

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Учебное пособие по курсам «Основы кибернетики» и
«Структурная реализация дискретных функций»

Москва 2004

УДК 519.17, 519.71

ББК 22.18

Л 30

Ложкин С.А. «Лекции по основам кибернетики» (учебное пособие для студентов) — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001), 2004 г. — 253 с.

Пособие включает в себя основную часть материала из программы обязательного для всех студентов факультета ВМиК МГУ курса «Основы кибернетики». Кроме того, в нем содержится изложение ряда вопросов, входящих в программы курсов «Структурная реализация дискретных функций» и «Математические вопросы синтеза СБИС», которые являются обязательными для студентов специализирующихся по математической кибернетике. В нем предпринята попытка единого систематического изложения основных результатов теории дискретных управляющих систем в рамках общего методологического подхода, предложенного С. В. Яблонским, с использованием научных результатов и методических наработок последних лет в области дискретной математики и математической кибернетики. Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм. Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В третьей главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. В четвертой главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем.

Рецензенты:

Алексеев В. Б., профессор, д.ф.-м.н.

Гуров С. И., доцент, к.ф.-м.н.

Печатается по решению Редакционно-издательского Совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова.

ISBN 5-89407-200-X

© Издательский отдел
факультета вычислительной
математики и кибернетики
МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 6 |
| Введение | 8 |
| 1 Представление функций дизъюнктивными нормальными формами и связанные с ним задачи | 11 |
| 2 Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления | 12 |
| §1 Основные понятия из теории графов, сетей, схем | 12 |
| §2 Представление формул с помощью деревьев. Оптимизация подобных формул по глубине . . | 20 |
| §3 Схемы из функциональных элементов и операции над ними. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ | 28 |
| §5 Контактные схемы с одним входом и π -схемы, оценка их числа | 49 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Эквивалентные преобразования управляющих систем | 62 |
| §1 | Эквивалентные преобразования схем на основе тождеств. Моделирование эквивалентных преобразований формул в классе схем из функциональных элементов и их «ускорение» | 62 |
| §2 | Эквивалентные преобразования формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$. Полнота системы основных тождеств | 70 |
| §3 | Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств . . . | 79 |
| §4 | Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем | 88 |
| 4 | Синтез и сложность управляющих систем | 95 |
| §1 | Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и оценки сложности функций | 95 |
| §2 | Каскадные схемы и адресующие программы. Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов, метод Шеннона | 105 |
| §3 | Нижние мощностные оценки функций Шеннона | 119 |

| | | |
|-------------------|--|------------|
| §4 | Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ | 123 |
| §5 | Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба. Асимптотика сложности контактного дешифратора | 128 |
| §6 | Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ | 132 |
| §7 | Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем | 135 |
| Литература | | 142 |

Предисловие

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–7 семестрах и является обязательным для всех студентов, обучающихся по специальности 01.02 — прикладная математика и информатика. При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от специализации.

Пособие написано на основе лекций по данному курсу, которые автор читает уже более 20 лет (до 1987 г. совместно с С. В. Яблонским). Оно включает в себя базовую часть программы курса «Основы кибернетики», а также содержит изложение ряда дополнительных вопросов, входящих в программы курсов «Структурная реализация дискретных функций» и «Математические вопросы синтеза СБИС», которые являются обязательными для студентов специализирующихся по математической кибернетике. Дополнительным вопросам посвящены ?? и ?? главы 2, ?? главы 3, §7 главы 4 и другие материалы, расположенные либо в конце некоторых параграфов после знака ∇ , либо между знаками ∇ , \triangle . Как правило, базовый материал одного параграфа рассматривается на одной лекции. Исключение составляют ?? главы 1 и §1 главы 2, состоящие, в основном, из понятий, определений и фактов общего характера, значительная часть которых была изложена в ряде предшествующих курсов. Материал этих параграфов вводится по мере его востребованности при рассмотрении других вопросов.

В пособии предпринята попытка единого систематического изложения основных результатов теории дискретных управляющих систем в рамках общего методологического подхода, предложенного С.В. Яблонским [27–30], с использованием уже известных методов (см., например, [27–30, 14, 19, 5, 6, 21]), а также научных результатов и методических наработок последних лет в области дискретной математики и математической кибернетики (см., в частности, [12, 13, 1–3, 22]). Это позволило впервые изложить в учебном пособии асимптотически наилучшие методы синтеза формул в произвольном базисе, релейно-контактных схем и двоичных решающих диаграмм (ср. [16, 15, 11]). Библиография, приведенная в пособии, не претендует на систематичность и полноту (более подробную библиографию по различным разделам курса см., например, в [19, 6, 30, 28]).

Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры математической кибернетики за полезные обсуждения некоторых вопросов, изложенных в пособии, а студенту А. Д. Поспелову — за кропотливую работу по компьютерному набору и верстке всего текста этого пособия.

*Памяти С. В. Яблонского
посвящается.*

Введение

Теория дискретных управляющих систем представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпонировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в данном пособии для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм, построение тестов для таблиц и т. п.).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе изучаются эквивалентные преобразования схем на основе тождеств во всех основных классах управляющих систем. Для каждого из них приводится система «основных» тождеств, доказывається полнота этой системы и изучаются вопросы ее избыточности.

В четвертой главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывається минимальность некоторых схем.

Глава 1

Представление функций дизъюнктивными нормальными формами и связанные с ним задачи

Глава 2

Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления

§1 Основные понятия из теории графов, сетей, схем

Понятие графа, которое обобщает понятие бинарного отношения (см. ?? гл. 1), часто используется для описания структурных моделей, связанных с вычислениями, представлениями или реализациями дискретных функций. Напомним основные понятия и обозначения из теории графов, сетей и схем, а также сформулируем некоторые известные результаты (см., например, [3, 27, 8]).

Пару (V, E) , где E — сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из V , будем, как обычно, называть *графом с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$* . При этом длина сочетания E считается числом ребер графа G и обозначается через $|E|$. Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами* или, иначе, *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами (дугами)*, дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных)

ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Заметим, что бинарное отношение представляет собой ориентированный граф без параллельных дуг. При этом симметричное антирефлексивное отношение можно рассматривать как неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро *инцидентно* составляющим его вершинам, а дуга (u, v) *исходит* или, иначе, *выходит* из вершины u и *заходит* или, иначе, *входит* в вершину v . Число ребер, инцидентных вершине v (входящих в v , выходящих из v) в графе G , называется *степенью* (соответственно *полустепенью захода*, *полустепенью исхода*) вершины v в графе G и обозначается через $d_G(v)$ (соответственно $d_G^+(v)$, $d_G^-(v)$). Заметим, что

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|, \quad (1.1)$$

и что $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$ ($d_G(v) = d_G^+(v) = d_G^-(v)$) в случае ориентированного (соответственно неориентированного) графа G . Вершина v называется *изолированной вершиной* (*стоком*, *истоком*) графа G , если $d_G(v) = 0$ (соответственно $d_G^-(v) = 0$, $d_G^+(v) = 0$).

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается *подграфом графа G , натянутым на множество вершин V'* , если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V' . Подграф, содержащий все вершины исходного графа, называется его *остовным подграфом*. Легко видеть, что подграф всегда можно получить из исходного графа в результате (многократного) применения операций *удаления ребра* или *удаления вершины*. При этом удаление вершины, как обычно, подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер.

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность C , состоящая из ребер e_1, e_2, \dots, e_n , где $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех $i, i \in [1, n]$, называется $(v_1 - v_{n+1})$ -*путем* графа G . При этом вершина v_1 (v_{n+1}) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, вершины v_2, \dots, v_n — его *внутренними* вершинами, а число n — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается *замкнутым путем* (соответственно *циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Будем говорить, что *вершина u достижима из вершины v в графе G* , где $u, v \in V(G)$, если $u = v$ или в G существует $(v - u)$ -цепь. Заметим, что отношение достижимости вершин графа G является рефлексивным и транзитивным, а если G — неориентированный граф, то и симметричным. Следовательно, множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе \widehat{G} , который получается из графа G заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ($G = \widehat{G}$, если G — неориентированный граф). При этом подграф графа G , натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа G , а множество всех его связных компонент обозначается через $c(G)$. Граф G называется *связным*, если $|c(G)| = 1$.

Напомним, что

$$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geq 0 \quad (1.2)$$

и что левая часть (1.2) называется *цикломатическим числом* графа G . Напомним также, что это число равно максимальному числу линейно независимых относительно операции симметрической разности¹ остовных подграфов графа G , состоящих из одного простого цикла и изолированных вершин.

Множество S , которое состоит из ребер графа $G = (V, E)$ и обладает тем свойством, что вершина u , $u \in V$, достижима из вершины v , $v \in V$, в графе G , но не достижима из нее в графе $(V, E \setminus S)$, называется $(u|v)$ -сечением графа G . Легко видеть, что любая $(u - v)$ -цепь графа G имеет хотя бы одно общее ребро с любым $(u|v)$ -сечением этого графа. Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется *тупиковым*.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе G всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины v можно определить ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину $(u - v)$ - (соответственно $(v - u)$ -) путей графа G , где u — один из истоков (соответственно стоков) G . Легко видеть, что отношение достижимости является отношением частичного порядка на множестве вершин ориентированного ациклического графа и обратно.

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева G , как известно, имеет место

¹Под симметрической разностью графов G_1 и G_2 понимается граф G , для которого

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2), \\ E(G) = (E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus (E(G_1) \cap E(G_2)).$$

равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \quad (1.3)$$

Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*. Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

Дерево (ориентированное дерево) D , являющееся остовным подграфом графа G , называется его *остовным поддеревом*, а дерево D' , которое получается из D в результате «подсоединения» всех не вошедших в него ребер G к своим «начальным» вершинам, — *остовным наддеревом* графа G . Очевидно, что при этом граф G может быть получен из дерева D' в результате присоединения некоторых вершин степени 1 (листьев) к другим его вершинам. Заметим, что любой неориентированный связный граф, а также любой ориентированный ациклический граф с 1 стоком всегда имеют остовные поддерева и наддерева соответствующего типа.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частности, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит. Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если для любой его вершины v , $v \in V(G)$, все ребра, входящие в v , упорядочены и пронумерованы числами $1, 2, \dots, d_G^+(v)$. Будем считать, что ребра и вершины остовного поддерева, а также ребра связанного с ним остовного наддерева помеченного графа имеют те же самые пометки, которые они имели

в исходном графе. Это означает, в частности, что остовное наддерево ориентированного ациклического упорядоченного графа является упорядоченным.

Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются *изоморфными*, если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi : V' \rightarrow V''$ и $\psi : E' \rightarrow E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для (конечного) множества графов \mathcal{G} через $|\mathcal{G}|$ будем обозначать число попарно неизоморфных графов в \mathcal{G} . Известно, что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leq 4^q, \quad (1.4)$$

где $\mathfrak{D}(q)$ — множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Введем теперь общие определения и обозначения, связанные с сетями и «абстрактными» схемами, с реализацией ими функций, а также с некоторыми структурными представлениями схем.

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G — граф, а V' и V'' — выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется (p, q) -сетью. При этом выборка V' (выборка V'') считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее i -я вершина называется i -м *входным* (соответственно *выходным*) *полюсом* или, иначе, i -м *входом* (соответственно *выходом*) сети \mathcal{G} . Вершины, не участвующие во входной и выходной выборках сети, считаются ее *внутренними* вершинами.

Для того чтобы выделить входную и выходную выборки сети $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, будем записывать ее в виде $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V'; V'')$ или $\mathcal{G} = G(V'; V'')$. Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделен-*

ными) полюсами. При этом в случае неразделенных полюсов сеть $\mathcal{G} = (G; V; V) = \mathcal{G}(V; V)$ будем записывать в виде $\mathcal{G} = (G; V) = \mathcal{G}(V)$. Как правило, входы и выходы (полюса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Примером сети является корневое дерево, входами которого считаются его листья, а выходом — корень. При этом порядок листьев во входной выборке ориентированного упорядоченного корневого дерева \mathcal{D} задается их «естественной» нумерацией τ , отображающей множество листьев дерева \mathcal{D} в \mathbb{N} так, что $\tau(v') < \tau(v'')$ тогда и только тогда, когда $k' < k''$, где k' и k'' — номера дуг, по которым цепи, соединяющие листья v' и v'' соответственно с корнем \mathcal{D} , входят в свою первую общую вершину.

Для произвольных выборок $V' = (v'_1, \dots, v'_p)$ и $V'' = (v''_1, \dots, v''_q)$ из множества $V(G)$ графа G определим матрицу достижимости выборки V' из выборки V'' как матрицу M , $M \in B^{p,q}$, для которой

$$M \langle i, j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v''_j \text{ достижима из } v'_i, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае $V' = V''$ матрица M является рефлексивной и транзитивной¹, а если, кроме того, G — неориентированный граф, то и симметричной матрицей. Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы M ,

¹Матрица M , $M \in B^{m,m}$, считается рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда она задает рефлексивное (соответственно транзитивное) отношение на множестве $[1, m]$, то есть

$$M \langle i, i \rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \geq M \langle i, j \rangle)$$

для любого i (соответственно любых i, j и t) из отрезка $[1, m]$.

$M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда, когда²

$$M^2 = M. \quad (1.5)$$

Действительно, полагая $\widehat{M} = M^2$, получим

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = \bigvee_{t=1}^m M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \quad (1.6)$$

и, следовательно, в случае $\widehat{M} = M$ неравенства транзитивности

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \geq M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle$$

будут выполнены при любых i, j, t из отрезка $[1, m]$. С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы M , в силу (1.6), следует, что

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \vee \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq m \\ t \neq i, j}} M \langle i, j \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \right) = M \langle i, j \rangle.$$

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется *матрицей достижимости* этой сети.

Под «абстрактной» схемой понимается сеть, часть пометок которой составляют входные переменные и в каждой вершине которой реализуется функция (столбец из функций) от этих переменных. При этом считается, что сама схема реализует систему (матрицу), состоящую из функций (соответственно столбцов функций), реализованных на ее выходах. В качестве выходных пометок схемы используются, как правило, специальные выходные переменные,

²Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции.

а схема Σ с входными переменными (входами) x_1, \dots, x_n и выходными переменными z_1, \dots, z_m записывается в виде $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$.

Схему, которая реализует систему ФАЛ $Q_n (J_n, \mu_n)$ будем называть *дешифратором* (соответственно *дизъюнктивным дешифратором*, *мультиплексором*) *порядка n* . Схемы, реализующие равные системы функций, называются *эквивалентными*. Предполагается, что изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем \mathcal{U} выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|, \quad (1.7)$$

где $\|\mathcal{U}\|$ — число попарно не эквивалентных схем в \mathcal{U} .

§2 Представление формул с помощью деревьев. Оптимизация подобных формул по глубине, оценка числа формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

В ?? главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею функции. Рассмотрим способ представления формул алгебры логики с помощью ориентированных упорядоченных деревьев.

Пусть, по-прежнему, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ — базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что B — полный базис (см. ?? главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$.

Сопоставим каждому ФС φ_i , $i = 1, \dots, b$, функциональный элемент (ФЭ) \mathcal{E}_i , имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j -я БП x_j ФАЛ φ_i , где $j = 1, \dots, k_i$, и

один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 2.1а). Упрощенный вариант изображения ФЭ \mathcal{E}_i в виде вершины графа с пометкой φ_i , в которую входят k_i упорядоченных, то есть пронумерованных числами $1, \dots, k_i$ дуг, показан на рис. 2.1б. При этом предполагается, что дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, соответствует j -му входу ФЭ \mathcal{E}_i . В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом φ_i и функциональным элементом \mathcal{E}_i .

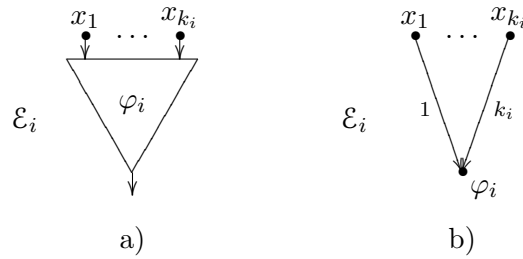


Рис. 2.1: функциональный элемент \mathcal{E}_i

Множество всех формул над базисом \mathcal{B} будем обозначать через $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ и положим $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}^{\Phi} = \mathcal{U}^{\Phi}$. Индукцией по глубине каждой формуле глубины q над \mathcal{B} можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q , каждому листу которого приписана БП из \mathcal{X} , а каждой внутренней вершине — ФС из \mathcal{B} . Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.2а). Формуле \mathcal{F} вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}), \quad (2.1)$$

которая является формулой глубины $(q + 1)$ над \mathcal{B} , где

$$q = \max \{q_1, \dots, q_{k_i}\}, \quad (2.2)$$

а q_j , $j = 1, \dots, k_i$, — глубина главной подформулы \mathcal{F}_j формулы \mathcal{F} , сопоставим дереву \mathcal{D} глубины $(q + 1)$ с корнем v , показанное на рис. 2.2b, где \mathcal{D}_j , $j = 1, \dots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j , которое соответствует формуле \mathcal{F}_j .

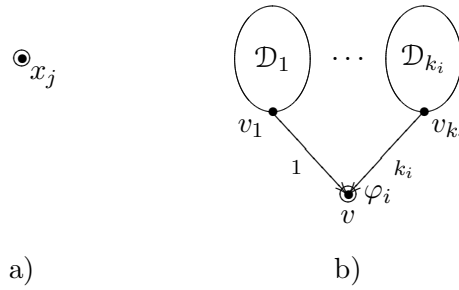


Рис. 2.2: представление формулы деревом

Заметим, что формула \mathcal{F} по сопоставленному ей дереву \mathcal{D} восстанавливается однозначно, и что при этом поддеревья дерева \mathcal{D} взаимнооднозначно сопоставляются подформулам формулы \mathcal{F} . На рис. 2.3а показано дерево, соответствующее формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2), \quad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом \mathcal{B}_0 и реализует ФАЛ $\mathfrak{s}_3^{\{0,2,3\}}$.

Для удобства будем считать, что в $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом \mathcal{B} , что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и что этой системе формул соответствует система из деревьев, сопоставленных ее формулам.

Заметим, что ранг $R(\mathcal{F})$ формулы \mathcal{F} равен числу листьев связанного с ней дерева \mathcal{D} , ее сложность $L(\mathcal{F})$ равна

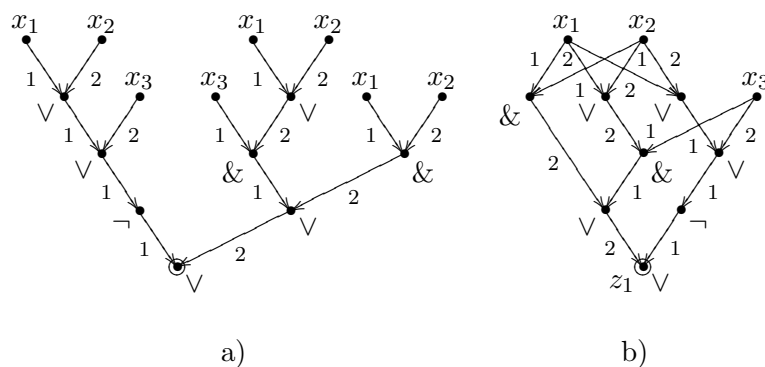


Рис. 2.3: представление формулы (2.3) деревом и квазидеревом

числу остальных вершин \mathcal{D} , а ее глубина $D(\mathcal{F})$ — глубине его корня. Заметим также, что порядок вхождения БП в запись формулы \mathcal{F} при ее просмотре слева направо соответствует последовательности появления БП на листьях связанного с ней дерева, просматриваемых в «естественном» порядке (см. §1).

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между параметрами формул над базисом \mathcal{B}_0 . Заметим, что представляя формулы деревьями, такие соотношения можно доказывать более простым и наглядным способом. Так, индукцией по глубине формулы-дерева легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, выполняются неравенства*

$$R(\mathcal{F}) \leq L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \quad (2.4)$$

где $L_{\&, \vee}(\mathcal{F})$ — число ФЭ $\&$ и \vee в \mathcal{F} .

Следствие.

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \quad (2.5)$$

Формулы, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств коммутативности и ассоциативности (см. ?? гл. 1), называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы получаются друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и поэтому могут отличаться друг от друга только глубиной.

Заметим, что сложность характеризует время вычисления формулы на одном процессоре, а глубина — время ее параллельного вычисления на неограниченном числе процессоров. Поэтому оптимизация подобных формул по глубине является частным случаем «распараллеливания» вычислений.

Формулы из \mathcal{U}^Φ можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств де Моргана

$$\bar{\bar{x}}_1 = x_1, \quad \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2}, \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} \quad (2.6)$$

и преобразований подобия. Первое из тождеств (2.6) используется при этом для устранения нескольких последовательных вхождений $\Phi C \neg$ в оптимизируемой формуле, а два других — для выполнения перехода

$$\mathcal{F}' = \bar{\mathcal{F}}_1 \circ \dots \circ \bar{\mathcal{F}}_t = (\bar{\mathcal{F}}_1 \diamond \dots \diamond \bar{\mathcal{F}}_t),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$ и $t \geq 2$, во всех ее максимальных по включению подформулах вида \mathcal{F}' , формируемых с помощью преобразований подобия.

Формула, в которой все $\Phi C \neg$ встречаются только над БП, называется *формулой с поднятыми отрицаниями*. Легко видеть, что с помощью тождеств (2.6) любую формулу

из \mathcal{U}^Φ можно преобразовать в формулу с поднятыми отрицаниями. Заметим, что преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств (2.6) не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число ФС $\{\&, \vee\}$ в них.

