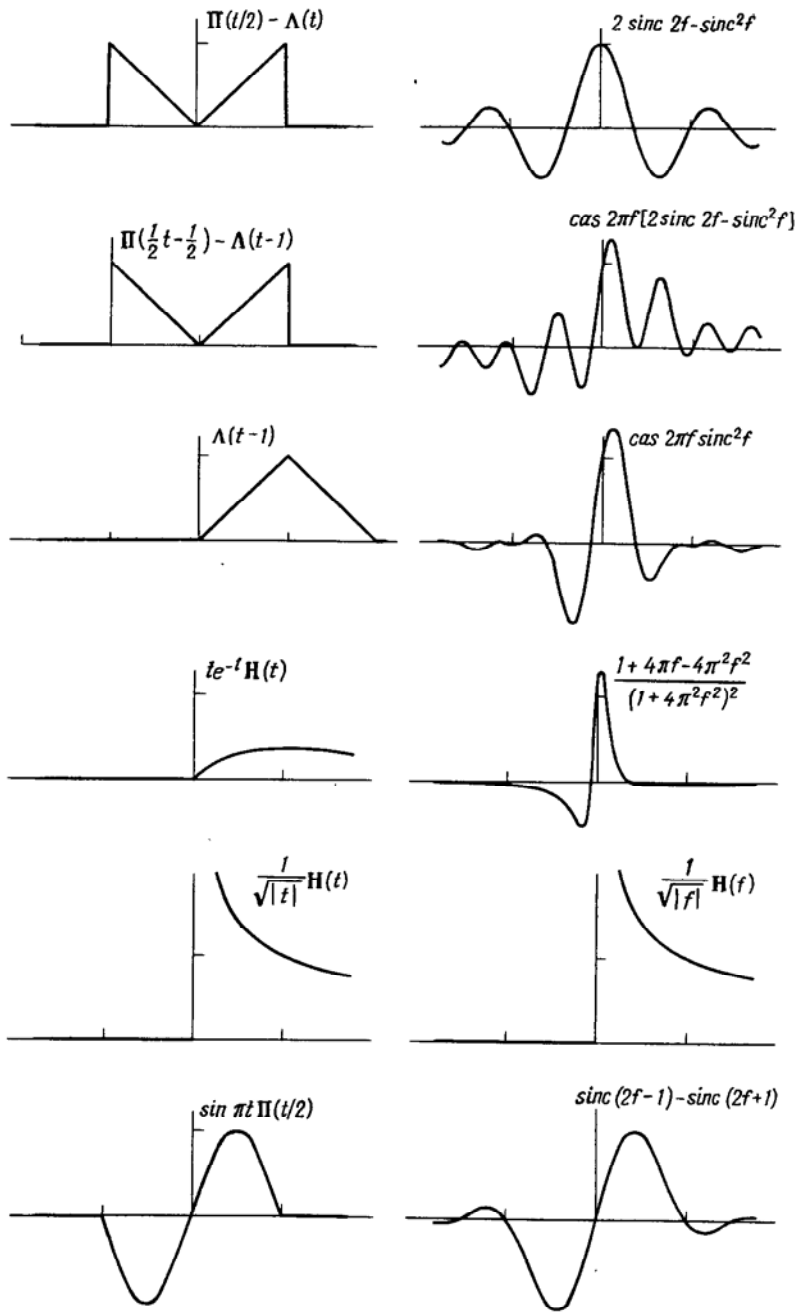
Наряду с примерами, для которых даются аналитические выражения, приводятся графики для ряда исходных функций в форме многоугольников, пересекающих оси абсцисс и ординат соответ-