Определим альтернирование $\text{Alt}(\mathcal{F})$ формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями как максимальное число изменений типов ФЭ $\&$ и \vee в цепях дерева, соответствующего формуле \mathcal{F} . Заметим, что альтернирование ЭК или ЭД равно нулю а альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

Теорема 2.1. *Для любой формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями из \mathcal{U}^Φ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что*

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}). \quad (2.7)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по рангу формулы \mathcal{F} . Если $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = 1$, то формула \mathcal{F} имеет вид $\mathcal{F} = x_i^\sigma$, $\sigma \in B$, и сама удовлетворяет неравенству (2.7).

Пусть неравенство (2.7) справедливо для любой формулы \mathcal{F}' такой, что $\mathcal{R}(\mathcal{F}') \leq (\mathcal{R} - 1)$, где $\mathcal{R} \geq 1$, и пусть формула \mathcal{F} имеет ранг \mathcal{R} . Представим формулу \mathcal{F} в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t),$$

где $t \geq 2$, формула $\Phi(y_1, \dots, y_t)$ при некотором \circ , $\circ \in \{\&, \vee\}$, имеет вид $y_1 \circ \dots \circ y_t$, а альтернирование подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$ формулы \mathcal{F} не больше, чем a' , где $a' = \max\{0, (a-1)\}$.

Положим

$$d = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a - a' \quad \text{и} \quad d_i = \lceil \log(L(\mathcal{F}_i) + 1) \rceil,$$

где $i = 1, \dots, t$, а затем для каждой формулы \mathcal{F}_i построим по индуктивному предположению подобную ей формулу $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что

$$D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + a'.$$

Заметим, что при этом

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} \leq 2^d \quad (2.8)$$

Действительно, если $a - a' = 1$, то

$$2^d \geq 2(L(\mathcal{F}) + 1) = \sum_{i=1}^t 2(L(\mathcal{F}_i) + 1) \geq \sum_{i=1}^t 2^{d_i},$$

а если $a = a' = 0$, то $\mathcal{F} = x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_t^{\sigma_t}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} = \sum_{i=1}^t (L(x_i^{\sigma_i}) + 1) = L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^d.$$

Заметим также, что перенумерацией формул $\check{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, \dots, t$, можно добиться выполнения неравенств:

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_t. \quad (2.9)$$

Пусть теперь Φ' — формула вида $y_1 \circ \dots \circ y_{2^d}$, которой соответствует полное двоичное d -ярусное дерево, а формула Φ'' получается из Φ' удалением последних q , где $q = (2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t})$ и $q \geq 0$ в силу (2.8), вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны. В силу (2.9) первые 2^{d_1} вхождений БП в Φ'' составляют подформулу Φ_1 , которой соответствует полное двоичное d_1 -ярусное дерево, содержащее 2^{d_1} вхождений БП в Φ'' , следующие 2^{d_2} вхождений БП в Φ'' — подформулу Φ_2 , которой соответствует полное двоичное d_2 -ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних 2^{d_t} вхождений БП в Φ'' , составляющих подформулу Φ_t , которой соответствует полное двоичное d_t -ярусное дерево.

Обозначим через $\check{\mathcal{F}}$ формулу, которая получается из Φ'' заменой подформулы Φ_i на формулу $\check{\mathcal{F}}_i$ $i = 1, \dots, t$. Заметим, что $\check{\mathcal{F}}$ подобна формуле \mathcal{F} , имеет глубину не больше, чем

$$d + a' = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a,$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (2.7).

Теорема доказана. \square

Следствие 1. *Для любой ЭК или ЭД K существует подобная ей формула \check{K} такая, что*

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(k) + 1) \rceil,$$

которая, в силу (2.4) минимальна по глубине.

Следствие 2. *Для любой ДНФ или КНФ \mathfrak{A} существует подобная ей формула $\check{\mathfrak{A}}$ такая, что*

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

Обозначим через $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}(L, n)$ ($\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}(L, n)$ и $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}[D, n]$) множество приведенных СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$ (соответственно формул $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$) над базисом \mathbb{B} , для которых $L(\Sigma) \leq L$ (соответственно $L(\mathcal{F}) \leq L$ и $D(\mathcal{F}) \leq D$), причем индекс \mathbb{B}_0 будем, как обычно, опускать. Заметим, что из неравенства (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{U}^{\Phi}[D, n] \subseteq \mathcal{U}^{\Phi}(2^D - 1, n). \quad (2.10)$$

Лемма 2.2. *Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства*

$$\|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)\| \leq (32n)^{L+1}, \quad (2.11)$$

$$\|\mathcal{U}^{\Phi}[D, n]\| \leq (32n)^{2^D}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Для того, чтобы задать с точностью до изоморфизма дерево \mathcal{D} , соответствующее формуле \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi(L, n)$, достаточно:

1. выбрать корневое ориентированное упорядоченное дерево \mathcal{D}' с не более, чем L' , внутренними вершинами, в каждую из которых входит не более двух дуг;
2. каждую внутреннюю вершину \mathcal{D}' , в которую входит одна дуга (две дуги), пометить ФС \neg (соответственно ФС $\&$ или \vee);
3. каждый лист \mathcal{D}' пометить одной из БП x_1, \dots, x_n . Заметим, что число ребер дерева \mathcal{D}' не больше чем $2L$, а число его листьев равно $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ и в силу (2.4) не превосходит $L+1$. Следовательно, число различных деревьев \mathcal{D} указанного вида в силу (1.4) не больше, чем

$$4^{2L} \cdot 2^L \cdot n^{L+1} \leq (32n)^{L+1},$$

что доказывает оценку (2.11). Неравенство (2.12) вытекает из (2.11) и (2.10).

Лемма доказана.

□

§3 Схемы из функциональных элементов и вычисляющие программы. Оценка числа схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего дерево, и где возможно

многократное использование промежуточных результатов. По существу СФЭ получается из системы деревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных поддеревьев (совпадающих подформул).

Пусть \mathcal{Z} — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом \mathcal{X} .

Определение. Схемой из функциональных элементов над базисом \mathcal{B} называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ , входная выборка которой состоит из всех истоков Σ , а вершины помечены следующим образом:

1. каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из \mathcal{X} (соответственно \mathcal{Z}), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
2. каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i , где $k_i = d_{\Sigma}^+(v)$.

Заметим, что в общем случае вершины в выходной выборке СФЭ могут повторяться, то есть одной и той же выходной вершине может быть сопоставлено несколько БП из \mathcal{Z} . Если множество $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ ($Z = \{z_{j_1}, \dots, z_{j_m}\}$) состоит из всех входных (соответственно выходных) БП СФЭ Σ , перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите \mathcal{X} (соответственно \mathcal{Z}), то, в соответствии с §1, будем записывать СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(X; Z)$ или $\Sigma = \Sigma(x; z)$, где $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$ — наборы БП, соответствующие множествам X и Z .

Схема Σ , которая получается из дерева \mathcal{D} , связанного с формулой \mathcal{F} из $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$, в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из \mathcal{Z} , называется квазидеревом, соответствующим

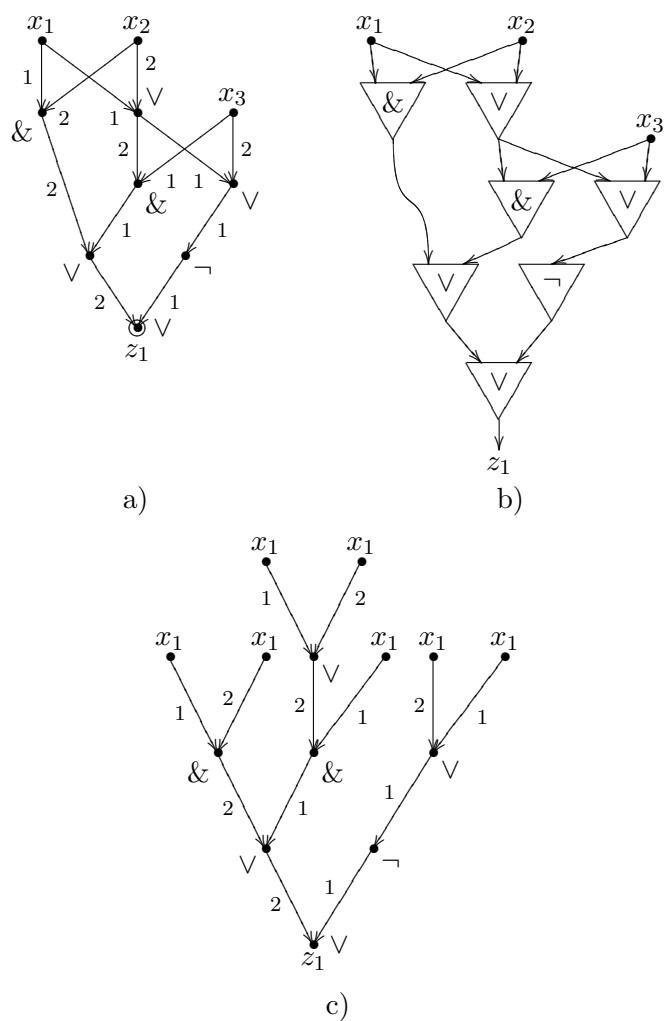


Рис. 3.1: СФЭ, полученная из квазидерева на рис. 2.3б, и ее остов

формуле \mathcal{F} . Заметим, что указанное квазидерево Σ однозначно определяет формулу \mathcal{F} и является СФЭ над базисом B . Из этого квазидерева путем «отождествления» (наложения) его изоморфных квазиподдеревьев можно получать и другие СФЭ, задающие формулу \mathcal{F} . На рис. 2.3b показано квазидерево над базисом B_0 с входными БП x_1, x_2, x_3 и выходной БП z_1 , которое получено из дерева, сопоставленного формуле (2.3) и изображенного на рис. 2.3a. На рис. 3.1a приведена СФЭ, полученная из данного квазидерева в результате отождествления двух его изоморфных квазиподдеревьев, а на рис. 3.1b дано более «наглядное» изображение этой СФЭ в виде системы соединенных соответствующим образом ФЭ.

Обозначим через \mathcal{U}_B^C множество всех СФЭ над базисом B , и пусть $\mathcal{U}^C = \mathcal{U}_{B_0}^C$. Заметим, что система квазидеревьев с общими входами, соответствующая системе формул над базисом B , является СФЭ над B , если выходам этих квазидеревьев приписаны различные выходные БП. В связи с этим формулы над B и их системы будем считать частным случаем СФЭ над B , полагая, что имеет место включение $\mathcal{U}_B^F \subseteq \mathcal{U}_B^C$. Заметим также, что СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, входит в \mathcal{U}_B^F тогда и только тогда, когда все стоки Σ , и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины Σ , отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

Определим теперь функционирование СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ над базисом B . Сначала индукцией по q , $q = 0, 1, \dots$, определим для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \dots, x_n)$ глубины q над базисом B . Если $q = 0$, то есть v — вход Σ , положим $\mathcal{F}_v = x_j$, где x_j — входная БП, сопоставленная вершине v . Пусть теперь v — вершина глубины $q + 1$, $q \geq 0$, схемы Σ , которая имеет пометку φ_i и в которую входит k_i дуг, причем дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, исходит из вершины v_j глубины q_j , где уже реализована формула

$\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$ глубины q_j , а для чисел q, q_1, \dots, q_{k_i} выполнено (2.2). Тогда в вершине v реализуется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$ вида (2.1), которая имеет глубину $(q + 1)$. При этом считается, что в вершине v СФЭ Σ реализуется ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой \mathcal{F}_v , и что СФЭ Σ реализует систему ФАЛ $F, F = (f_1, \dots, f_m)$, или реализует систему булевых уравнений $z_1 = f_1, \dots, z_m = f_m$, если $f_j, j = 1, \dots, m$, — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ Σ , которой приписана БП z_j .

Заметим, что квазидерево, которое соответствует формуле \mathcal{F} , реализующей ФАЛ f , а также любая СФЭ, полученная из него отождествлением изоморфных квазиподдеревьев, реализует и формулу \mathcal{F} , и ФАЛ f . Так, СФЭ на рис. 3.1 реализует формулу (2.3) и ФАЛ $\mathfrak{s}_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$, или уравнение $z_1 = \mathfrak{s}_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$.

В соответствии с §1 две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ , которой сопоставлен ФЭ \mathcal{E}_i с симметрической ФАЛ φ_i , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование Σ . В связи с этим в подобных случаях номера дуг, входящих в вершину v , могут не указываться. Легко видеть, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных СФЭ реализуются одинаковые формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные СФЭ эквивалентны, то есть для СФЭ справедливо неравенство (1.7).

Вершина СФЭ называется *висячей*, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим,

что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам.

Также как и для формул, для каждой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$, определим следующие параметры (функционалы сложности):

1. $L(\Sigma)$ — сложность Σ , то есть число всех ее ФЭ;
2. $D(\Sigma)$ — глубина Σ , то есть максимальная глубина ее вершин;
3. $\mathcal{R}(\Sigma)$ — ранг Σ , то есть число дуг, исходящих из ее входов.

Эти параметры имеют такой же содержательный смысл, что и в случае формул (см. §2), а лемма 2.1 обобщается для СФЭ следующим образом.

Лемма 3.1. *Для приведенной СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathbb{C}}$, с одним выходом, выполняются неравенства*

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)}, \quad (3.1)$$

где $L_{\&, \vee}(\Sigma)$ — число ФЭ $\&$ и \vee в \mathcal{F} .

Схема Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$, с монотонной нумерацией вершин (см. §1), называется *вычисляющей программой (ВП) над базисом* \mathbb{B} (см., например, [11]). Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$, и пусть, для определенности, v_i , $i \in [1, p]$, где $p = |V(\Sigma)|$, — вершина с номером i , причем вершины v_1, \dots, v_n имеют пометки x_1, \dots, x_n , а вершины v_{j_1}, \dots, v_{j_m} — пометки z_1, \dots, z_m

соответственно. Сопоставим вершине v_i , $i \in [1, p]$, «внутреннюю» БП u_i и будем считать, что v_i выполняет команду с номером i , которая является:

- а) командой ввода $u_i = x_i$, если $i \in [1, n]$;
- б) вычисляющей командой $u_i = \varphi^{(i)}(u_1^{(i)}, \dots, u_{k^{(i)}}^{(i)})$, где $\varphi^{(i)}$ — ФС от $k^{(i)}$ БП, приписанный вершине v_i в Σ , а $u_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, k^{(i)}$, — БП, сопоставленная начальной вершине дуги с номером j , входящей в v_i , если $i \in (n, p]$.

Кроме того, будем считать, что каждой вершине v_{j_i} , $i \in [1, m]$, соответствует команда с номером $(p + i)$, являющаяся командой вывода $z_i = u_{j_i}$.

Предполагается, что команды ВП Σ выполняются последовательно в соответствии с их номерами в моменты времени $1, 2, \dots, p + m$ и что значение БП u_i , вычисленное в момент времени i , $i \in (n, p]$, занимает отдельную битовую ячейку памяти на отрезке времени $[i, a_i)$, где a_i — максимальный номер команды, в которой встречается u_i . Максимальное число отрезков вида $[i, a_i)$, где $i \in (n, p]$, имеющих непустое пересечение, называется *шириной* ВП Σ , и определяет минимальное число ячеек памяти, необходимых для хранения ее внутренних БП u_{n+1}, \dots, u_p . Заметим, что число ФЭ ВП Σ характеризует время выполнения ее вычисляющих команд на одном процессоре, а максимальная глубина вершин Σ — время выполнения ее вычисляющих команд на параллельных процессорах.

Так, на рис. 3.2а приведена монотонная нумерация вершин для СФЭ, показанной на рис. 3.1а, которая задает ВП ширины 3, а на рис. 3.2б — эквивалентная ей ВП ширины 2. Действительно, при выполнении первой (второй) из этих ВП для хранения всех внутренних БП, принадлежащих каждому из множеств $\{u_4\}$, $\{u_5, u_7, u_8\}$ и $\{u_6, u_9, u_{10}\}$ (соответ-

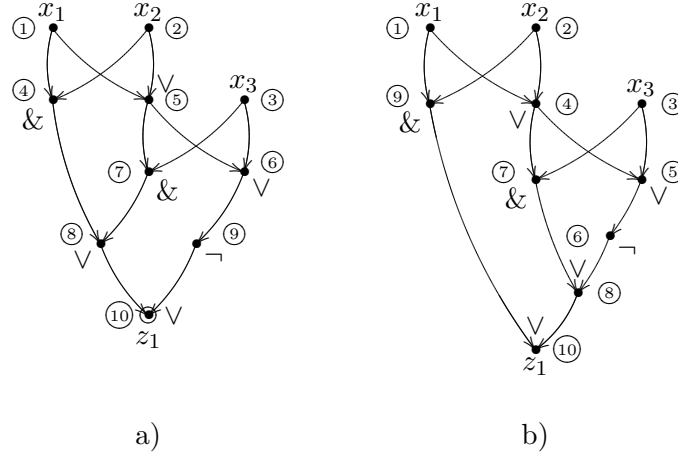


Рис. 3.2: эквивалентные ВП ширины 3 и 2

ственно $\{u_4, u_7, u_9\}$ и $\{u_5, u_6, u_8, u_{10}\}$) можно использовать одну и ту же ячейку памяти. Легко видеть также, что глубина обеих рассматриваемых СФЭ равна 4.

Лемма 3.2. Любая ДНФ или КНФ \mathfrak{A} после оптимизации по числу отрицаний и выполнения некоторых преобразований подобия, а также при подходящей монотонной нумерации вершин переходит в ВП ширины 2.

Доказательство. Проведем индукцию по рангу ДНФ \mathfrak{A} . При $\mathcal{R}\{\mathfrak{A}\} = 1$ утверждение леммы, очевидно, выполняется. Пусть оно выполняется для любой ДНФ \mathfrak{A}' ранга $\mathcal{R}\{\mathfrak{A}'\} \leq \mathcal{R} - 1$ и пусть ДНФ \mathfrak{A} ранга \mathcal{R} от БП $X(n)$ имеет вид

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \vee K = \mathfrak{A}' \vee (\overline{x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_r}}) \cdot x_{j_{r+1}} \cdot \dots \cdot x_{j_q},$$

где ранг ДНФ \mathfrak{A}' строго меньше \mathcal{R} . Построим по индуктивному предположению ВП Σ' над базисом B_0 , которая на шаге с номером t вычисляет значение u_t ДНФ \mathfrak{A}' от БП $X(n)$,

помещая его в ячейку памяти с номером $(n + 1)$. Тогда ВП Σ , вычисляющая ДНФ \mathfrak{A} , получается добавлением к Σ' команд¹:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= u_{j_1} \vee u_{j_2}, u_{t+2} = u_{t+1} \vee u_{j_3}, \dots, u_{t+r-1} = u_{t+r-2} \vee u_{j_r}, \\ u_{t+r} &= \bar{u}_{t+r-1}, u_{t+r+1} = u_{t+r} \cdot u_{j_{r+1}}, \dots, u_{t+q} = u_{t+q-1} \cdot u_{j_q}, \\ u_{t+q+1} &= u_t \vee u_{t+q}, \end{aligned}$$

где внутренние БП u_{t+1}, \dots, u_{t+q} помещаются в ячейку памяти с номером $(n + 2)$, а БП u_{t+q+1} — в ячейку с номером $(n + 1)$.

Лемма доказана. \square

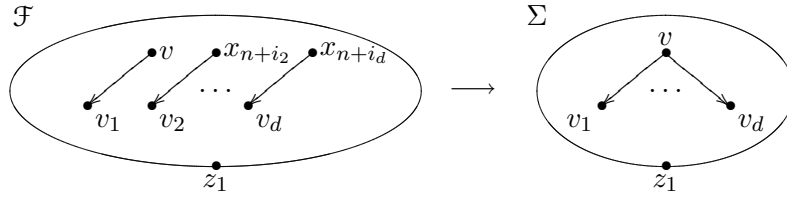


Рис. 3.3: получение схемы Σ из ее каркаса \mathcal{F}

Формула $\mathcal{F}(x_1)$ называется *остовом* приведенной СФЭ $\Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$, если дерево формулы \mathcal{F} отличается от наддерева СФЭ Σ только пометками листьев. На рис. 3.1с показан остов СФЭ, изображенной на рис. 3.1а. Легко видеть (см. рис. 3.3), что любая приведенная СФЭ Σ с одним выходом от БП x_1, \dots, x_n может быть получена из своего каркаса \mathcal{F} в результате применения ряда операций присоединения листьев дерева \mathcal{F} к входам x_1, \dots, x_n и внутренним вершинам \mathcal{F} .

¹Приведенный список команд естественным образом видоизменяется в случае $r \leq 1$ или $r = q$.

Обозначим через $\mathcal{U}_B^C(L, n)$ множество приведенных СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1)$ над базисом B , для которых $L(\Sigma) \leq L$, причем индекс B_0 будем, как обычно, опускать.

Лемма 3.3. *Для любых натуральных n и L выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (32(L+n))^{L+1} \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^C(L, n)$, $\check{\mathcal{F}}(x_1)$ — остов Σ , \mathcal{D} — дерево, соответствующее формуле $\check{\mathcal{F}}$. При этом, очевидно,

$$L\{\check{\mathcal{F}}\} = L(\Sigma) \leq L \quad \text{и} \quad R(\check{\mathcal{F}}) \leq L+1$$

в силу леммы 2.1.

Напомним, что СФЭ Σ может быть получена в результате присоединения каждого из $R(\check{\mathcal{F}}) \leq L+1$ листьев дерева \mathcal{D} к входам x_1, \dots, x_n и внутренним вершинам $\check{\mathcal{F}}$, которое можно осуществить не более, чем $(L+n)^{L+1}$ способами. Таким образом, в силу леммы 3.3,

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq 32^{L+1} \cdot (L+n)^{L+1} \leq (32(L+n))^{L+1}.$$

Лемма доказана. \square

§4 Операция суперпозиции и ее корректность для некоторых типов схем. Разделительные контактные схемы, лемма Шеннона

В основе большинства структурных преобразований схем лежит ряд операций, которые обобщают операцию суперпозиции функций и используются для построения сложных схем из более простых. Базисом таких построений является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется *тождественной вершиной кратности k* , $k \geq 0$, если она одновременно

является k -кратным выходом данной схемы. При этом кратность один, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается *фиктивной*.

Также как и в случае формул, простейшим видом суперпозиции схем является операция *переименования входов схемы* с возможным их отождествлением. Определим, далее, операцию *снятия (дублирования) выхода схемы*, то есть удаления с него имеющейся (соответственно добавления к нему новой) выходной пометки, и другим простейшим случаем суперпозиции схем будем считать операцию *переименования выходов схемы* с возможным их дублированием или снятием. Введем, наконец, операцию *объединения схем*, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, как обычное объединение соответствующих графов (см. рис. 4.1а), и тоже будем относить ее к простейшим видам суперпозиции.

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является *суперпозицией схем* Σ'' и Σ' без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' . Указанная суперпозиция считается *бесповторной*, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ' . Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется *стыковкой*, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Заметим, что операции объединения схем и переименования их входов (выходов) являются частными случаями введенной операции суперпозиции. Действительно, для объединения схем это очевидно, а любое переименование выходов (входов) схемы Σ можно задать суперпозицией вида $\Sigma_2''(\Sigma_1''(\Sigma))$ (соответственно $\Sigma(\Sigma_1'(\Sigma_2'))$), где схемы Σ_i' и Σ_i'' , $i = 1, 2$, состоят из тождественных вершин различной

кратности.

Для суперпозиции схем вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ характерно, как правило, то, что схема Σ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ'' . В случае стыковки, например, это означает, что схема Σ реализует набор функций вида $\mathcal{F}''(\mathcal{F}')$, где \mathcal{F}'' и \mathcal{F}' — наборы функций, реализованные схемами Σ'' и Σ' соответственно. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается *правильной*, если схема Σ обладает указанным свойством, и *корректной*, если, кроме того, в любой вершине Σ , которая соответствует выходной вершине Σ' , реализуется та же самая функция, что и в Σ' . Заметим, что правильная суперпозиция вида $\Sigma''(\Sigma')$ автоматически является корректной, если кратность любой выходной вершины Σ' больше числа присоединяемых к ней входов Σ'' . Заметим также, что с содержательной точки зрения корректность суперпозиции вида $\Sigma''(\Sigma')$ позволяет одновременно использовать выходы Σ' в других суперпозициях.

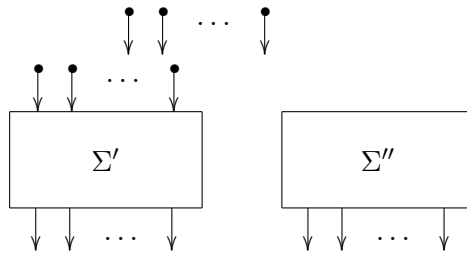


Рис. 4.1: к определению объединения схем и их суперпозиции

Из определения функционирования СФЭ вытекает, что

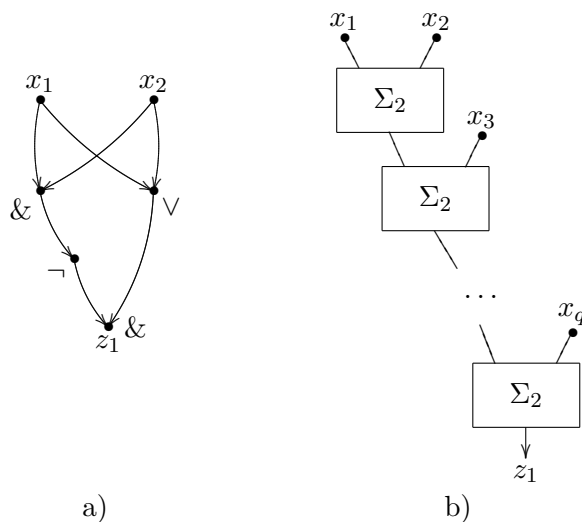


Рис. 4.2: пример суперпозиции СФЭ

любая их суперпозиция является корректной. Заметим также, что любая СФЭ может быть получена в результате многократного применения операции суперпозиции, на каждом шаге которой происходит дублирование выхода или присоединение одного ФЭ, к СФЭ, первоначально состоящей из тождественных вершин.

На рис. 4.2а показана СФЭ Σ_2^\oplus , имеющая сложность 4 и реализующая ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, а на рис. 4.2б — СФЭ Σ_q^\oplus , $q \geq 3$, которая является результатом «последовательной» суперпозиции $(q - 1)$ схем Σ_2^\oplus и реализует ФАЛ $\ell_q(x_1, \dots, x_q)$ со сложностью $4q - 4$.

Переменная, которая встречается в формуле только один раз, называется *бесповторной* переменной этой формулы. Формула называется *бесповторной*, если бесповторны все ее БП. Заметим, что СФЭ вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ' и Σ'' — системы формул, является системой формул тогда и только

тогда, когда к каждому выходу Σ' , участвующему в присоединениях и совпадающему с выходом ФЭ, присоединяется в точности один неповторный вход Σ'' .

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с нахождением функционирования для суперпозиций сетей или КС. Из соображений удобства будем допускать наличие в КС ориентированных (неориентированных) ребер без пометок, которые проводят при любых значениях управляющих входных БП и называются *вентильями* (соответственно *проводниками*). Это позволяет считать, что сети являются частным случаем КС и реализуют свои матрицы достижимости, состоящие из константных ФАЛ.

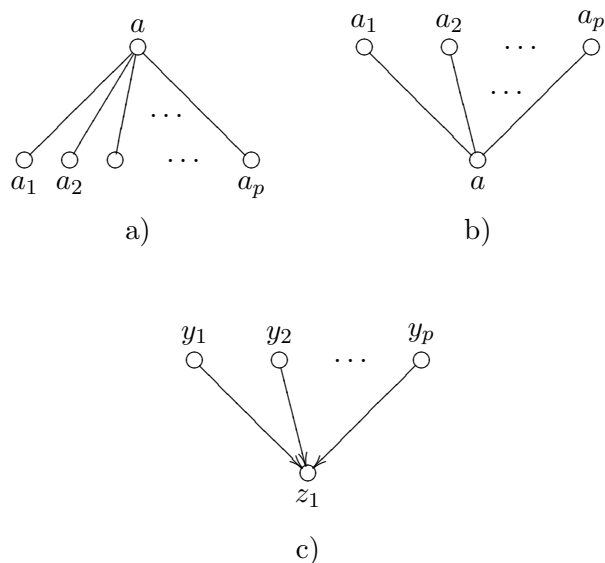
Операция суперпозиции КС и все ее частные случаи определяются обычным образом. При этом пометками входов и выходов КС, в отличие от СФЭ, не обязательно являются переменные, а БП, управляющие проводимостью контактов КС, никак не связаны с ее входами.

Легко видеть, что перестановка входов(выходов) КС порождает в реализуемой ею матрице такую же перестановку связанных с ними строк (соответственно столбцов), а снятие (дублирование) выходов этой КС — удаление (соответственно добавление) связанных с ними столбцов. Заметим также, что КС Σ , которая является объединением КС Σ' и Σ'' , реализующих матрицы F' и F'' соответственно, реализует матрицу F вида¹:

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline F' & 0 \\ \hline 0 & F'' \\ \hline \end{array}$$

Обратимся, далее, к особенностям функционирования КС, получающихся в результате применения операций су-

¹Предполагается, что номер любого входа (выхода) КС Σ' меньше номера любого входа (соответственно выхода) КС Σ'' в КС Σ , а внутренняя упорядоченность полюсов КС Σ' и Σ'' в КС Σ сохраняется. В остальных случаях происходит необходимая перестановка входов и выходов КС Σ .

Рис. 4.3: проводящие и вентильная звезды порядка p

перпозиции общего вида. Заметим также, что суперпозиция общего вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ всегда может быть сведена к стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' соответственно добавлением тождественных вершин и переименованием выходов. Стыковка вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, в свою очередь, может быть сведена к бесповторной стыковке вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}''(\widehat{\Sigma}')$, где схемы $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ получаются из схем Σ' и Σ'' снятием выходов и отождествлением входов соответственно.

Легко видеть, что результат отождествления первых p входов КС Σ эквивалентен результату стыковки вида $\Sigma(\Sigma')$, а результат p -кратного дублирования первого выхода КС Σ — результату стыковки $\Sigma''(\Sigma)$, где КС Σ' , Σ'' состоят из $(1, p)$ -проводящей звезды (см. рис. 4.3а, a — вход) и тожде-

ственных вершин. Заметим также, что стыковка вида $\Sigma(\widehat{\Sigma})$, где КС $\widehat{\Sigma}$ состоит из $(p, 1)$ -проводящей звезды (см. рис. 4.3б, a — выход) и тождественных вершин, соответствует отождествлению первых p выходов КС Σ .

Схема называется *разделительной по входам (выходам)*, если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0. Так $(p, 1)$ -схема $\Sigma'' = \Sigma''(y_1, \dots, y_p; z_1)$, показанная на рисунке 4.3с, является разделительной по входам схемой, которая называется *вентильной звездой порядка p* . Примером разделительной по выходам (входам) КС может служить $(1, 2^n)$ - (соответственно $(2^n, 1)$ -) контактное дерево порядка n (см. рис. 5.4). Будем говорить, что КС Σ от БП x_1, \dots, x_n *разделительна на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$* значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$. Следующее утверждение является обобщением известной леммы Шеннона (см. [32, 14]).

Лемма 4.1. *Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ, Σ' и Σ'' соответственно. Тогда*

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'', \quad (4.1)$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Доказательство. Пусть КС Σ является сначала результатом бесповторной стыковки (p, q) -КС Σ' и (q, s) -КС Σ'' от БП x_1, \dots, x_n . Пусть, кроме того, v' (v'') — произвольная вершина КС Σ' (соответственно Σ''), а ФАЛ f'_j (соответственно f''_j), $j \in [1, q]$, — ФАЛ проводимости от вершины v' к j -му выходу в КС Σ' (соответственно от j -го входа к вершине v'' в КС Σ''). Докажем, что для ФАЛ f — ФАЛ проводимости от вершины v' к вершине v'' в КС Σ , — справедливо неравенство

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (4.2)$$

которое переходит в равенство

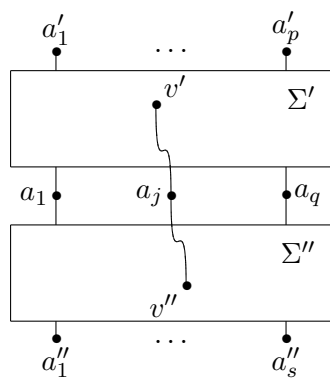
$$f(x_1, \dots, x_n) = f'_1 \cdot f''_1 \vee \dots \vee f'_q \cdot f''_q, \quad (4.3)$$

если КС Σ' разделительна по выходам или КС Σ'' разделительна по входам.

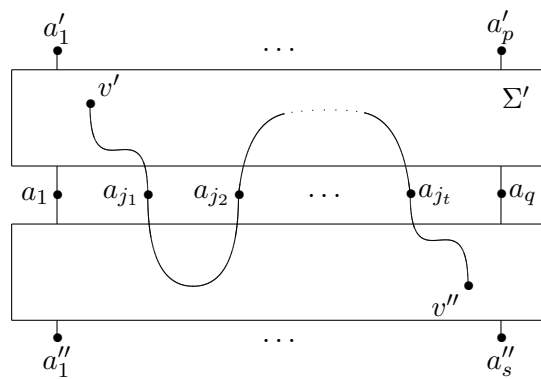
Действительно, пусть a_j , $j \in [1, q]$, — вершина КС Σ , которая получается в результате присоединения j -го входа КС Σ'' к j -му выходу КС Σ' (см. рис. ??122а). Справедливость неравенства ((4.2)) следует из того, что его правая часть описывает «суммарную» проводимость тех $(v' - v'')$ -цепей КС Σ , которые проходят через вершины a_1, \dots, a_q ровно один раз (см. рис. 4.4а). Любая другая $(v' - v'')$ -цепь КС Σ проходит через указанные вершины не меньше трех раз (см. рис. 4.4б) и в случае разделительности КС Σ' по выходам или разделительности КС Σ'' по входам имеет нулевую проводимость.

Из (4.2) и (4.3) непосредственно вытекает (4.1) с учетом того, что при $v' = a'_i$ и $v'' = a''_j$, где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, s]$, левая(правая) часть этих соотношений равна элементу матрицы F (соответственно $F' \cdot F''$), расположенному в i -й строке и j -м столбце.

Пусть теперь КС Σ получается из КС Σ'' в результате применения операции отождествления входов, то есть Σ эквивалентна бесповторной стыковке вида $\Sigma''(\Sigma')$, где КС Σ' состоит из проводящей звезды и тождественных вершин. В этом случае неравенство (4.1) имеет вид $F \geq \hat{F}''$, где матрица \hat{F}'' получается из матрицы F'' в результате поразрядной дизъюнкции строк, соответствующих отождествляемым входам КС Σ'' , и по-прежнему переходит в равенство, если КС Σ'' разделительна по входам. В последнем случае, кроме того, из аналогичного равенства, связанного с КС $\tilde{\Sigma}''$, которая получается из КС Σ'' в результате объявления ее входов входами и, одновременно, выходами $\tilde{\Sigma}''$, следует разделительность КС Σ по входам.



a)



b)

Рис. 4.4: к доказательству леммы 4.1

Заметим, наконец, что стыковка общего вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ сводится к последовательному выполнению отождествления входов вида $\widehat{\Sigma}'' = \Sigma'' (\check{\Sigma}'')$ и неповторной стыковки вида $\Sigma = \widehat{\Sigma}'' (\widehat{\Sigma}')$, где КС $\check{\Sigma}''$ состоит из проводящей звезды и тождественных вершин, а КС $\widehat{\Sigma}'$ получается из КС Σ' снятием некоторых выходов. При этом неравенство (в случае разделительности КС Σ'' по входам равенство) (4.1) для КС Σ , Σ' , Σ'' вытекает из установленных выше аналогичных соотношений для КС $\widehat{\Sigma}''$, $\check{\Sigma}''$, Σ'' и КС Σ , $\widehat{\Sigma}'$, $\widehat{\Sigma}''$ в силу ассоциативности произведения матриц. Случай разделительности КС Σ' по выходам рассматривается аналогично.

Лемма доказана. \square

Следствие 1. *В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ , $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma)$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' .*

Действительно, полагая $v' = a'_i$ и $v'' = a_j$, где $i \in [1, p]$, а $j \in [1, q]$, из (4.3) получим требуемое равенство $f = f'_j$. Случай стыковки общего вида рассматривается аналогично.

Следствие 2. *Равенство (4.1) выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.*

Стыковка (суперпозиция) КС вида $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma)'$ называется *правильной*, если она удовлетворяет равенству (4.1), и считается *корректной*, если она, кроме того, удовлетворяет требованиям следствия 1 из леммы 4.1¹. Аналогичным образом определяется правильность и корректность суперпозиции КС на заданном наборе значений управляющих БП.

¹Эти определения соответствуют обычным определениям, если считать, что $F''(F') = F' \cdot F''$. Требования следствия 1 леммы 4.1 не распространяются, как правило, на тождественные вершины КС Σ' , добавленные для согласования числа ее выходов с числом входов КС Σ'' .

Заметим, что при правильной стыковке $(1, p)$ -КС и $(p, 1)$ -КС, реализующих строку и столбец из ФАЛ $\{f'_1, \dots, f'_p\}$ и $\{f''_1, \dots, f''_p\}$ соответственно, получается $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ $f'_1 f''_1 \vee \dots \vee f'_p f''_p$, при правильном отождествлении входов (выходов) КС в реализуемой ею матрице происходит поразрядная дизъюнкция тех строк (соответственно столбцов), которые соответствуют отождествленным входам (соответственно выходам) и т. п.

Легко видеть, что операции переименования входов без отождествления, переименования выходов и объединения корректны в любом случае. Из леммы 4.1 и ее следствий вытекает, что для разделительной по входам КС Σ'' любая суперпозиция вида $\Sigma'' (\Sigma')$ является корректной. Это относится, в частности, к последовательному соединению $(1, 1)$ -КС (см. §5). В то же время параллельное соединение $(1, 1)$ -КС, при котором сначала отождествляются входы, а затем выходы соединяемых КС, не является корректной операцией суперпозиции, так как не удовлетворяет требованиям следствия 1 из леммы 4.1. Заметим, что параллельное соединение КС является при этом правильной суперпозицией, так как полученная КС реализует дизъюнкцию ФАЛ, реализуемых исходными КС, и что корректное дизъюнктивное соединение выходных ФАЛ можно осуществить с помощью стыковки исходной КС с вентильной звездой (см. рис. 4.3с).

В общем случае операции отождествления входов, а также операции стыковки не всегда являются правильными. Так, на рис. 4.5а изображена $(3, 1)$ -КС $\Sigma'' (x_1, x_2; a''_1, a''_2, a''_3; a'')$, которая реализует столбец f'' из ФАЛ

$$f''_1 = x_1 \bar{x}_2, f''_2 = x_1 \oplus x_2 \text{ и } f''_3 = x_1 x_2,$$

а на рисунке 4.5b — $(2, 1)$ -КС $\widehat{\Sigma}'' (x_1, x_2; a''_1, a''_2; a'')$, которая получается из Σ'' в результате отождествления входов $a''_2 =$

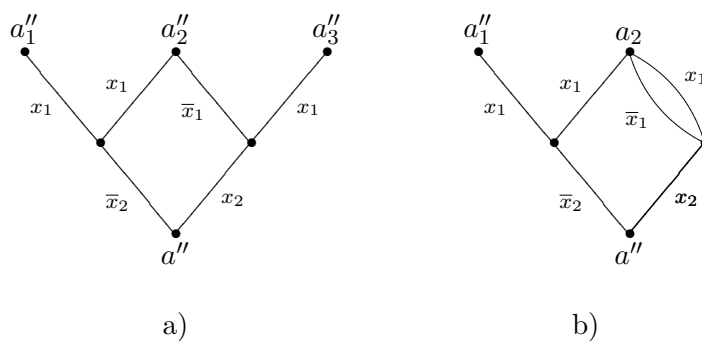


Рис. 4.5: отождествление входов у (3,1)-КС Σ''

$= a''_3 = a_2$ и реализует столбец \hat{f}'' из ФАЛ

$$\hat{f}''_1 = x_1 \neq f''_1, \hat{f}''_2 = x_1 \vee x_2.$$

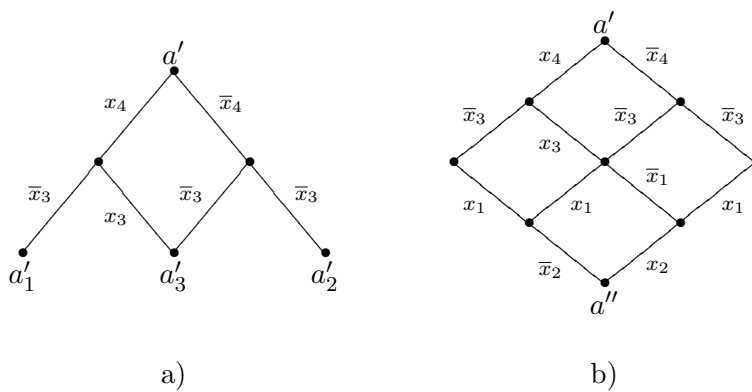


Рис. 4.6: (1,3)-КС Σ' и $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$

На рис. 4.6а показана (1,3)-КС $\Sigma'(x_3, x_4; a'; a'_1, a'_2, a'_3)$, которая реализует набор f' из ФАЛ

$$f'_1 = \bar{x}_3 x_4, f'_2 = x_3 \sim x_3, f'_3 = \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

а на рис. 4.6b — $(1, 1)$ -КС $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4; a'; a'')$, которая является результатом бесповторной стыковки вида $\Sigma''(\Sigma)'$ и реализует ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такую, что

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= \bar{x}_3 x_4 x_1 \vee (x_3 \sim x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2) \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_1 x_2 \neq \\ &\neq f'_1 \cdot f''_1 \vee f'_2 \cdot f''_2 \vee f'_3 \cdot f''_3. \end{aligned}$$

§5 Контактные схемы и π -схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных контактных схем

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §3), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i (\bar{x}_i) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i (см. рис. 5.1).

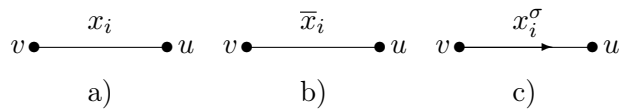


Рис. 5.1: типы контактов

Считается, что контакт вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

С точки зрения управления проводимостью неориентированный замыкающий (замыкающий) контакт БП x_i

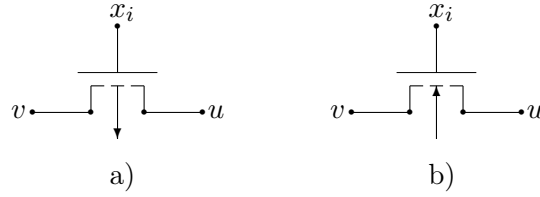


Рис. 5.2: физическая интерпретация контактов

функционирует как p -МОП (соответственно n -МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП x_i (см. рис. 5.2a и 5.2b), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки [17, 23]. Кроме того, ориентированный контакт вида x_i^σ , идущий из вершины v в вершину u (см. рис. 5.1c), часто рассматривают как команду условного перехода из v в u , который выполняется, если $x_i = \sigma$.