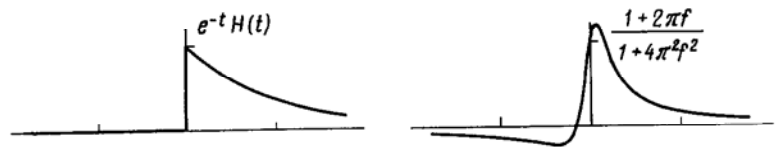
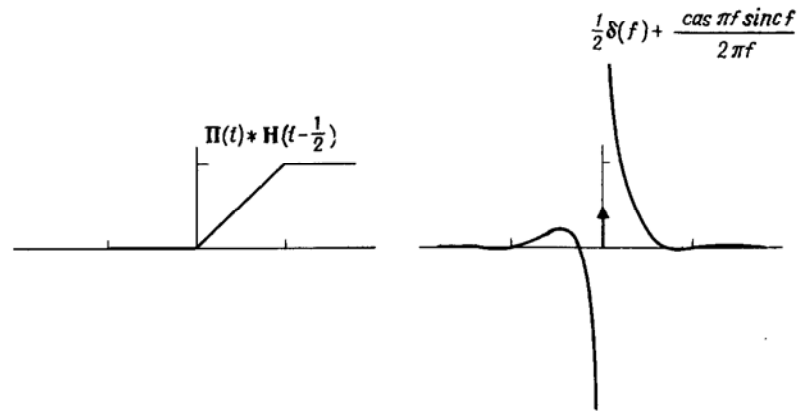
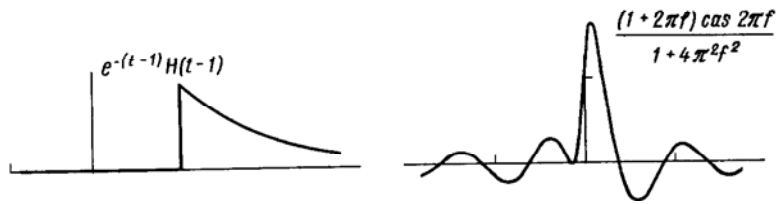
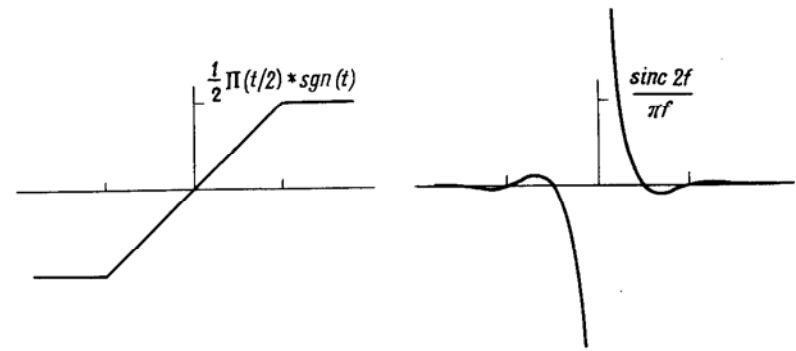
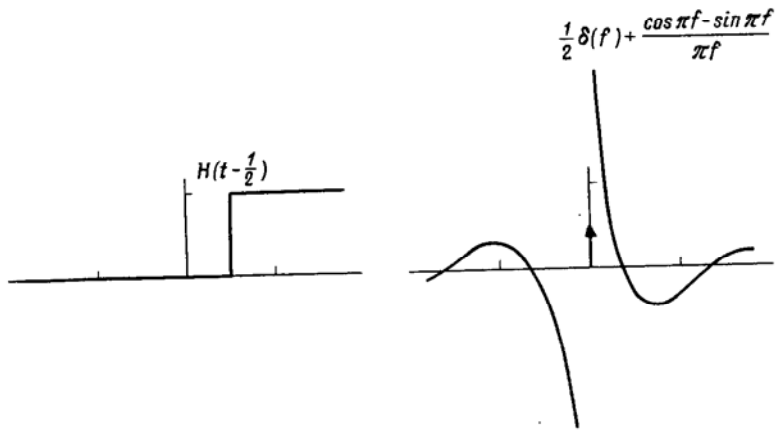
венно в точках τ , f_c . Значения ординат f_c представляют собой целые числа или простые дроби и могут быть считаны с графиков на основе указанных масштабов. Аналитические выражения для преобразований Хартли этих функций не приводятся, но при необходимости они могут быть получены из соотношения

$$H(f) = \text{sinc}^2 f \sum_{\tau} f_c \cos 2\pi f \tau.$$

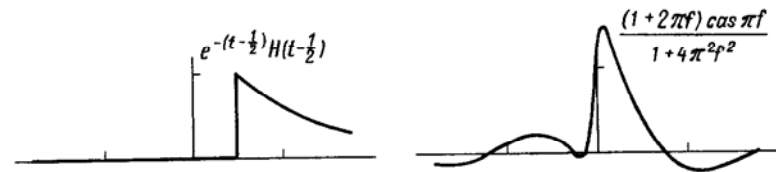








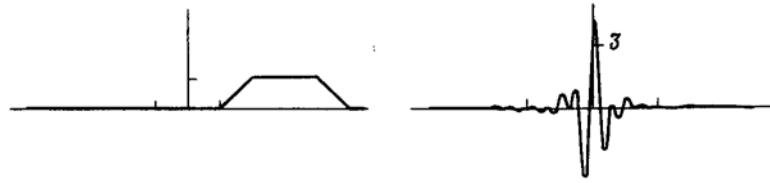
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 сумма=2



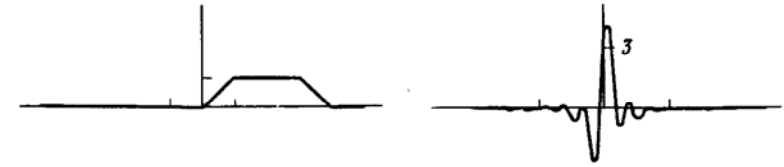
0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 сумма=3



0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 сумма=3



0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 сумма=3



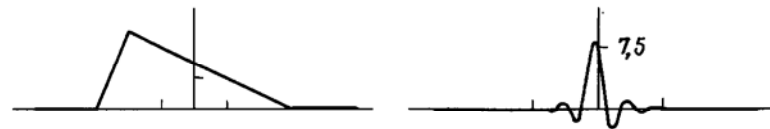
0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 сумма=4