Сеть Σ с входами a'_1, \dots, a'_p и выходами a''_1, \dots, a''_q , в которой все ребра (дуги) помечены переменными x_1, \dots, x_n или их отрицаниями $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, называется (p, q) -контактной схемой (КС) от БП x_1, \dots, x_n и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$. При этом число контактов называется сложностью КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 5.3a–c показаны некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3 с входом a_1 и выходами a_2, a_3 .

Пусть Σ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор из B^n . Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α , и снятия пометок с остальных ребер Σ . Для вершин v и u КС Σ введем функцию проводимости от вершины v к вершине u как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда

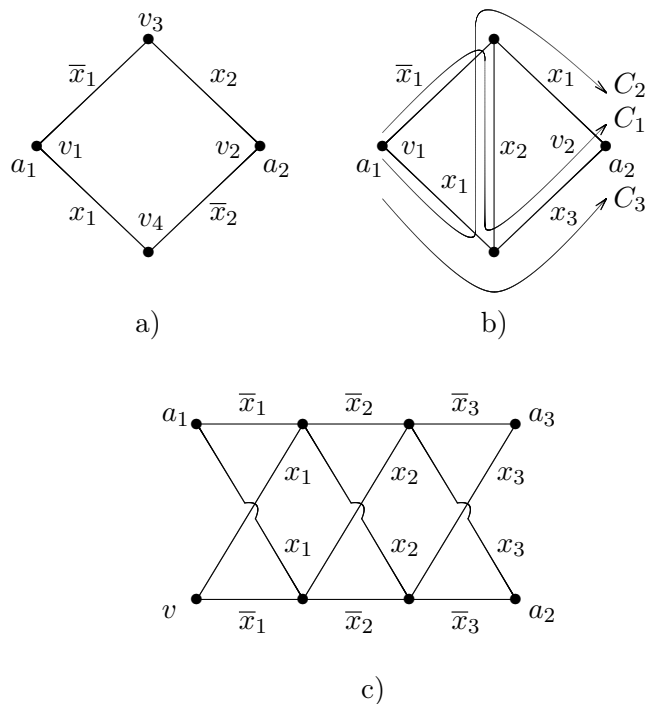


Рис. 5.3: некоторые КС от БП x_1, x_2, x_3

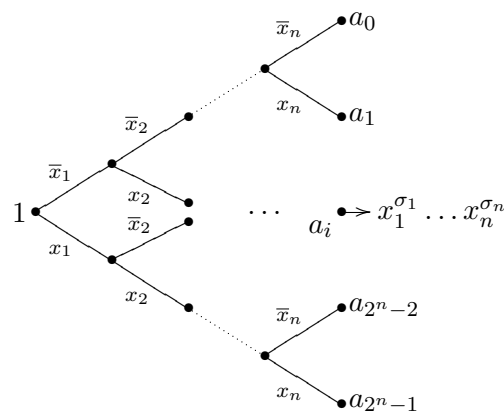
в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v - u)$ -цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u . Будем говорить также, что ФАЛ $g_{v,u}$ является *функцией достижимости вершины u из вершины v* , или, иначе, *реализуется между вершинами v и u* . Из определения следует, что для нахождения ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ достаточно просмотреть все наборы α , $\alpha \in B^n$, и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в Σ цепи, состоящей из проводящих на наборе α контактов, которая идет из v в u . Так, просмат-

ривая все наборы значений БП x_1, x_2 , можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости $g_{v_1, v_2}(x_1, x_2)$ в КС Σ , показанной на рис. 5.3а, равна $x_1 \oplus x_2$, а ФАЛ проводимости g_{v_3, v_4} равна 0.

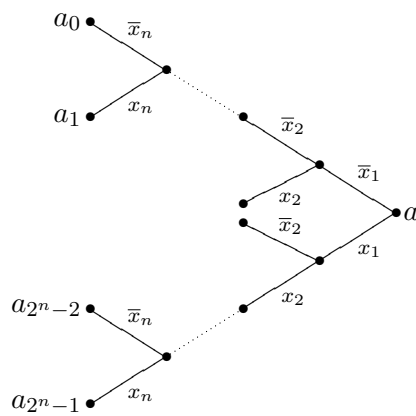
Будем считать, что в каждой вершине $(1, m)$ -КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2, \dots, a_{m+1})$ реализуется ФАЛ проводимости от входа a_1 к этой вершине и что Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, где f_j — ФАЛ проводимости от a_1 к выходу с пометкой a_{j+1} , $j \in [1, m]$. При этом, очевидно, в вершине a_1 реализуется ФАЛ 1, которую в дальнейшем по умолчанию будем использовать в качестве пометки единственного входа $(1, m)$ -КС. Так, КС, изображенные на рис. 5.3а, 5.3б и 5.3с, реализуют ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, $H(x_1, x_2, x_3)$ и набор ФАЛ $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ соответственно. На рис. 5.4а показана $(1, 2^n)$ -КС $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; 1; a_0, \dots, a_{2^n-1})$, которая называется $(1, 2^n)$ -контактным деревом порядка n от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i , $i = 0, \dots, 2^n - 1$, этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (i - 1)$, и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким образом, $(1, 2^n)$ -КД порядка n является дешифратором порядка n , то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

Для множества C , состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ , определим его *функцию проводимости* $K(C)$ и *функцию отделимости* $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$ соответственно. При этом множество C называется *проводящим (отделимым)*, если $K(C) \neq 0$ ($J(C) \neq 1$), и *нулевым* (соответственно *единич-*



a)



b)

Рис. 5.4: $(1, 2^n)$ - и $(2^n, 1)$ - контактные деревья порядка n

ным) в противном случае. Заметим, что в результате приведения подобных (см. ?? гл. 1) отличная от 0 ФАЛ $K(C)$ и отличная от 1 ФАЛ $J(C)$ могут быть преобразованы в ЭК и ЭД соответственно. Очевидно, также, что

$$K(C') \geq K(C) \quad \text{и} \quad J(C') \leq J(C),$$

если $C' \subseteq C$.

Из введенных определений (см. также §1) следует, что ФАЛ g , реализуемая КС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, обращается в 1 (обращается в 0) на наборе α , $\alpha \in B^n$, тогда и только тогда, когда в Σ существует множество контактов C , образующее простую проводящую $(a_1 - a_2)$ -цепь (соответственно тупиковое отделимое $(a_1|a_2)$ -сечение), для которого $K(C) = 1$ (соответственно $J(C) = 0$) на наборе α . Таким образом,

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t) = \\ &= J(S_1) \& \dots \& J(S_r), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где C_1, \dots, C_t и S_1, \dots, S_r — все простые проводящие $(a_1 - a_2)$ -цепи и все тупиковые отделимые $(a_1|a_2)$ -сечения КС Σ .

Заметим, что первая из формул (5.1) может быть преобразована в ДНФ, а вторая — в КНФ, в результате приведения подобных (см. ?? главы 1), если $g \neq 0$ и $g \neq 1$ соответственно. Так, в КС, показанной на рис. 5.3б, имеются три простые проводящие цепи C_1 , C_2 и C_3 , которые идут из a_1 в a_2 . При этом

$$K(C_1) = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \\ &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

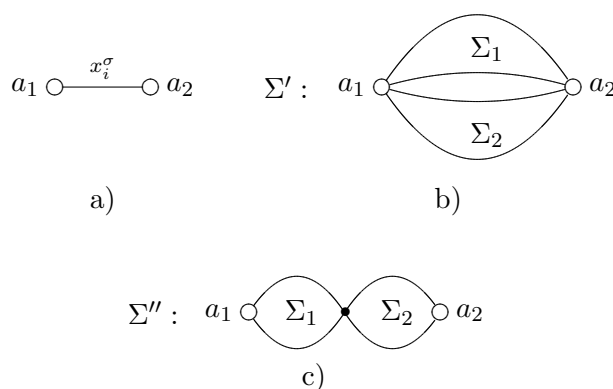


Рис. 5.5: к определению π -схемы

Рассмотрим теперь параллельно-последовательные или, иначе, π -схемы, которые являются частным случаем КС.

Простейшей π -схемой считается любая $(1, 1)$ -КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 5.5а). Если π -схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то $(1, 1)$ -КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 5.5b и 5.5c) тоже является π -схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отождествления входов (соответственно выходов) Σ_1 и Σ_2 , тогда как входом Σ'' является вход Σ_1 , выходом Σ'' — выход Σ_2 , а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ'' . Легко видеть, что π -схема, показанная на рис. 5.5а, реализует ФАЛ x_i^σ , а π -схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 5.5b и 5.5c) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 — ФАЛ, реализуемые π -схемами Σ_1 и Σ_2 соответственно.

Лемма 5.1. *Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу F из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(F) = L(\Sigma)$ и обратно.*

Доказательство. Построим формулу F индукцией по строению π -схемы Σ . Если Σ — простейшая π -схема вида x_i^σ , то положим $F = x_i^\sigma$. Если π -схемам Σ_1 и Σ_2 уже сопоставлены формулы F_1 и F_2 с поднятыми отрицаниями, то π -схеме Σ' (Σ''), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения Σ_1 и Σ_2 , сопоставим формулу $F' = F_1 \vee F_2$ (соответственно $F'' = F_1 \& F_2$). При этом

$$R(F') = R(F'') = R(F_1) + R(F_2)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R(F') = R(F'') = L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) = L(\Sigma).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы F с поднятыми отрицаниями можно найти эквивалентную ей π -схему Σ такую, что $L(\Sigma) = R(F)$.

Лемма доказана. \square

На рис 5.6а показана π -схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$

а на рис. 5.6б — π -схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n , — в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

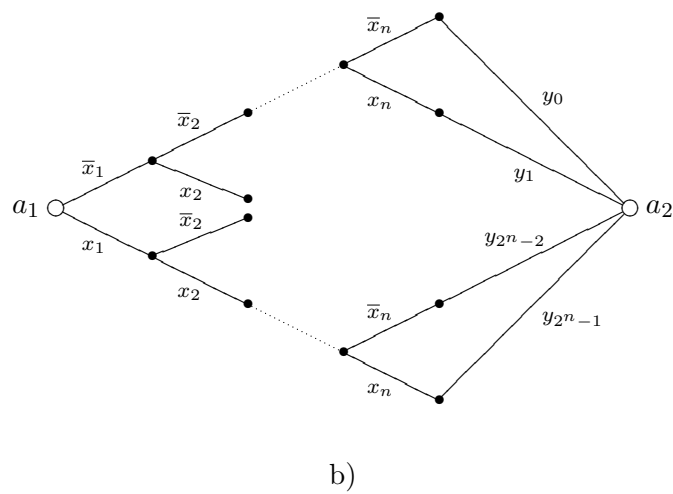
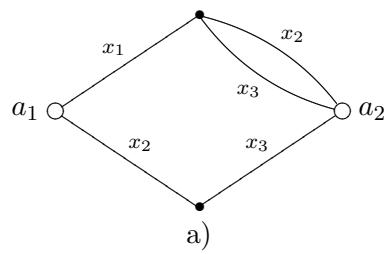


Рис. 5.6: примеры π -схем

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f , называется *канонической КС* для этой ФАЛ.

Будем называть $(1, m)$ -КС *приведенной*, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС $\widehat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\widehat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$. Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС, не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Так, КС, показанная на рис. 5.3с, не является приведенной, а соответствующая ей приведенная КС получается из нее удалением вершины v .

Рассмотрим теперь некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть \mathcal{U}^K и \mathcal{U}^π — множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех π -схем соответственно. Если \mathcal{U}^A — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^A(L, n)$ будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$ -схем Σ из \mathcal{U}^A от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leq L$. Для любого множества схем \mathcal{U} в соответствии с §1 через $|\mathcal{U}|$ и $\|\mathcal{U}\|$ будем по-прежнему обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в \mathcal{U} соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенство (1.7) будет выполняться.

Лемма 5.2. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (64n)^L. \quad (5.2)$$

Доказательство. В силу леммы 5.1, достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ с поднятыми отрицаниями над базисом B_0 , для которых $R(\mathcal{F}) \leq L$, не превосходит $(64n)^L$. Для этого сопоставим

формуле \mathcal{F} указанного вида формулу \mathcal{F}' из $\mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi$ от БП x_1, \dots, x_{2n} , которая получается из \mathcal{F} заменой каждой ее подформулы \bar{x}_i , $i \in [1, n]$, формулой x_{i+n} и для которой, в силу леммы 2.1,

$$L(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) - 1 \leq L - 1.$$

При таком сопоставлении неэквивалентные формулы переходят в неэквивалентные, и поэтому число попарно не эквивалентных формул рассматриваемого вида не больше, чем $\|\mathcal{U}^\Phi(L - 1, 2n)\|$, откуда, в силу (2.11), следует (5.2).

Лемма доказана. □

Лемма 5.3. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

Доказательство. Возьмем произвольную КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$, $\Sigma \in \mathcal{U}^K(L, n)$, и выделим в ней остовное дерево \mathcal{D} с корнем a_2 так, чтобы в \mathcal{D} вошли все инцидентные a_2 контакты Σ , а вершина a_1 была листом \mathcal{D} . Пусть, далее, \mathcal{D}' — связанное с \mathcal{D} остовное наддерево КС Σ , которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в \mathcal{D} ребер Σ к одной из своих концевых вершин, отличной от a_1 (см. §1). Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево \mathcal{D}'' , получающееся из \mathcal{D}' введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина a_1 становится первым листом \mathcal{D}'' (см. §1).

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева \mathcal{D}'' не больше, чем L (соответственно $L + 1$, L), и поэтому, в силу (1.4), число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ не больше, чем $(8n)^L$. Заметим также, что КС Σ может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева \mathcal{D}'' к одной из его

вершин, отличной от a_2 . Следовательно,

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq |\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L.$$

Лемма доказана. \square

Рассмотрим, в заключение, особенности функционирования КС с несколькими входами.

Будем считать, что в каждой вершине (p, q) -КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$ представляет собой матрицу $F = F(x_1, \dots, x_n)$ с p строками, q столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F \langle i, j \rangle$ — ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j , где $i \in [1, p]$ и $j \in [1, q]$, то есть при любом α , $\alpha \in B^n$, матрица $F(\alpha)$ является матрицей достижимости сети $\Sigma|_\alpha$ (см. §?). В частности, функционирование $(1, q)$ -КС, как уже отмечалось выше, представляет собой набор (строку) из q ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование $(p, 1)$ -КС — столбец из p ФАЛ проводимости от ее входов к выходу.

Так, КС $\Sigma(x_1, x_2, x_3; a_1, v; a_2, a_3)$, показанная на рисунке 5.3с реализует матрицу $\begin{bmatrix} l_3 & \bar{l}_3 \\ \bar{l}_3 & l_3 \end{bmatrix}$ от БП $X(3)$, а на рис. 5.4б приведено $(2^n, 1)$ -КД порядка n от БП $X(n)$, которое имеет вид $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{2^n-1}; a)$ и реализует столбец из всех ЭК множества Q_n , упорядоченных сверху вниз по возрастанию их номеров.

В соответствии с общими правилами из §1, функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$. В этом случае матрица

F является рефлексивной и транзитивной матрицей (см. §?), а если, кроме того, Σ — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей. Заметим также, что функционирование $(1, 1)$ -КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами.

В частности, показанная на рис. 5.3с КС с неразделенными полюсами a_1, a_2, a_3 реализует матрицу $\begin{bmatrix} 1 & l_3 & \bar{l}_3 \\ l_3 & 1 & 0 \\ \bar{l}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, КС из тождественных вершин реализует единичную матрицу, если каждая ее вершина является входом и выходом с одним и тем же номером и т. д.

С другой стороны, любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица $F, F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, где $1 \leq i < j \leq m$, а КС Σ_{ij} построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F \langle i, j \rangle$ (см. выше) и считается *канонической КС матрицы F* .

Глава 3

Эквивалентные преобразования управляющих систем

§1 Эквивалентные преобразования схем на основе тождеств. Моделирование эквивалентных преобразований формул в классе схем из функциональных элементов

Эквивалентные преобразования (ЭП), то есть преобразования, не изменяющие функционирования схем, играют важную роль при решении различных задач теории управляющих систем и, в частности, задачи синтеза схем (см. §1 главы 4). Следуя [30], изложим в данной главе ряд вопросов ЭП схем из основных классов. Рассмотрим сначала понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями формул над базисом B на основе тождеств. Напомним, что некоторые ЭП формул базиса B_0 уже использовались для раскрытия скобок и приведения подобных при построении сокращенной ДНФ (см. ?? главы 1), для оптимизации подобных формул по глубине и поднятия отрицаний (см. §2 главы 2).

Для того чтобы выделить набор $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, который состоит из всех различных БП алфавита X , встречающихся в формуле \mathcal{F} и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. При этом формулу, которая получается из \mathcal{F} в результате замены каждого вхождения БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, формулой \mathcal{F}_j будем

считать *результатом подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, в формулу \mathcal{F}* и будем обозначать ее через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Заметим, что формула $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1, \dots, f_n)$, где ФАЛ f (ФАЛ f_j) — ФАЛ, реализуемая формулой \mathcal{F} (соответственно \mathcal{F}_j , $j = 1, \dots, n$). Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$, мы получим тождество

$$\hat{t} : \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}'',$$

где $\hat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ и $\hat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, которое называется *подстановкой для тождества t* .

Напомним, что формулы, полученные в процессе индуктивного построения (см. ?? главы 1) формулы \mathcal{F} , называются ее *подформулами*. Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если подформулу $\hat{\mathcal{F}}'$ (подформулу $\hat{\mathcal{F}}''$) формулы \mathcal{F} заменить, учитывая тождество \hat{t} , эквивалентной ей формулой $\hat{\mathcal{F}}''$ (соответственно $\hat{\mathcal{F}}'$), то полученная в результате такой замены формула $\check{\mathcal{F}}$ будет эквивалентна формуле \mathcal{F} , то есть будет справедливо тождество

$$\check{t} : \mathcal{F} = \check{\mathcal{F}}.$$

Указанный переход от \mathcal{F} к $\check{\mathcal{F}}$ (от t к \check{t}) будем записывать в виде однократной выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow{t} \check{\mathcal{F}}$ (соответственно $t \mapsto \check{t}$). Аналогичный переход от \mathcal{F} к $\tilde{\mathcal{F}}$ в результате применения одного из тождеств системы τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ (соответственно $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$). При этом считается, что тождество

$$\tilde{t} : \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ , и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \tilde{t}$ или $\tau \vdash_{\tau} \tilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Переход вида $\mathcal{F} \vdash_{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ будем называть также *эквивалентным преобразованием формулы \mathcal{F} в формулу $\tilde{\mathcal{F}}$ на основе системы тождеств τ* . Заметим, что в силу обратимости ЭП, из выводимости $\mathcal{F} \vdash_{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\tilde{\mathcal{F}} \vdash_{\tau} \mathcal{F}$. Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над \mathcal{B} , если для любых двух эквивалентных формул \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' над \mathcal{B} имеет место выводимость $\mathcal{F}' \vdash_{\tau} \mathcal{F}''$.

Рассмотрим, в частности, систему, которая состоит из тождества

$$t_{\&}^M : \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2,$$

— тождества де Моргана для конъюнкции (см. тождества (2.6) из главы 2) и тождества

$$t_{1,\&}^{ПК} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1,$$

— тождества подстановки константы $1 = x_2 \vee \bar{x}_2$ в конъюнкцию (см. тождества (??) из главы 1). Пример ЭП формул из \mathcal{U}^{Φ} с помощью этой системы тождеств дает следующая цепочка выводимостей:

$$x_1 (x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \xrightarrow{t_{\&}^M} x_1 (x_2 x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \xrightarrow{t_{1,\&}^{ПК}} x_1. \quad (1.1)$$

Распространим теперь введенные выше понятия и обозначения на произвольный класс схем \mathcal{U} из главы 2. В соответствии с определениями из §1 этой главы эквивалентность схем Σ' и Σ'' из \mathcal{U} имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу

полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t : \Sigma' \sim \Sigma''.$$

Для схем из \mathcal{U} , как и для формул, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*. Тождество

$$\hat{t} : \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}'',$$

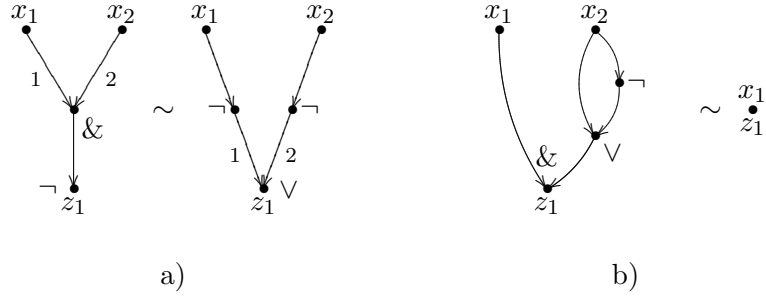
которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества t* . Схема Σ' называется *подсхемой схемы Σ* , если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \quad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина v , $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ , либо служит конечной (соответственно начальной) вершиной некоторого ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно выходом) Σ' .

Из определений следует, что для СФЭ и КС с неразделенными полюсами, как и для формул, имеет место принцип эквивалентной замены. При этом все введенные выше для случая эквивалентных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, полнота системы тождеств и др.), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП указанных классов схем без изменений.

Рассмотрим эти вопросы на примере ЭП СФЭ. Мы будем использовать все введенные выше общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и

Рис. 1.1: тождества $\underline{t}_{\&}^M$ и $\underline{t}_{1,\&}^{ПК}$

снятием) ее выходных БП. Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула \mathcal{F} из \mathcal{U}_B^Φ является формулой-словом (см. ?? главы 1), а соответствующую ей формулу-граф, т. е. квазидерево (см. §3 главы 2), будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' — формулы из \mathcal{U}_B^Φ , будет соответствовать тождество $\underline{t} : \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}'$ и $\underline{\mathcal{F}}''$ — соответствующие \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' схемы из \mathcal{U}_B^C , являющееся «схемным» аналогом тождества t . Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида \underline{t} , где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для \mathcal{U}_B^Φ , — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 1.1a и 1.1b приведены тождества $\underline{t}_{\&}^M$ и $\underline{t}_{1,\&}^{ПК}$, являющиеся схемными аналогами введенных выше формульных тождеств $t_{\&}^M$ и $t_{1,\&}^{ПК}$.

На рис. 1.2a и 1.2b показаны тождество ветвления $t_{\mathcal{E}_i}^B$ и тождество снятия $t_{\mathcal{E}_i}^C$ для функционального элемента \mathcal{E}_i , $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 1.2c — тождество снятия входа $t_{\text{вх}}^C$. Заметим, что применение тождества снятия равносильно выполнению операции удаления висячей вершины соответствующего типа (см. §3 главы 2). Заметим

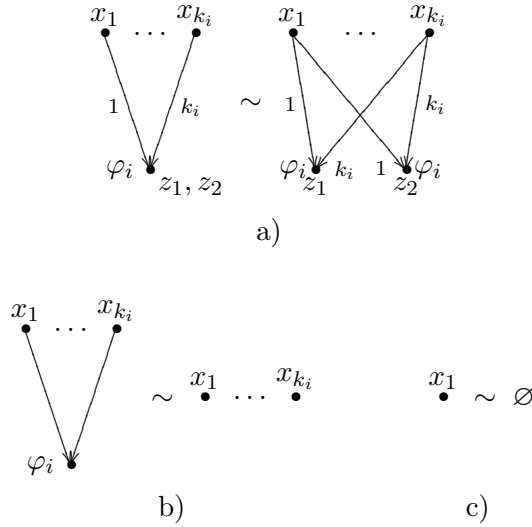


Рис. 1.2: тождества ветвления, снятия $\Phi\Theta$ и снятия входа

также, что тождества $t_{\mathcal{E}_i}^B, t_{\mathcal{E}_i}^C, t_{\text{вх}}^C$ не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \{t_{\mathcal{E}_i}^B\}_{i=1}^b, \quad \tau_B^C = \{t_{\mathcal{E}_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, существует ЭП вида $\Sigma \xrightarrow{\tau} \mathcal{F}$, где \mathcal{F} — формула (система формул) из \mathcal{U}_B^Φ .

Пусть, далее, $\mathcal{F} \xrightarrow{t} \widehat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из \mathcal{U}_B^Φ , где тождество t имеет вид

$$t: \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

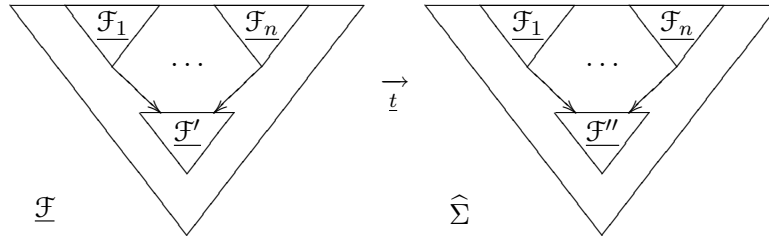


Рис. 1.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

а формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается из формулы \mathcal{F} заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{t} \widehat{\Sigma}$ (см. рис. 1.3). Заметим, что в том случае, когда

формулы \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' являются неповторными формулами, а БП x_1, \dots, x_n — их существенными БП, СФЭ $\widehat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}}''$. В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулы \mathcal{F} необходимо с помощью тождеств τ_B^B сформировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \dots, \underline{\mathcal{F}}_n)$, а затем применить тождество t . При этом в СФЭ $\widehat{\Sigma}$ могут появиться висячие вершины или внутренние «ветвления», и тогда для перехода от $\widehat{\Sigma}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\widehat{\Sigma} \xrightarrow{\{\tau^C, \tau^B\}} \widehat{\mathcal{F}}$.

Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \widehat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\{\underline{\tau}, \tau_B^B, \tau_B^C\}} \widehat{\underline{\mathcal{F}}}.$$

На рис. 1.4 показано ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C , которое моделирует ЭП (1.1) для формул из \mathcal{U}^Φ .

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от фор-

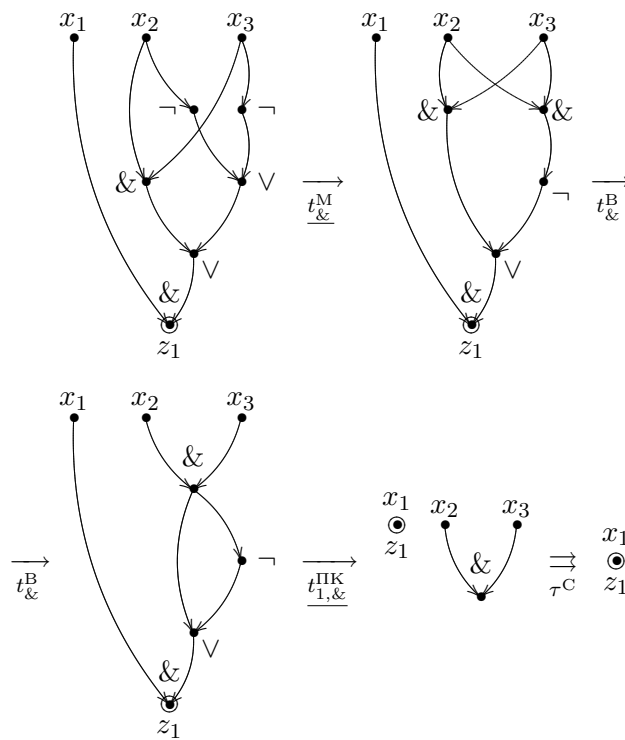


Рис. 1.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

мул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств τ_B^B, τ_B^C вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Если τ — конечная полная система тождеств для ЭП формул из \mathcal{U}_B^{Φ} , то $\{\tau, \tau^C, \tau^B\}$ — конечная полная система тождеств для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C .*

Заметим, что вопрос о существовании конечной полной системы тождеств (КПСТ) является одним из основных вопросов, связанных с изучением ЭП схем из заданного класса \mathcal{U} .

§2 Эквивалентные преобразования формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$. Полнота системы основных тождеств. Теорема перехода

В данном параграфе будем рассматривать только формулы над базисом B_0 , называя их просто формулами. Заметим, что имеют место (см., в частности, ??–?? главы 1, §2 главы 2, а также §1) следующие тождества ассоциативности

$$t_{\circ}^A : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t_{\circ}^K : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{OP} : x \circ x = x,$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$, тождества дистрибутивности « \circ » относительно « \diamond »

$$t_{\circ, \diamond}^D : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^M : \overline{(\bar{x}_1)} = x_1, \quad t_{\circ}^M : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\bar{x}_1) \diamond (\bar{x}_2),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$, тождества подстановки констант¹

$$\begin{aligned} t_{0, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \cdot \bar{x}_2) = x_2 \cdot \bar{x}_2, & \quad t_{1, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1, \\ t_{0, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_2 = x_1, & \quad t_{1, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) = x_2 \vee \bar{x}_2, \end{aligned}$$

а также тождество поглощения

$$t^{\Pi} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{OC}} : x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

Примером ЭП формул с помощью введенных тождеств является ЭП (1.1). Докажем, далее, что

$$\{t_{\&}^M, t_{\neg}^M\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^M\} \quad \text{и} \quad \{t_{\&}^K, \tau^M\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^K\},$$

где $\tau^M = \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\vee}^M\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \xrightarrow[t_{\neg}^M]{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \vee (\bar{x}_2)} \xrightarrow[t_{\&}^M]{\Leftrightarrow} \overline{(\bar{x}_1) \cdot (\bar{x}_2)} \xrightarrow[t_{\neg}^M]{\Leftrightarrow} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

и

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_{\neg}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \xrightarrow[t_{\&}^K]{\Leftrightarrow} \overline{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1} \xrightarrow[t_{\&}^M, t_{\neg}^M]{\Leftrightarrow} x_2 \vee x_1.$$

¹В отличие от тождеств (??)–(??) главы 1 данные тождества подстановки констант ориентированы на базис B_0 , где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \bar{x}_i$ (соответственно $x_i \vee \bar{x}_i$).

Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \{t_{\&}^A, \tau^M\} \models \{t_{\vee}^A\}, \quad \{t_{\&}^{\text{ОП}}, \tau^M\} \models \{t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \{t_{\&,\vee}^D, \tau^M\} \models \{t_{\vee,\&}^D\} \text{ и } \{t_{\sigma,\&}^{\text{ПК}}, \tau^M\} \models \{t_{\sigma,\vee}^{\text{ПК}}\}, \end{aligned}$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\{t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&,\vee}^D, t_{\vee}^A, t_{\vee}^K, t_{\vee}^{\text{ОП}}\} \models t^{\Pi}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{} x_1 ((x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2) \\ \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{} x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{\vee}^{\text{ОП}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\&}^A, t_{\&}^K, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^D, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}, \\ \tau^A &= \{t_{\&}^A, t_{\vee}^A\}, \\ \tau^K &= \{t_{\&}^K, t_{\vee}^K\}, \\ \tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \tau^D &= \{t_{\&,\vee}^D, t_{\vee,\&}^D\}, \\ \tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}, \\ \tilde{\tau}^{\text{осн}} &= \{\tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ОП}}, \tau^D, \tau^{\text{ПК}}, t^{\Pi}\}. \end{aligned}$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*. Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 2.1. Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1\bar{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП. Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной ЭК (ОЭК)*, а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — *обобщенной ДНФ (ОДНФ)*. Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ будем считать *канонической ОЭК* (соответственно *канонической ОДНФ*), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ — *совершенными ОДНФ*. Напомним (см. §2 главы 2), что формула, в которой все ФС \neg применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС \neg , называется *формулой с поднятыми отрицаниями*.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$. Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \stackrel{\tau^{\text{M}}}{\rightleftharpoons} \mathcal{F}' \stackrel{\{t_{\&, \vee}^{\text{D}}, t_{\&}^{\text{K}}\}}{\rightleftharpoons} \mathcal{F}'' \stackrel{\tau^{\text{ПП}}}{\rightleftharpoons} \widehat{\mathcal{F}} \stackrel{\{t_{\&, \vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{ПП}}\}}{\rightleftharpoons} \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (2.1)$$

где $\tau^{\text{ПП}} = \{\tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}, t^{\text{П}}\}$, \mathcal{F}' — формула с поднятыми отрицаниями, \mathcal{F}'' — обобщенная ДНФ, а $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно. Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от \mathcal{F} к \mathcal{F}' в (2.1) (см. §2 главы 2) можно осуществить применением тождеств t_{\neg}^{M} , $t_{\&}^{\text{M}}$ и t_{\vee}^{M} к подформулам вида $\overline{(\mathcal{F}_1)}$, $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$ и $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от \mathcal{F}' к \mathcal{F}'' в (2.1), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\{t_{\&, \vee}^{\text{D}}, t_{\&}^{\text{K}}\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от \mathcal{F}'' к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (2.1), который называется *приведением подобных*, выполняется в три этапа. На первом этапе каждая ОЭК K'' из ОДНФ \mathcal{F}'' преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^{\text{А}}, t_{\&}^{\text{К}}\}$, а также тождества

$$x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1, \quad (2.2)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \bar{x}_i \xrightarrow{t_{0,\&}^{\text{ПК}}} (x_1 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_i \cdot \bar{x}_i) \xrightarrow{t_{\&}^{\text{К}}} (x_i \cdot \bar{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow{t_{0,\&}^{\text{ПК}}} x_1 \cdot \bar{x}_1.$$

На втором этапе полученная формула $\check{\mathcal{F}}$ преобразуется в $\widehat{\mathcal{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных элементарных конъюнкций или подформул $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}$ и, в случае $f \neq 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_{\vee}^{\text{А}}, t_{\vee}^{\text{К}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}\}$.

Заметим, что первые два этапа приведения подобных, на которых происходит приведение повторений БП в ОЭК и ЭК, уже дают нам искомую формулу $\widehat{\mathcal{F}}$. Однако, для уменьшения числа шагов в последующих ЭП можно выполнить третий этап приведения подобных — этап приведения поглощений ЭК. На каждом шаге этого этапа в полученной ДНФ с помощью тождеств $\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}\}$ выделяется подформула вида $K'' \vee K'' \cdot K$, где K'' и K — некоторые ЭК, а затем ЭК $K'' \cdot K$ «устраняется» с помощью ЭП

$$K'' \vee K'' \cdot K \xrightarrow{t_{\text{П}}} K''.$$

Заметим также, что раскрытие скобок и различные этапы приведения подобных можно чередовать друг с другом при ЭП подформул формулы \mathcal{F}' или формул \mathcal{F}' , $\widehat{\mathcal{F}}$.

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\check{\mathcal{F}}$ в (2.1) выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК \widehat{K} из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r , где

$r = n - q < n$, и не содержит букв БП x_{i_1}, \dots, x_{i_q} , приводится к ее совершенной ДНФ \tilde{K} от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \underset{t_{1,\&}^{\text{ПК}}}{\rightleftarrows} \widehat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \underset{t_{\&,\vee}^{\text{D}}}{\rightleftarrows} \tilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\check{\mathcal{F}}$ к $\hat{\mathcal{F}}$, и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\tilde{\mathcal{F}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.*

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3),$$

для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\underset{t_{\&}^{\text{M}}}{\mapsto} (x_1 \vee x_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3) &&= \mathcal{F}', \\ \mathcal{F}' &\underset{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}} \setminus t^{\text{II}}\}}{\rightleftarrows} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \check{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}, \\ \hat{\mathcal{F}} &\underset{\{\tau^{\text{A}}, \tau^{\text{K}}, t^{\text{II}}\}}{\rightleftarrows} \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 &&= \hat{\mathcal{F}}', \\ \hat{\mathcal{F}}' &\underset{\{t_{\&,\vee}^{\text{D}}, \tau^{\text{III}}\}}{\rightleftarrows} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 &&= \tilde{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.*

Доказательство. Пусть \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор

$x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' . Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'' , а $\tilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 2.2, имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \underset{\tau^{\text{осн}}}{\stackrel{\sim}{\rightleftharpoons}} \tilde{\mathcal{F}} \underset{\tau^{\text{осн}}}{\stackrel{\sim}{\rightleftharpoons}} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему. \square

Следствие. Система тождеств $\{\tau^{\text{осн}}, \tau^{\text{В}}, \tau^{\text{С}}\}$ — КПСТ для ЭП СФЭ из $\mathcal{U}^{\text{С}}$.

Рассмотрим далее вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $\text{Б} = \{\varphi_i\}_{i=1}^b$ у нас имеется другой конечный полный базис $\text{Б}' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{k'_i})$ из $\mathcal{U}_{\text{Б}'}^{\Phi}$, где $k'_i \geq k_i$, реализует ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i . При этом будем считать, что если φ_i — константа и, следовательно, $k_i = 1$, то имеет место равенство $k'_i = 2$, а формула Φ'_i зависит только от БП x_2 . Положим

$$\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b), \quad \Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b),$$

где Π'_i — тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i$, $i = 1, \dots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса Б к базису Б'*.

Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом $\text{Б}'$, которая получается из \mathcal{F} заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i})$, то есть является результатом подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_j в формулу Φ'_i для всех j , $j = 1, \dots, k_i$. Переход от формулы \mathcal{F} к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы \mathcal{F}*

в базисе B' на основе формул перехода Φ' или, иначе, на основе тождеств перехода Π' . Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\Pi'}{\Rightarrow} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом $B \cup B'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t , являющихся формулами из \mathcal{U}_B^Φ , получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над \mathcal{U}_B^Φ , — через $\Pi'(\tau)$.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе B с помощью ЭП формул базиса B' . Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса B к базису B' , а $\Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ' . Заметим, что любое ЭП для формул из \mathcal{U}_B^Φ , имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}, \quad (2.3)$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\Rightarrow} \widehat{\mathcal{F}}', \quad (2.4)$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}}' = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$. Действительно, пусть ЭП (2.3) является однократным ЭП на основе тождества t , $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t: \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$ формулы \mathcal{F} формулой $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$. То-

гда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t' : \mathfrak{A}'(x_1, \dots, x_1) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}}'$ может быть получена из формулы \mathcal{F}' в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$, где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$ для всех j , $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$. Моделирование кратного ЭП вида (2.3) с помощью кратного ЭП вида (2.4) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (2.3).

Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}^{\Phi}$, которые принадлежат множеству $\Pi'(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}^{\Phi})$, то есть являются «моделями» формул из $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}^{\Phi}$, на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ . Для того чтобы проводить ЭП для произвольных формул из $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}'}^{\Phi}$ с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$ от базиса \mathfrak{B}' к базису \mathfrak{B} и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$. Пусть $\check{\Pi}$ — система тождеств вида $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}'}^{\Phi}$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π' . Для произвольной формулы \mathcal{F}' , $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}'}^{\Phi}$, положим

$$\check{\Pi}(\mathcal{F}') = \Pi'(\Pi(\mathcal{F}'))$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\check{\Pi}}{\rightrightarrows} \check{\mathcal{F}}' = \check{\Pi}(\mathcal{F}'), \quad \check{\mathcal{F}}' \in \Pi'(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}^{\Phi}).$$

В силу сказанного выше, отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.2 (теорема перехода). Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ .

Следствие. Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из \mathcal{U}^Φ (см. §2) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

§3 Эквивалентные преобразования контактных схем. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

Рассмотрим вопросы ЭП для КС из \mathcal{U}^K с неразделенными (бесповторными) полюсами. В соответствии с §1, ?? главы 2 эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ'' . На рис. 3.1a–3.1e и 3.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1 – t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС, мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из того, что матрица достижимости КС, являющейся результатом отождествления, однозначно определяется матрицей достижимости исходной КС. На рис. 3.2a

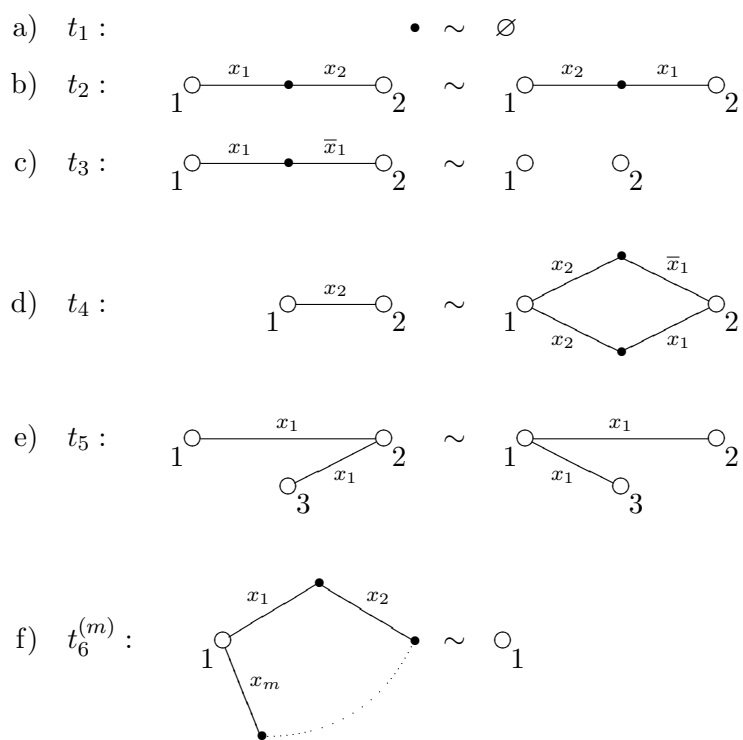


Рис. 3.1: основные тождества для КС

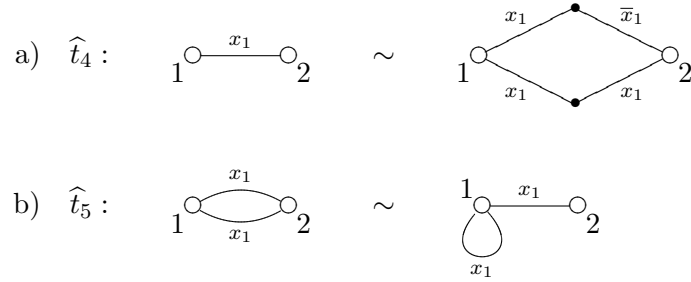


Рис. 3.2: подстановки для основных тождеств

(3.2b) показана подстановка \hat{t}_4 тождества t_4 (соответственно \hat{t}_5 тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

Рассмотрим примеры ЭП контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 3.3а–3.3е приведены тождества t_7 – t_{11} , которые мы будем называть *вспомогательными*. Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rightarrow t_7$ доказывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества \hat{t}_5 (см. рис. 3.2а) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств t_8 – t_{11} из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 3.4–3.7 соответственно, где Σ_i и $\bar{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i , $i \in [8, 11]$. Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

Обобщим тождества t_1 – t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geq 2$. Для каждого i , $i \in [1, 2^n]$, сопоставим ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую ее