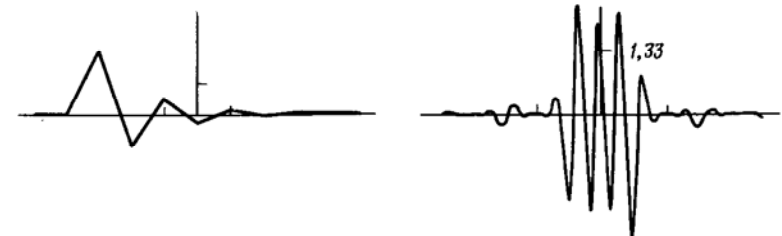
0 0 0 0 0 1 2 1 0,5 0,25 0 сумма=4,75



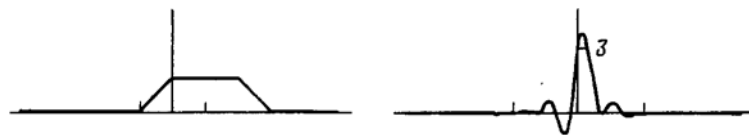
0 0 0 2,5 2 1,5 1 0,5 0 0 0 сумма=7,5



0 0 2 -0,999 0,5 -0,249 0,125 -0,0 сумма=1,328125



0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 сумма=3



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5	Примеры	67
Предисловие	7	Теоремы для двумерных преобразований	67
Глава 1. Введение	8	Круговая симметрия	69
Глава 2. Преобразование Хартли	14	Двумерная фильтрация	69
Исходная формулировка	14	Цикличность для двумерного случая	71
Преобразование Хартли	17	Трехмерный случай	73
Четная и нечетная составляющие	18	Задачи	73
Формулы связи	18	Глава 7. Факторизация матрицы преобразования	76
Примеры	19	Матричное представление дискретного оператора	76
Энергетический и фазовый спектры	23	Перестановка	78
Задачи	26	Перестановочные диаграммы	79
Глава 3. Теоремы	29	Перестановочная матрица	82
Соответствие операций	30	Ячейчатая структура перестановочной диаграммы	83
Свертка	31	Каскадные матрицы	85
Соотношения между преобразованиями во временной и частотной областях	31	Переход к дискретному преобразованию Фурье	88
Задачи	32	Задачи	90
Глава 4. Дискретное преобразование Хартли	34	Глава 8. Алгоритм быстрого преобразования	91
Дискретное преобразование Хартли	34	Определяющие соотношения	91
Физический смысл величин t и v	35	Свойства $N \log N$	93
Четная и нечетная составляющие	35	Повторное разбиение последовательностей	95
Примеры дискретных преобразований Хартли	36	Преобразование с использованием разложения на подпоследовательности	96
Степени свободы	39	Общая формула разложения	97
Другие вещественные ядра	39	Соотношения для случая $N = 16$	100
Теоремы	40	Направленный сигнальный граф	101
Выводы	43	Вычисление с замещением	103
Задачи	43	Анализ временных затрат на вычисление с помощью полосковой диаграммы	104
Глава 5. Цифровая фильтрация посредством свертки	46	Степени числа 2	107
Циклическая свертка	47	Тригонометрические функции	108
Дополнение нулями	49	Быстрое вычисление синусов	110
Обращение свертки	50	Операция быстрого поворота	112
Теорема о свертке	51	Быстрая перестановка	114
Теорема о свертке в частотной области (спектральное сглаживание)	53	Преобразование для последовательностей с основанием 4 и другие модификации	115
Числовой пример свертки	53	Ранее применявшиеся подходы к преобразованию вещественных данных	117
Коэффициент N^{-1}	55	Задачи	120
Числовой пример корреляционной функции	56	Глава 9. Преобразование Хартли в оптике	121
Низкочастотная фильтрация	57	Целесообразность преобразования Хартли в оптике	121
Подчеркивание границ	59	Свойства симметрии	122
Свертка с использованием быстрого преобразования Хартли	60	Осуществление преобразования Хартли, использующее поляризацию	125
Способ без использования перестановок	61	Практическое осуществление	125
Свертка как умножение матриц	62	Источник некогерентного излучения	126
Задачи	63	Пример	127
Глава 6. Двумерные преобразования	65	Голография в плоскости Хартли	129
Двумерное преобразование Хартли	65	Приложение 1. Программы вычислений на ЭВМ	131
Симметрия и антисимметрия	66	Приложение 2. Атлас преобразований Хартли	163

Научное издание

Роналд Брейсуэлл

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ

Заведующий редакцией Ю. А. Кузьмин
Ст. научный редактор М. Я. Рутковская
Художник А. Я. Коршунов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор О. Г. Лапко
Корректор Н. А. Гиря

ИБ № 4361

Сдано в набор 25.09.89. Подписано к печати 14.03.90. Формат 60 × 90^{1/16}. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Объем 5,5 бум.л. Усл. печ. л. 11,0. Усл. кр.-отг. 22,13. Уч. изд. л. 11,89. Изд. № 8/7062. Тираж 10 000 экз. Зак. 1236. Цена 1 р. 30 коп.

Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати, 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Можайский полиграфкомбинат В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати.
г. Можайск, ул. Мира, 93.