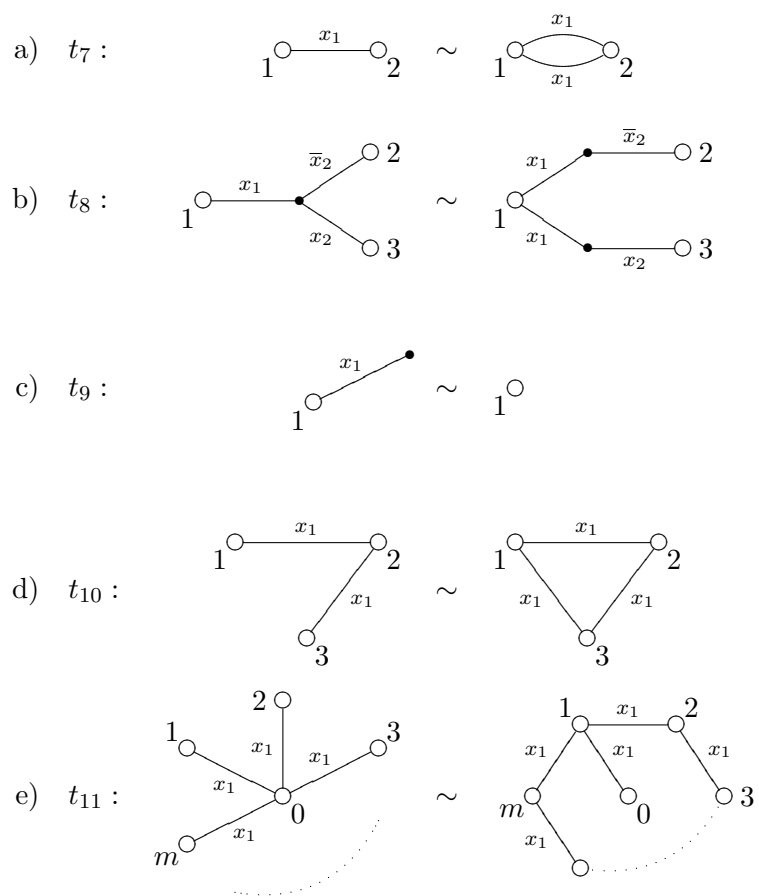


Рис. 3.3: вспомогательные тождества для КС

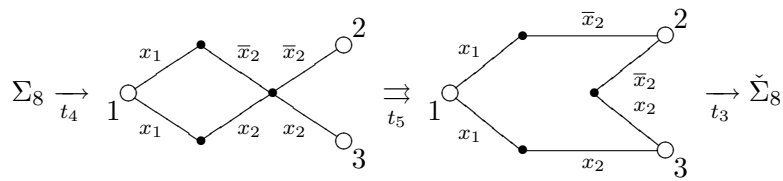


Рис. 3.4: вывод t_8

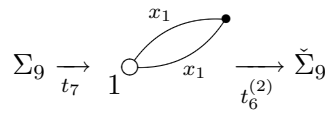


Рис. 3.5: вывод t_9

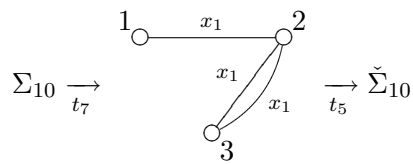
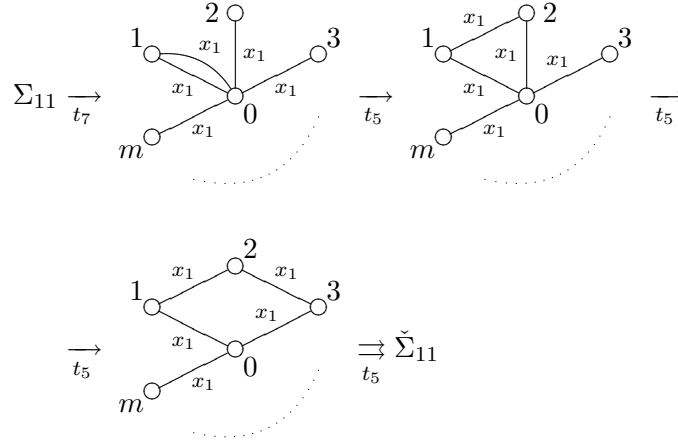


Рис. 3.6: вывод t_{10}

Рис. 3.7: вывод t_{11}

цепочку $I_i^{(n)}$ (см. §5 главы 2), и пусть

$$\begin{aligned} I_i^{(n)} &= I_i, & i \in [1, 2^n], & & I &= I_{2^n}; \\ I_i^{(n-1)} &= I'_i, & i \in [1, 2^{n-1}], & & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\ I_i^{(n-2)} &= I''_i, & i \in [1, 2^{n-2}], & & I'' &= I''_{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$, где $t_1^{(n)} = t_1, t_6^{(n)}$ — соответствующее основное тождество (см. рис. 3.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 3.8a, где \tilde{I} — произвольная перестановка цепочки I , а остальные тождества приведены на рис. 3.8b—3.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n* . При этом система $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$ считается системой основных тождеств порядка n , а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞ .

Лемма 3.1. *При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$.*

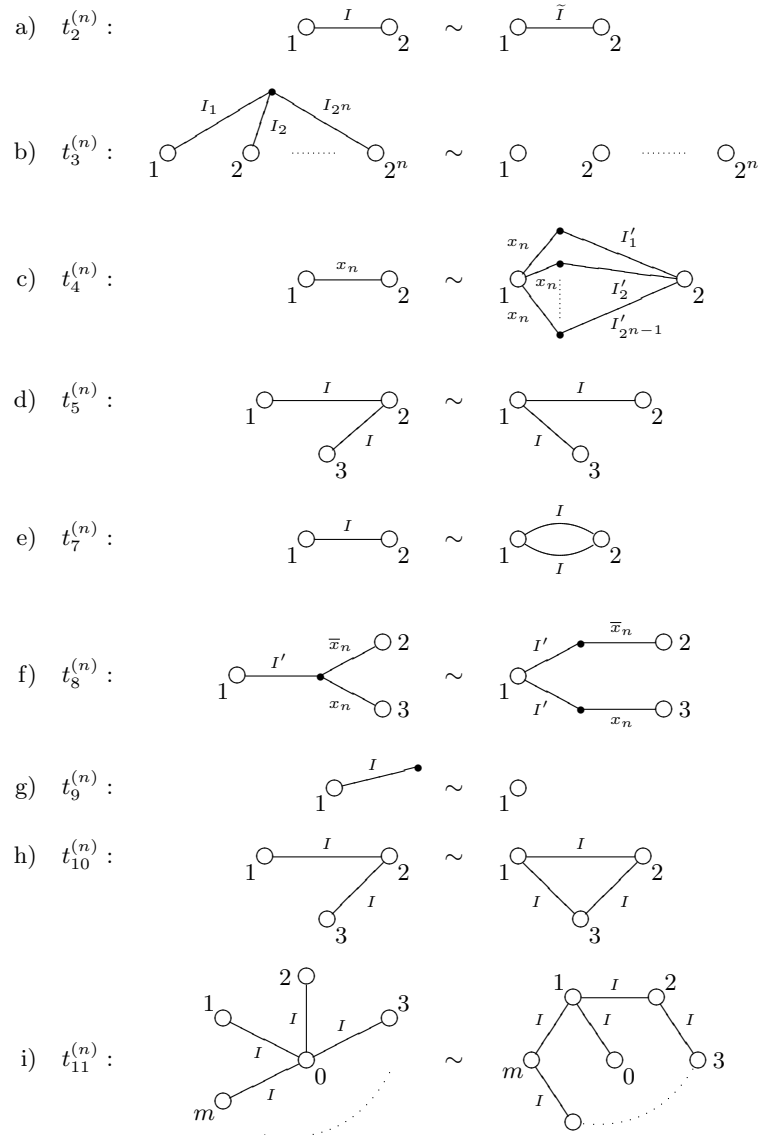


Рис. 3.8: обобщенные тождества порядка n для КС

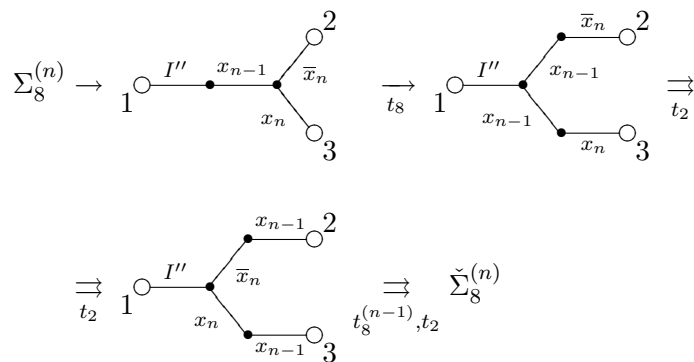


Рис. 3.9: вывод $t_8^{(n)}$

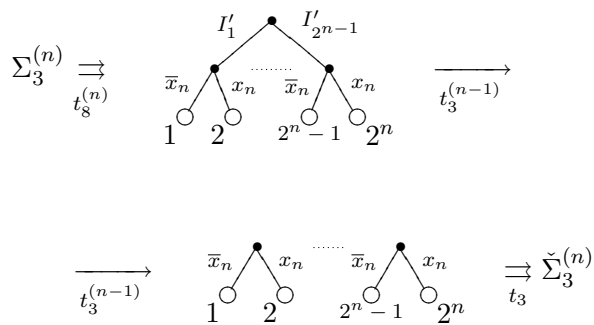


Рис. 3.10: вывод $t_3^{(n)}$

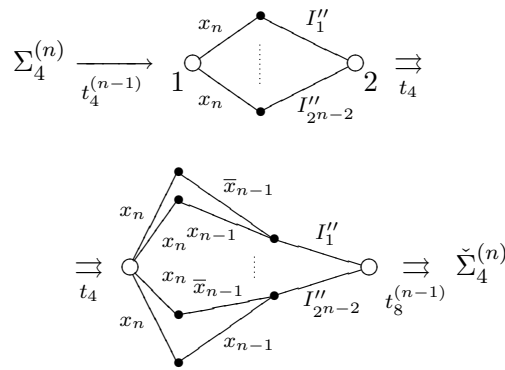


Рис. 3.11: вывод $t_4^{(n)}$

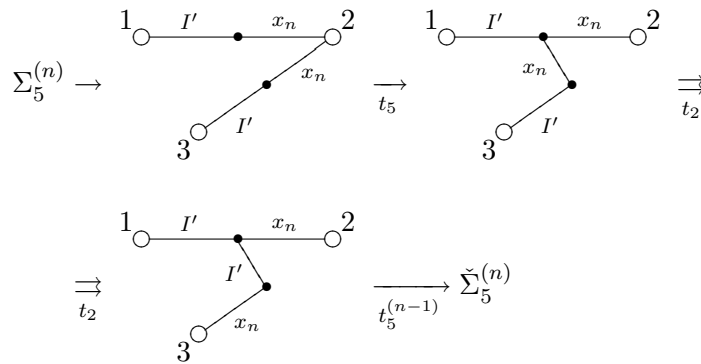


Рис. 3.12: вывод $t_5^{(n)}$

Доказательство. Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \Rightarrow t_2^{(n)}, \quad \{t_9\} \Rightarrow t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \Rightarrow t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, докажем индукцией по n , $n \geq n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\tilde{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 3.9–3.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow t_7^{(n)}, \quad \{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow \{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\}$$

при $n \geq 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 3.6, 3.7).

Лемма доказана. \square

§4 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из \mathcal{U}^K можно привести к каноническому виду. Напомним (см. §5, ?? главы 2), что каноническая КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, или, иначе, *каноническая КС порядка n* , представляет собой объединение канонических $(1, 1)$ -КС вида $\widehat{\Sigma}_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$, построенных на основе совершенных ДНФ ФАЛ проводимости от a_i к a_j для всех i и j таких, что $1 \leq i < j \leq m$.

Любую цепь $I_i^{(n)}$ (см. §3), где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка n* . Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ является канонической КС порядка n тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой канонической цепи порядка n , являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;
2. любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;
3. в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть канонические цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;
4. в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 4.1a), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 4.1b).

Лемма 4.1. *Для любой КС Σ , где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$.*

Доказательство. Построим ЭП вида

$$\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

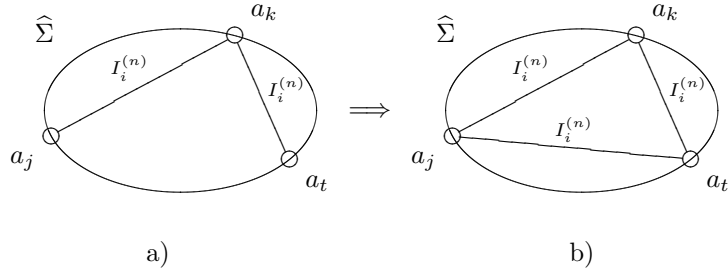


Рис. 4.1: к свойству 4 КС канонического вида

где КС Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $1, \dots, i$, отличающими канонические КС. Первое из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xRightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \xRightarrow{\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}} \Sigma_2 \quad (4.1)$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1 , которые не являются внутренними вершинами ее канонических цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1 , которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$. Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи C_1, \dots, C_q , концевой вершиной которых она является (см. рис. 4.2а). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j , $j \in [1, p]$, цепи $C_{a_j}, \dots, C_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где i_1, \dots, i_p — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ'_1 , в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j} , $j \in [1, p]$ (см. рис. 4.2b). Пусть, далее, КС Σ''_1 получается из КС Σ'_1 присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей C_{p+1}, \dots, C_{2^n} всех отсутствующих среди I_{i_1}, \dots, I_{i_p} типов (см. рис. 4.2c), а КС Σ'''_1 получается из КС Σ''_1 в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей C_{p+1}, \dots, C_{2^n} (см. рис. 4.2d). По индуктивному предположению для КС Σ'''_1 существует ЭП вида

$$\Sigma'''_1 \xrightarrow{\quad} \Sigma_2$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (4.1).

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана. \square

Теорема 4.1. *Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП x_1, \dots, x_n существует ЭП вида $\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП x_1, \dots, x_n , эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому, в силу леммы 4.1, существует ЭП вида

$$\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}'' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''.$$

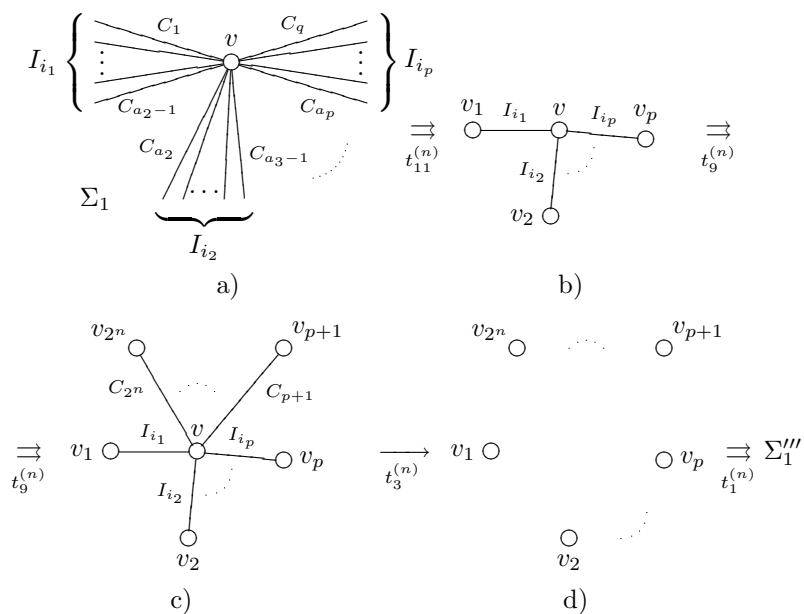


Рис. 4.2: к доказательству леммы 4.1

Теорема доказана. □

Следствие 1. Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K от БП x_1, \dots, x_n .

Следствие 2. Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K .

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе \mathcal{U}^K . Для КС Σ от БП x_1, \dots, x_n и набора $\alpha, \alpha \in B^n$, определим величину

$$\Theta(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma|_\alpha)| - |V(\Sigma|_\alpha)| + |c(\Sigma|_\alpha)|,$$

которая (см. §1 главы 2) задает цикломатическое число графа $\Sigma|_\alpha$. Положим, далее,

$$\Theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \Theta(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 4.2. *Если $\Sigma'(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[\{t_1-t_5\}]{\tau_k} \Sigma''(x_1, \dots, x_n)$, то $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\tau_k} \Sigma''$, где $k < n$, то $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .*

Доказательство. Докажем, что $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$, если $\Sigma' \xrightarrow[t_i]{\tau_i} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1, 5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\widehat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i , на соответствующую ей правую часть $\widehat{\Sigma}''_i$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i , $i \in [1, 5]$, число линейно независимых циклов графов $\Sigma'|_\alpha$ и $\Sigma''|_\alpha$ одинаково при всех α , $\alpha \in B^n$, и, следовательно, $\Theta(\Sigma') = \Theta(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\tau_k} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число сети $\Sigma'|_\alpha$ для различных α , $\alpha \in B^n$. Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α , $\alpha \in B^n$, $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 0$. В противном случае, пусть x_{j_1}, \dots, x_{j_m} — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leq k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α , $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами j_1, \dots, j_m совпадают со значениями соответствующих переменных на-

бора α . Таким образом, разность

$$\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (\Theta(\Sigma'|_{\alpha}) - \Theta(\Sigma''|_{\alpha}))$$

делится на 2^{n-m} и, следовательно, делится на 2^{n-k}

Лемма доказана. \square

Теорема 4.2. *В классе \mathcal{U}^K не существует конечной полной системы тождеств.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного: пусть τ — КПСТ для ЭП КС \mathcal{U}^K , и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ . Тогда $\tau_n \Rightarrow \tau$ и τ_n — КПСТ для \mathcal{U}^K . Докажем, что $\tau_n \not\Rightarrow t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим КС Σ' , состоящую из простого цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с пометками x_i , $i \in [1, n+1]$, и имеющую единственный полюс с пометкой 1, которая является левой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'' , содержащая изолированный полюс 1, которая является правой частью тождества $t_6^{(n+1)}$. Если $\tau_n \Rightarrow t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \stackrel{\tau_n}{\Rightarrow} \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $\Theta(\Sigma') = 1$, $\Theta(\Sigma'') = 0$ и разность $\Theta(\Sigma') - \Theta(\Sigma'') = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 4.2. Таким образом, тождество $t_6^{(n+1)}$ не выводится из системы τ_n , а значит, и из системы τ . Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС из класса \mathcal{U}^K .

Теорема доказана. \square

Глава 4

Синтез и сложность управляющих систем

§1 Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и оценки сложности функций

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в ?? главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть \mathcal{U} — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ , а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса \mathcal{U} , то есть отображение \mathcal{U} во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср. с ?? гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе \mathcal{U} как минималь-

ное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из \mathcal{U} , которые реализуют F . При этом схема Σ , принадлежащая классу \mathcal{U} , которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе \mathcal{U} относительно функционала Ψ . В силу монотонности функционала Ψ , минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем, а во многих случаях — среди строго приведенных схем (см. §1 главы 3).

Величину $\Psi(F)$, в том случае когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом $L(L, D, T, R, \text{ и т. д.})$, будем называть *сложностью* (соответственно *размером*, *глубиной*, *задержкой*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ* F . Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ* . В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида \mathcal{U}_B^A (\mathcal{U}^A) будем обозначать через $\Psi_B^A(F)$ (соответственно $\Psi^A(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_B^A(n)$ (соответственно $\Psi^A(n)$). В обозначениях классов \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}_B^Φ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс B вида B_0 будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем \mathcal{U}' и \mathcal{U}'' соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π -схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|. \quad (1.1)$$

Следствие 1. *В силу (1.1), с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} L^C(n) &\leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1}, \\ L^K(n) &\leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n. \end{aligned}$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых, наряду с (1.1), справедливы также неравенства:*

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ_f можно взять π -схему, которая получается из $(1, 2^n)$ -КД порядка n от БП x_1, \dots, x_n (см. рис. 5.4а из §5 главы 2) в результате снятия тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f , отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула \mathcal{F}_f получается в результате моделирования построенной π -схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §5 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \quad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L^-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L^-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (1.2)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (1.3)$$

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

1. линейной ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратора Q_n порядка n ;
4. универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n , состоящей из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для указанных ФАЛ и систем ФАЛ. Следуя §1 главы 2, будем называть (схемным) мультиплексором, дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ. Примером контактного дешифратора порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рисунке 5.4, а пример контактного мультиплексора порядка n дает π -схема, приведенная на рис. 5.6б.

Лемма 1.3. *Для любого натурального n выполняются неравенства:*

$$L^C(Q_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^K(Q_n) \leq 2^{n+1} - 2; \quad (1.4)$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3; \quad (1.5)$$

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \quad (1.6)$$

Доказательство. В классе \mathcal{U}^C построим схемный дешифратор порядка n , удовлетворяющий первому неравенству (1.4), следующим образом:

1. разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;

2. возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n - q)$ соответственно, реализующие каждую свою ЭК по лемме 1.1;
3. объединим СФЭ Σ' и Σ'' , после чего конъюнктируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'' , а выходы всех использованных для этого 2^n ФЭ $\&$ (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Искомым контактным дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$ -контактное дерево, показанное на рисунке 5.4а, а искомым контактным мультиплексором порядка $n - \pi$ -схема, приведенная на рис. 5.6б. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 5.4а и 5.6б, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (1.4) и (1.5), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно $2^n - 1$.

В результате моделирования π -схемы, показанной на 5.6б, можно построить неповторную по информационным БП формулу (см. §5 главы 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left(\bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left(\dots \left(\bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right), \end{aligned}$$

которая удовлетворяет второму неравенству (1.5), так как реализует ФАЛ μ_n и имеет сложность $4 \cdot 2^n - 3$.

Неравенства (1.6) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n , $n \geq 2$, со сложностью (1.6), является СФЭ Σ_n^\oplus , показанная на рис. 4.2 главы 2. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ $\&$ на ФЭ \vee и ФЭ \vee на ФЭ $\&$ в первой подсхеме вида Σ_2^\oplus схемы Σ_n^\oplus (см. рис. 4.2б главы 2).

Лемма доказана. □

Рассмотрим, далее, некоторые нижние оценки сложности ФАЛ и примеры минимальных схем.

Лемма 1.4. *Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n. \quad (1.7)$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n + k). \quad (1.8)$$

Доказательство. Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из \mathcal{U}^C , реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_1, \dots, x_n следует, что $R(\Sigma_f) \geq n$, и поэтому, в силу соотношений (??) главы 2,

$$L^C(f) \geq L_{\&, \vee}(\Sigma_f) \geq n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то схема Σ_f должна содержать хотя бы один ФЭ \neg и, следовательно, в указанном случае

$$L^C(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Таким образом, первые из неравенств (1.7) и (1.8) доказаны.

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1, 1)$ -КС, реализующая ФАЛ f . Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i , $i \in [1, n]$, следует, что либо контакт вида x_i , либо контакт вида \bar{x}_i встречается в КС Σ_f , и поэтому

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n.$$

Если же, кроме того, БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f , то как контакт вида

x_i , так и контакт вида \bar{x}_i входят в Σ_f , и, следовательно, в данном случае

$$L^K(f) = L(\Sigma_f) \geq n + k.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(\ell_n) &\geq n, & L^K(\ell_n) &\geq 2n, \\ L^C(\mu_n) &\geq 2^n + n, & L^K(\mu_n) &\geq 2^n + 2n. \end{aligned}$$

Лемма 1.5. Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m). \quad (1.9)$$

Доказательство. Второе из неравенств (1.9) вытекает из того, что все ФАЛ f_i , $i = 1, \dots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$ -КС, реализующая систему ФАЛ F . Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m + 1)$ вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geq |V(\Sigma_F)| - 1 \geq m.$$

Лемма доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(Q_n) &\geq 2^n, & L^K(Q_n) &\geq 2^n, \\ L^C(\mathcal{J}_n) &\geq 2^n, & L^K(\mathcal{J}_n) &\geq 2^n, \\ L_B^C(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - n, & L^K(\vec{P}_2(n)) &\geq 2^{2^n} - 2. \end{aligned}$$

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v , а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v , объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции присоединения вершины v к вершине w . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ' , которая, очевидно, эквивалентна Σ .

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Лемма 1.6. *Для каждого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует универсальная СФЭ U_n порядка n , сложность которой равна $2^{2^n} - n$.*

Доказательство. В силу полноты базиса, в \mathcal{U}_B^C существует система формул Σ от БП x_1, \dots, x_n , которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §1 главы 3). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n , включая n ее входов,

равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. \square

Замечание. В силу следствия из леммы 1.5, построенная схема U_n является минимальной по сложности универсальной СФЭ порядка n , и поэтому, в частности,

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) = 2^{2^n} - n.$$

Докажем, что $(1, 2^n)$ -контактное дерево — минимальный контактный дешифратор порядка n в классе разделительных (по выходам) КС.

Лемма 1.7. *Если разделительная по выходам $(1, m)$ -КС Σ реализует m различных ФАЛ, отличных от 0, то*

$$L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

Доказательство. Пусть Σ — приведенная и, следовательно, связная КС от БП x_1, \dots, x_n . Из разделительности Σ следует, что при любом α , $\alpha \in B^n$, сеть $\Sigma|_\alpha$ состоит не менее чем из m связных компонент. Заметим, что удаление всякого ребра увеличивает число связных компонент графа не более чем на единицу, и поэтому число $|E(\Sigma|_\alpha)|$ — число контактов, не проводящих на наборе α , — удовлетворяет неравенству

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geq m - 1. \quad (1.10)$$

Суммируя (1.10) по всем α , $\alpha \in B^n$, и учитывая, что каждый контакт КС Σ не проводит ровно на половине всех наборов куба B^n , получим

$$2^{n-1}L(\Sigma) \geq 2^n(m - 1), \quad L(\Sigma) \geq 2m - 2.$$

Лемма доказана. \square

Следствие. Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему ФАЛ Q_n .

Действительно, в соответствии с леммой 1.7, сложность разделительной $(1, 2^n)$ -КС не меньше чем $2^{n+1} - 2$, то есть не меньше сложности $(1, 2^n)$ -контактного дерева порядка n .

§2 Каскадные схемы и адресующие программы. Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов, метод Шеннона

Приведенные в §1 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [20] является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Для построения соответствующей контактной схемы используется специальный частный случай корректной суперпозиции КС (см. ?? главы 2) — операция присоединения одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \tilde{m})$ -КС $\check{\Sigma}$ в результате добавления новой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\check{\Sigma}$ контактами \bar{x}_i и x_i соответственно (см. рис. 2.2а). Тогда в вершинах v_0 и v_1 КС Σ в силу разделительности по входам присоединяемой $(2, 1)$ -КС реализуются те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС $\check{\Sigma}$, а в вершине v — ФАЛ g вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (2.1)$$

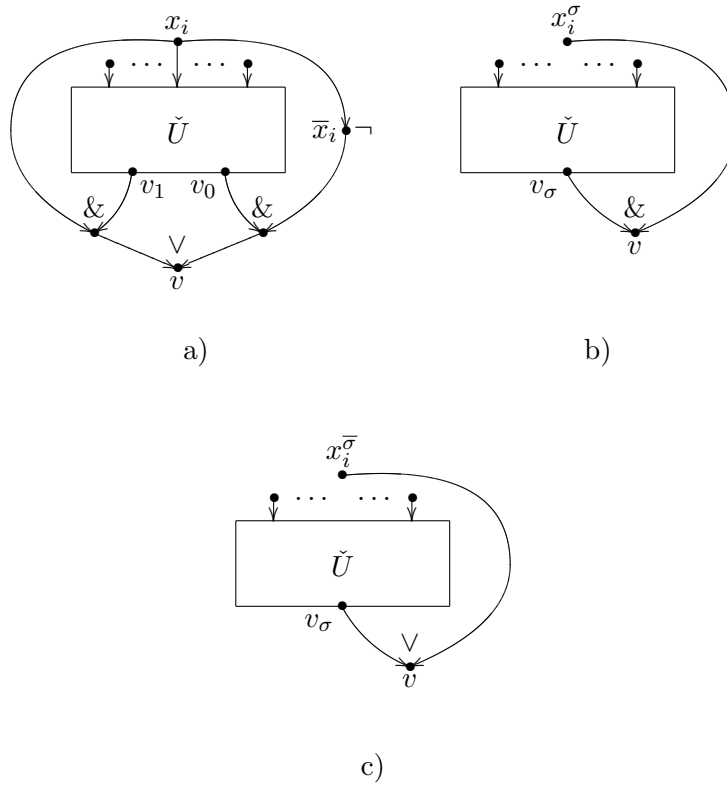


Рис. 2.1: к описанию метода каскадов для СФЭ

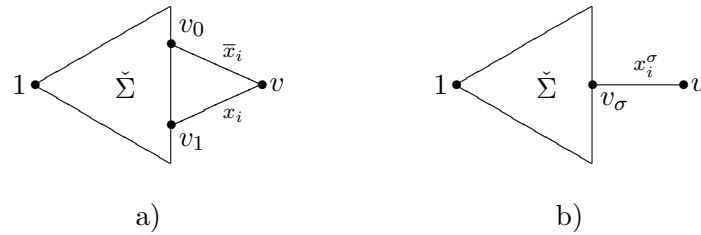


Рис. 2.2: присоединение одного или двух противоположных контактов

Аналогичные соотношения будут справедливы и тогда, когда вершина v КС Σ связана с КС $\check{\Sigma}$ только одним контактом вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, соединяющим ее с вершиной v_σ (см. рис. 2.2b). В этом случае в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma. \tag{2.2}$$

Переход от СФЭ \check{U} , $\check{U} \in \mathcal{U}^C$, которая реализует в выходных вершинах v_0 и v_1 ФАЛ g_0 и g_1 соответственно, к СФЭ U , $U \in \mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ g , удовлетворяющую (??) ((??)), показан на рис. 2.1a (соответственно 2.1b).

Определим *каскадную* КС как приведенную КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов. Каскадная КС (ККС) считается *полной*, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта. Так, например, КС, показанная на рис. 5.3с главы 2, является полной ККС, если её входами считать вершины a_1 и v , а выходами — вершины a_2 и a_3 , или наоборот. К числу ККС относятся также контактные деревья, показанные на рис. 5.4

главы 2, причем $(2^n, 1)$ -КД является полной ККС.

Индукцией по числу контактов ККС легко показать, что если две проводящие цепи, соединяющие входы ККС с другими ее вершинами, имеют общий контакт, то они проходят его в одном и том же направлении. Заметим, далее, что, в силу корректности рассматриваемых операций присоединения контактов, ККС является разделительной по входам КС. Отсюда следует, что в каждой вершине ККС реализуется столбец, в котором никакие две ФАЛ не обращаются в единицу одновременно, причем в случае полной ККС дизъюнкция всех ФАЛ этого столбца дает 1. Так, в частности, в каждой вершине полной ККС с двумя входами реализуется столбец из двух противоположных ФАЛ.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется *неполной вершиной* этой ККС. Будем говорить, что ККС Σ'' является *дополнением* неполной ККС Σ' , если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом, очевидно,

$$L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma'), \quad (2.3)$$

объединение Σ' и Σ'' является полной ККС, а ККС Σ'' , в силу отмеченных выше свойств полных ККС, реализует систему ФАЛ \bar{F}' , если ККС Σ' имеет один вход и реализует систему ФАЛ F' .

В последние годы активно изучается (см., например, [33]) один специальный класс ориентированных КС — т. н. двоичные решающие диаграммы (BDD), которые представляют собой, по существу, частный случай ККС. Схема Σ с одним входом a и двумя выходами a_0, a_1 , называется *двоичной решающей диаграммой*, если она состоит из ориентированных контактов и не имеет (ориентированных) цик-

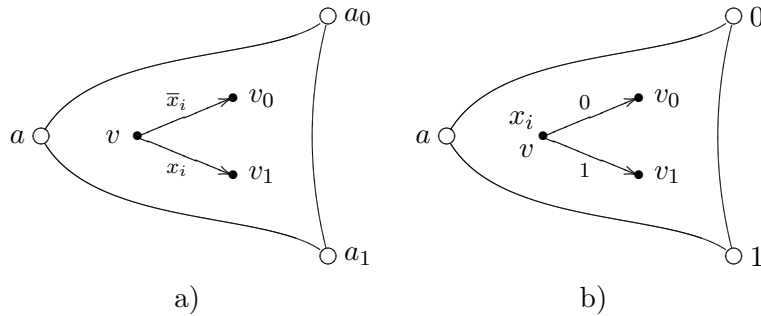


Рис. 2.3: к определению BDD

лов, а из каждой ее вершины v , отличной от выходов, исходят две дуги с противоположными пометками вида x_i, \bar{x}_i (см. рис. 2.3a). При этом вершине $v (a_0, a_1)$, обычно, сопоставляют пометку x_i (соответственно 0, 1), а пометки \bar{x}_i и x_i у исходящих из v ребер заменяют пометками 0 и 1 соответственно (см. рис. 2.3b). Заметим, что BDD Σ указанного вида от БП x_1, \dots, x_n получается из некоторой полной $(2, 1)$ -ККС $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_0, a_1; a)$ введением ориентации каждого контакта $\widehat{\Sigma}$ по направлению движения проходящих через него проводящих цепей $\widehat{\Sigma}$, идущих от a к a_0, a_1 . При этом, очевидно, схемы Σ и $\widehat{\Sigma}$ реализуют между вершинами a и a_1 некоторую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, между вершинами a и a_0 — ФАЛ $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$, а ФАЛ проводимости от a_0 к a_1 и обратно равна 0. В таком случае, обычно, считается, что Σ реализует ФАЛ f . Так, например, BDD Σ , показанная на рис. 2.4 (ср. с рис. 5.3с главы 2), реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Заметим, что BDD можно интерпретировать как адресующие бинарные программы (см., например, [11]). Действительно, сопоставим каждой отличной от выхода вершине v BDD Σ (см. рис. 2.3b) команду условного перехода на ко-

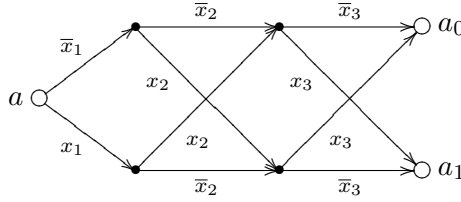


Рис. 2.4: BDD для l_3

манду, сопоставленную вершине v_σ , $\sigma \in B$, если $x_i = \sigma$, а выходной вершине с пометкой σ , $\sigma \in B$, — команду присвоения вычисляемой ФАЛ значения σ . Полученная таким образом программа начинает свою работу с команды, сопоставленной входу Σ , и вычисляет ту же самую ФАЛ, что и BDD Σ .

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$ -КС Σ_F , $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$, и СФЭ U_F , $U_F \in \mathcal{U}^C$, которые реализуют F . Будем считать, что все ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m системы F различны, отличны от констант, и для каждой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i .

Разложим ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m сначала по БП x_1 , потом по БП x_2 и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и \widehat{G}_i , состоящих из ФАЛ от БП x_i, x_{i+1}, \dots, x_n , где $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \dots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq j \leq m$, $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;

2. \widehat{G}_i состоит из всех различных функций g , $g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\widehat{G}_1, \dots, \widehat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются. Положим, далее,

$$\check{G}_i = \bigcup_{j=i}^n \widehat{G}_j, \quad \check{m}_i = |\check{G}_i| + 1,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, и пусть

$$\widehat{G}_{n+1} = \check{G}_{n+1} = \emptyset, \quad \check{m}_{n+1} = 1.$$

Заметим, что любую ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, где $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде (??), где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех σ , $\sigma \in B$. Если при этом для некоторого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ $g_{\bar{\sigma}}$ равна 0, то вместо (??) будем использовать разложение (??), где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.

Пусть $(1, 1)$ -КС $\check{\Sigma}_{n+1}$ представляет собой изолированный вход, который одновременно является выходом и реализует константу 1. Пусть, далее, для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, уже построена $(1, \check{m}_{i+1})$ -КС $\check{\Sigma}_{i+1}$, реализующая систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$. Построим тогда $(1, \check{m}_i)$ -КС $\check{\Sigma}_i$, которая реализует систему ФАЛ $\check{G}_i \cup \{1\}$ следующим образом:

1. КС $\check{\Sigma}_i$ содержит КС $\check{\Sigma}_{i+1}$ в качестве подсхемы, на выходах которой (они одновременно являются выходами $\check{\Sigma}_i$) реализуются ФАЛ из множества $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$;
2. Каждая ФАЛ g , $g \in \widehat{G}_i$, реализуется согласно (??) ((??)) на выходе v КС $\check{\Sigma}_i$, который при $\alpha = 0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α подсхемы $\check{\Sigma}_{i+1}$, где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ так, как это показано на рис. 2.2a (соответственно рис. 2.2b) из ?? главы 2.

Таким образом, построенная указанным выше способом КС $\check{\Sigma}_1$ реализует систему ФАЛ $\check{G}_1 \cup \{1\}$, и для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_1$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от f_1, \dots, f_m . При этом константа 1 всегда реализуется КС $\check{\Sigma}_1$, а константа 0 может быть реализована в изолированной вершине, и поэтому их включение в систему ФАЛ F не влияет на построение КС Σ_F и ее сложность.

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F , с той лишь разницей, что:

1. СФЭ \check{U}_n реализует систему ФАЛ I , состоящую из БП x_1, \dots, x_n , а также ФАЛ вида \bar{x}_i , $1 \leq i \leq n$, которые встречаются в КС Σ_F ;
2. для всех i , $i = (n-1), \dots, 1$, при переходе от СФЭ \check{U}_{i+1} , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup I$, к СФЭ \check{U}_i , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_i \cup I$, разложение (??), где $g \in \hat{G}_i$ и $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$, реализуется так, как показано на рис. 2.1а, а разложение (??), применяемое в случае $g_{\bar{\sigma}} = 0$ (разложение $g = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma} x_i^{\sigma} = x_i^{\bar{\sigma}} \vee g_{\sigma}$ в случае $g_{\bar{\sigma}} = 1$), — так, как показано на рис. 2.1б (соответственно 2.1с);
3. каждая ФАЛ вида $g_{\sigma} x_i^{\sigma}$, используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (??) или (??) для различных ФАЛ g , реализуется только один раз.

Как и в случае КС, СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ \check{U}_1 в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F .

Пусть теперь Σ_f — (1, 1)-КС, построенная по методу каскадов для функции алгебры логики f , $f \in P_2(n)$, a_1 и a —

вход и выход Σ_f соответственно, а a_0 — дополнительная изолированная вершина. Рассмотрим $(1, 2)$ -КС $\tilde{\Sigma}_f$ с входом a и выходами a_0, a_1 , которая строится аналогично Σ_f с той лишь разницей, что контакты ориентированы от вершины v к вершине v_α (см. второй этап построения КС $\tilde{\Sigma}_i$), и что при их проведении используется только разложение (??), а в случае, когда $g_\sigma = 0$, контакт x_i^σ идет из вершины v в вершину a_0 . Заметим, что КС Σ_f представляет собой $(1, 1)$ -ККС, а КС $\tilde{\Sigma}_f$ получается из полной $(2, 1)$ -ККС, являющейся объединением ККС Σ_f и ее дополнения, в результате введения ориентации всех контактов по направлению к a_0, a_1 и объединения этих вершин выходами, а вершины a — входом $\tilde{\Sigma}_f$. Таким образом, КС $\tilde{\Sigma}_f$ является BDD и реализует ФАЛ f .

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\ f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\ \hat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_2 = \hat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\ \hat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, \quad G_3 = \hat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\ \hat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}. \end{aligned}$$

На рис. 2.5 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\tilde{\Sigma}_1$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 2.6 — соответствующая ей КС Σ_F , на рис. 2.7 — строго приведенная СФЭ U_F , а на рис. 2.8 — BDD, реализующая ФАЛ f_1 .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ ℓ_n , где $n \geq 2$, является известная схема Кардо [31], показанная на рис. 2.9. Заметим, что эта КС

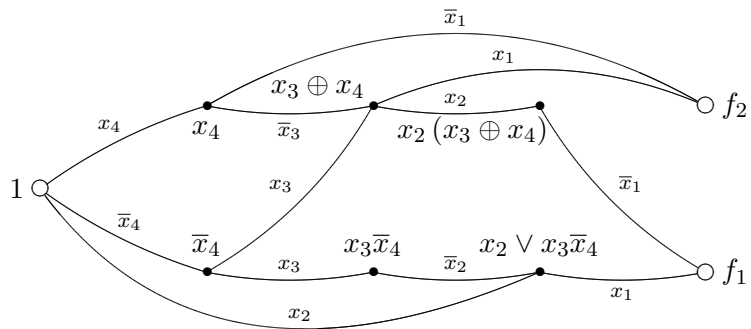


Рис. 2.5: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

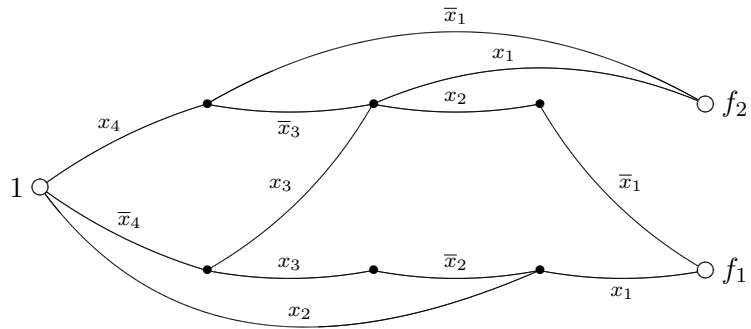


Рис. 2.6: пример КС, построенной методом каскадов

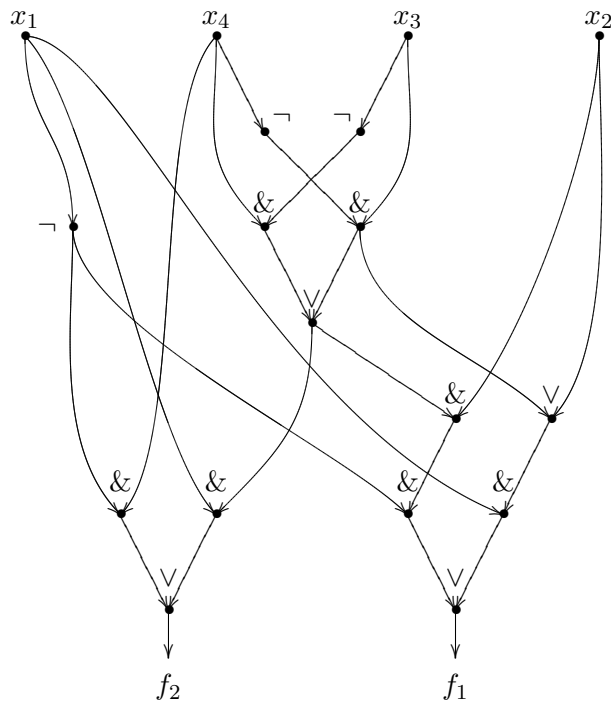


Рис. 2.7: СФЭ для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов

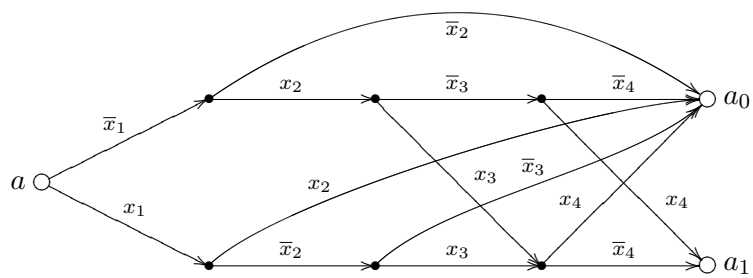


Рис. 2.8: BDD для f_1 , построенная методом каскадов

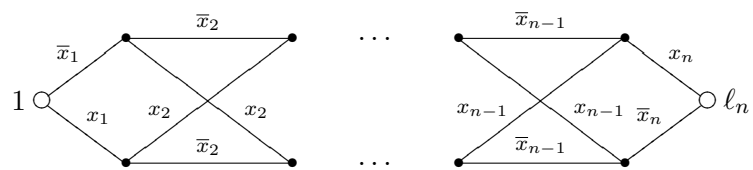


Рис. 2.9: схема Карно для линейной функции l_n

имеет сложность $(4n - 4)$ и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для ℓ_n , $n \geq 2$, по методу каскадов имеет сложность $(7n - 9)$ и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой Σ_n^\oplus сложности $(4n - 4)$, показанной на рис. 4.2 главы 2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ $\bar{\ell}_n$ (см. лемму 1.3).

При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики Q_n , мы получим контактное дерево порядка n , показанное на рис. 5.4а из §5 главы 2. Как будет показано в §6, это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный универсальный многополюсник сложности не больше, чем $2 \cdot 2^{2^n}$, а также контактный мультиплексор порядка n и сложности $3 \cdot 2^n - 2$, показанный на рис. 5.6b главы 2 (см. лемму 1.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ μ_n сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка n , построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ μ_n сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка 2^n от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем 2^{2^n+1} . Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним лемму 1.3 следующим утверждением.

Лемма 2.1. *Для любого натурального n и $\sigma \in V$ выполняются неравенства:*

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [32, 14]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ (см. §3).

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q , $1 \leq q \leq n$, и построении схемы Σ_f , реализующей произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (??) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (2.4)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ при всех σ'' , $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ_f представляет собой корректную суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' , информационные входы которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (2.4).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ в базисе B_0) Σ_f , где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД порядка $(n-q)$ из ?? главы 2 (соответственно формула \mathcal{F}_{n-q} из леммы 1.3), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 2.1 (соответственно леммы 1.6). Корректность построенной суперпозиции в случае КС обеспечивается разделительностью КД. Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$, и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

§3 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [32, 14], который основан на том, что число ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n .

Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса \mathcal{U} относительно Ψ . Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leq \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \quad (3.1)$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\hat{\Psi}$, δ , где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}(\hat{\Psi}, n)\| \leq \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geq \hat{\Psi} \quad (3.2)$$

для не менее чем $(1 - \delta) \cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$, установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (3.1)–(3.2) служат основой для

получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. теорему 3.3 и лемму 5.3 из главы 2) для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathcal{U}^C(L, n)| \leq (32(L+n))^{L+1}, \quad (3.3)$$

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (32n)^{L+1}, \quad (3.4)$$

$$|\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L \quad (3.5)$$

Лемма 3.1. Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q таких, что

$$(ay^\gamma)^{\alpha y} \geq q, \quad (3.6)$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$ выполняется неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log(\frac{a}{\alpha} \log q)} \left(1 + \frac{\log \log(\frac{a}{\alpha} \log q)}{\log(\frac{ae}{\alpha} \log q)} \right), \quad (3.7)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log a}. \quad (3.8)$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (3.8) получается в результате логарифмирования (3.6) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (3.7) следует из того, что левая часть (3.6) монотонно возрастает по y , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log(e \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
 y' \log y' &= \\
 &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln(1 + \varepsilon)) \leq \\
 &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q} \right) = \\
 &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1$, $\alpha > 0$, $a > 0$ неравенство (3.6) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geq q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (3.7) получается из неравенства $y \geq y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha} \log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha} \log q > 1$.

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n , стремящемся к бесконечности, выполняются неравенства

$$L^C(n) \geq (1 + \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (3.9)$$

$$L^\Phi(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (3.10)$$

$$L^K(n) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n} \quad (3.11)$$

Доказательство. Неравенства (3.9)–(3.11) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем \mathcal{U} с функционалом сложности L неравенства (3.3)–(3.5) на основе мощностного равенства (3.1) с использованием леммы 3.1, где $q = 2^{2^n}$, $\alpha = 1$ и

- 1) $\gamma = 1$, $a = 32$, $y = L^C(n) + n$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$;
- 2) $\gamma = 0$, $a = 32n$, $y = L^\Phi(n) + 1$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$;
- 3) $\gamma = 1$, $a = 8n$, $y = L^K(n)$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$;

Действительно, подставляя указанные значения в (3.7) и (3.8), получим

$$\begin{aligned} 1) L^C(n) &\geq \frac{2^n}{n+5} \left(1 + \frac{\log(n+5)}{n+7} \right) - n \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n - 5 - o(1)}{n} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$2) L^\Phi(n) \geq \frac{2^n}{\log n + 5} - 1 \geq \frac{2^n}{\log n} \left(1 - \frac{5 + o(1)}{\log n} \right) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} 3) L^K(n) &\geq \frac{2^n}{n+3+\log n} \left(1 + \frac{\log(n+3+\log n)}{n+5+\log n} \right) \geq \\ &\geq \frac{2^n}{n} \left(1 - \frac{3+o(1)}{n} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Следовательно, неравенство (3.9) ((3.10), (3.11)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{6}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$).

Теорема доказана. \square

Следствие 1.

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$$

Следствие 2. Нижние оценки (3.9)–(??) при указанных в доказательстве значениях $\varepsilon(n)$ справедливы для сложности почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, при их реализации в соответствующих классах схем.

Действительно, замена величины $q = 2^{2^n}$ величиной $q = \frac{1}{n}2^{2^n}$ при получении оценок (3.12)–(3.14) с помощью леммы 3.1 повлияет только на участвующие в их последних неравенствах функции вида $o(1)$. При этом, в силу (3.2), где $q = \frac{1}{n}$, а $\widehat{\Psi}$ — правая часть соответствующего неравенства (3.9)–(3.11), вновь полученная оценка будет справедлива для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$.

§4 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса \mathcal{U}^C , который был предложен О.Б. Лупановым [14] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона $L^C(n)$. Этот метод, как и метод Шеннона (см. §2), основан на представлении реализуемой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в виде (2.4) и построении искомой СФЭ Σ_f , реализующей ФАЛ f , как супер-

позиции схем вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. При этом схема Σ'' по-прежнему является мультиплексором порядка $(n - q)$ от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, а схема Σ' реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ берется не с выхода универсального многополюсника от БП x' , а реализуется на выходе Σ' как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества G , $G \subseteq P_2(q)$, реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы Σ' .

Множество ФАЛ G , $G \subseteq P_2(m)$, называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка m и ранга p* , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m , и пусть для всех i , $i = 1, \dots, p$, ФАЛ $\chi_i(x_1, \dots, x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i , а $G^{(i)}$ — множество всех тех ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i . Заметим, что множество ФАЛ G вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка m и ранга p . Действительно, любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (4.1)$$

где $g_i = \chi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех i , $i = 1, \dots, p$. Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, равна 2^{s_i} , где $s_i = |\pi_i|$, и что множество

| | $x_1 \ x_2 \dots x_{m-1} \ x_m$ | $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_{2^s}$ | $\mathfrak{G}_{2^s+1} \dots \mathfrak{G}_{2^{s+1}-1}$ | \dots | $\mathfrak{G}_{(p-1)(2^s-1)+2} \dots \mathfrak{G}_\lambda$ | |
|-------------|---------------------------------|--|---|--|--|--------------|
| π_1 | 0 0 ... 0 0 | 0 1 ... 1 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | $s=s_1$ |
| | 0 0 ... 0 1 | 0 0 ... 1 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | |
| | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | |
| | 0 0 ... 1 | 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | |
| π_2 | \dots | 0 0 ... 0 | 1 ... 1 | \dots | 0 ... 0 | $s=s_2$ |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 1 | \dots | 0 ... 0 | |
| | \dots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 1 | \dots | 0 ... 0 | |
| \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | |
| π_{p-1} | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | $s=s_{p-1}$ |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | |
| | \dots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | |
| π_p | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 1 ... 1 | $s_p \leq s$ |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 1 | |
| | \dots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | |
| | \dots | 0 0 ... 0 | 0 ... 0 | \dots | 0 ... 0 | |
| | | $\longleftarrow 2^s \longrightarrow$ | $\longleftarrow 2^s - 1 \longrightarrow$ | $\longleftarrow 2^s p - 1 \longrightarrow$ | | |

Рис. 4.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

$G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \leq i < j \leq p$. Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p 2^s, \quad (4.2)$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

В дальнейшем, на протяжении §4–§7 будем рассматривать разбиение куба B^m на последовательные отрезки, то есть такое разбиение $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m , где $p \geq m$, от БП (x_1, \dots, x_m) , что номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j , если $i < j$. Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полосами* куба B^m . Кроме того, будем предполагать, что для

$$s \leq 2^m \quad (4.3)$$

выполнены соотношения

$$p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \quad (4.4)$$

$$s_p = 2^m - (p-1)s \leq s.$$

С этим разбиением будем связывать введенные выше обозначения G , λ и $G^{(i)}$, χ_i , s_i , где $i = 1, \dots, p$, а через \vec{G} будем обозначать набор $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_\lambda)$ из $P_2^\lambda(q)$, который состоит из всех различных ФАЛ множества G , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений (см. рис. 4.1).

Заметим, что значения параметров s и m , которые однозначно определяют все введенные выше величины, будут выбираться в каждом параграфе по-своему.

Теорема 4.1. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что*

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q} . Пусть, далее, Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$, который построен в соответствии с леммой 1.3, представляет собой формулу

\mathcal{F}_{n-q} и реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', y)$. Обозначим через Σ_G СФЭ, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 1.3, (1.3) и (4.2), выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma'') &\leq 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L(\Sigma_G) &\leq 3p2^{s+q}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Схема Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов как ФАЛ $g(x')$ вида (4.1) с помощью СФЭ из $(p-1)$ ФЭ \vee , входы которой присоединены к соответствующим выходам Σ_G . Искомая СФЭ Σ_f имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (2.4). Для нее, в силу (4.6), будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq \\ &\leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q}, \end{aligned}$$

из которых, выбрав значения параметров

$$\begin{aligned} s &= \lceil n - 5 \log n \rceil, \\ m = q &= \lceil 2 \log n \rceil, \end{aligned}$$

удовлетворяющие (4.3), в соответствии с (4.4) получим

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \\ &= \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Из (4.5) и (3.9) (см. также следствие 1 из теоремы 3.1) вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (4.5) и следствиями из теорем 3.1, 4.1 сложность $L^C(f)$ для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, асимптотически равна функции Шеннона $L^C(n)$, то есть сложности самой сложной ФАЛ из $P_2(n)$. Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. ?? главы 1), в классе схем \mathcal{U}^C имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

§5 Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба. Асимптотика сложности контактного дешифратора

Построенное в §4 для синтеза СФЭ ДУМ G будем использовать и далее (см. §5–§6), хотя прямая реализация представления (4.1) в других классах схем не всегда возможна. Так, при синтезе формул (КС) все ФАЛ (соответственно часть ФАЛ) множества G должны быть «промоделированы» переменными или их отрицаниями. Для реализации такого моделирования в данном параграфе строятся специальные разбиения единичного куба, а затем рассматриваются связанные с ними разложения ФАЛ, на основе которых синтезируются формулы в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, являющиеся асимптотически оптимальными и по сложности, и по глубине для почти всех функций.

Множество δ , $\delta \subseteq B^q$, называется m -регулярным множеством наборов куба B^q , если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все

префиксы¹ длины m наборов из δ различны. Заметим, что m -регулярному множеству δ , $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(q)$, совпадает на m -регулярном множестве наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП x_{m+1}, \dots, x_q . При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q .

Для наборов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ через $\beta \oplus \alpha$ будем обозначать набор вида $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$. Для множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и набора α , $\alpha \in B^q$, определим множество $\delta \oplus \alpha$ как множество различных наборов вида $\beta \oplus \alpha$, где $\beta \in \delta$, то есть множество, получающееся из множества δ сдвигом (параллельным переносом) на набор α . Заметим, что для m -регулярного множества δ , $\delta \subseteq B^q$, и любого набора α , $\alpha \in B^q$, множество $\delta \oplus \alpha$ также является m -регулярным. Если при этом $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$, то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$ и $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$, а множество наборов δ соответствует системе ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$, то множество наборов $\delta \oplus \alpha$ будет соответствовать системе ФАЛ $(\psi_1 \oplus \gamma_1, \dots, \psi_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$, получающейся из системы ψ инвертированием некоторых ФАЛ.

Лемма 5.1. *Для любого m -регулярного множества наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, система множеств $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$, где $\delta_i = \delta \oplus \alpha$ и $\nu(\alpha) = i - 1$ при всех i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, образует разбиение куба B^q на m -регулярные подмножества.*

¹Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его префиксом (соответственно суффиксом).

Доказательство. Покажем сначала, что Δ — покрытие куба B^q . Для этого возьмем произвольный набор из B^q вида (β, γ) , где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, а по нему найдем в множестве δ набор вида $(\beta, \hat{\gamma})$, который имеется в δ в силу m -регулярности этого множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \underbrace{(0, \dots, 0)}_m, \hat{\gamma} \oplus \gamma = (\beta, \hat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$. Таким образом, система Δ образует покрытие куба B^m .

С другой стороны, из m -регулярности δ следует m -регулярность любого из множеств δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система Δ образует разбиение куба B^q .

Лемма доказана. \square

В §5–§7 мы будем выбирать параметр m так, что

$$m \leq q \leq n,$$

и будем рассматривать разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \dots, x_q)$, построенное по лемме 5.1 для некоторого m -регулярного множества наборов $\delta = \delta_1$. Воспользуемся, в заключение, конструкцией леммы 5.1 для построения асимптотики оптимальных по сложности контактных дешифраторов.

Лемма 5.2 (ср. [14]). Для системы ФАЛ Q_n при $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство

$$L^K(Q_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right) \quad (5.1)$$

Доказательство. Выберем параметры m , q и λ так, что

$$\lambda = 2^n, \quad q = m + \lambda \quad \text{и} \quad q \leq n, \quad (5.2)$$

а затем рассмотрим m -регулярное множество наборов δ_1 куба B^q от БП $x' = (x_1, \dots, x_q)$, связанное с системой ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_\lambda)$, которая состоит из ЭК вида $\psi_i(x') = x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_q) = i - 1$, $i \in [1, \lambda]$. Построим по лемме 5.1 разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^q-m})$ куба B^q и заметим, что любая ЭК $K(x') = x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$, где $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$, $i \in [1, \lambda]$, совпадает на множестве δ_i с буквой $x_{m+i}^{\bar{\alpha}_{m+i}}$ и $\nu(\alpha) = i - 1$.

Пусть, далее, $(1, 2^\lambda)$ -КС Σ' реализует столбец из ФАЛ $\chi_1, \dots, \chi_{2^\lambda}$, где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i , $i \in [1, 2^\lambda]$ и получается из $(1, 2^q)$ -КД от БП x' в результате соответствующего отождествления выходов (см.рис. 5.1). Заметим, что в силу указанных выше свойств разбиения Δ любая ЭК $K = x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_q) \in \delta_i$ и $1 \leq i \leq 2^\lambda$, может быть представлена в виде

$$K = \chi_i(x') \cdot x_{m+i}^{\bar{\alpha}_{m+i}} \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}. \quad (5.3)$$

Искомая $(1, 2^n)$ -КС $\Sigma_n^{\&}$ реализует каждую ЭК из Q_n в соответствии с (6.2) и имеет вид, показанный на рис. 5.1. Полагая

$$m = \lfloor \log(n - 3 \log n) \rfloor,$$

получим, что

$$p = 2^m \leq n - 3 \log n, \quad q = m + p \leq n - 2 \log n,$$

$$2^m \geq \frac{n - 3 \log n}{2},$$

то сложность построенной $(1, 2^n)$ -КС $\Sigma_n^{(\&)}$, являющейся контактным дешифратором порядка n , удовлетворяет неравенствам:

$$L\left(\Sigma_n^{(\&)}\right) \leq p2^{n-m} + 2^{n-m+1} + 2^{q+1} \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

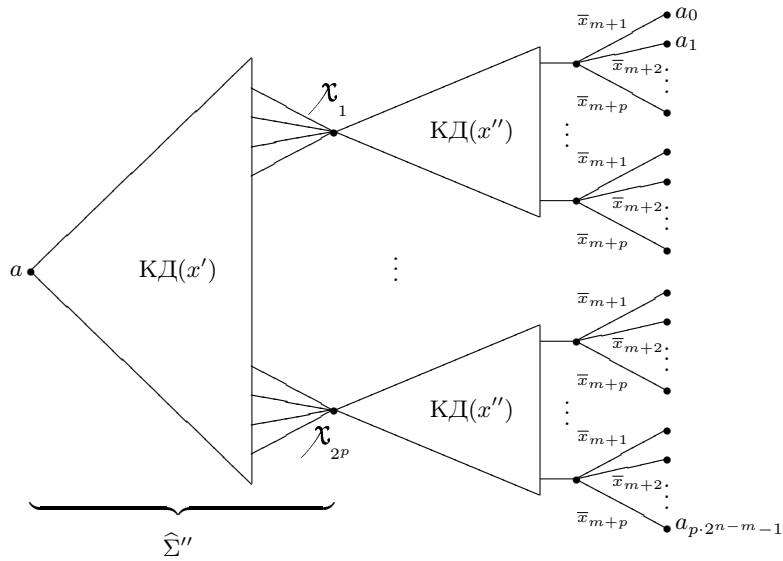


Рис. 5.1: к доказательству леммы 5.2

из которых вытекает неравенство (5.1).

Лемма доказана. □

Следствие. Оценка леммы 5.2 и следствия из леммы 1.5 дают асимптотическое равенство

$$L^K(Q_n) \sim 2^n$$

§6 Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Для реализации ФАЛ из $P_2(n)$ асимптотически оптимальными по сложности формулами и КС выберем параметры

m и q , по-прежнему удовлетворяющие (см. §5) неравенствам

$$m \leq q \leq n \quad (6.1)$$

При этом для произвольной ФАЛ $f(x)$ из $P_2(n)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, вместо обычного разложения f по БП набора $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ (см. (2.4)) будем рассматривать ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') f_{\sigma'',i}(x') \right) = \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (6.2) \end{aligned}$$

где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ и $f_{\sigma'',i}(x')$ — произвольная ФАЛ, совпадающая на δ_i с ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Теорема 6.1 (ср. [14]). Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в \mathcal{U}^Φ существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{\log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (6.3)$$

Доказательство. Пусть, строки таблицы, показанной на рис. 4.1, образуют m -регулярное множество $\widehat{\delta}$ наборов куба $B^{m+\lambda}$, которое соответствует системе ФАЛ \vec{G} , связанной с ДУМ G . При этом из свойств ДУМ G следует, что любая ФАЛ из $P_2(m+\lambda)$ совпадает на множестве $\widehat{\delta}$ с некоторой монотонной ЭД ранга p от БП $x_{m+1}, \dots, x_{m+\lambda}$. Пусть, далее, $q = m + \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^\lambda})$ — разбиение куба B^q , полученное по лемме 5.1 для описанного множества наборов $\widehat{\delta}$.

Из отмеченных свойств множества $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta} \subseteq B^{m+\lambda}$, следует, что любая ФАЛ из $P_2(m+\lambda)$ совпадает на любом множестве $\widehat{\delta} \oplus \alpha$, где $\alpha \in B^{m+\lambda}$ и $\nu(\alpha) < 2^\lambda$, с некоторой ЭД ранга p от БП $x_{m+1}, \dots, x_{m+\lambda}$.

Построим сначала для ФАЛ f на основе (6.2) формулу $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x') \widehat{\mathcal{F}}_{n-q} \left(x'', J_{0,i}, \dots, J_{1,i} \right),$$

где $\widehat{\mathcal{F}}_{n-q}(x'', y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$ — неповторная по информационным БП формула из доказательства леммы 1.3, реализующая ФАЛ μ_{n-q} , \mathfrak{A}_i , $i \in [1, 2^\lambda]$, — совершенная ДНФ ФАЛ χ_i , а ЭД $J_{\sigma'', i}$ ранга p от БП x_{m+1}, \dots, x_q задает ФАЛ $f_{\sigma'', i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$ и $i \in [1, 2^\lambda]$.

Пусть, далее, формула $\widehat{\mathcal{F}}_f$ получается из формулы $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ оптимизацией ее ЭД по числу отрицаний (см. §2 главы 2), то есть заменой каждой ЭД $J_{\sigma'', i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}}} \vee \dots \vee \overline{x_{j_p}}$, где $t \leq p$, формулой $\widehat{J}_{\sigma'', i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}}} \cdots \overline{x_{j_p}}$. Заметим, что в формуле $\widehat{\mathcal{F}}_f$ на каждую подформулу $\widehat{J}_{\sigma'', i}$ приходится не более одного ФЭ \neg , а число остальных ФЭ \neg равно половине числа всех остальных вхождений в нее БП. Следовательно, в силу леммы 2.1 главы 2,

$$L_{\&, \vee}(\widehat{\mathcal{F}}_f) = R(\widehat{\mathcal{F}}_f) - 1 \leq (q \cdot 2^m + 2^{n-q+1} + 2^{n-q} \cdot p) \cdot 2^\lambda$$

то есть, учитывая ФЭ \neg , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} L(\widehat{\mathcal{F}}_f) &\leq (3q \cdot 2^{m-1} + 4 \cdot 2^{n-q} + 2^{n-q} \cdot p) 2^\lambda \leq \\ &\leq p \cdot 2^{n-m} + 4 \cdot 2^{n-m} + 3q \cdot 2^{q-1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Выбирая значения параметров m и s , удовлетворяющие (4.3), так, что

$$m = \lfloor 2 \log \log n \rfloor, \quad s = \lfloor \log n - \log \log n \rfloor - 1,$$

получим следующие оценки остальных параметров

$$p \leq \frac{2^m}{s} + 1, \quad \lambda \leq p2^s \lesssim \frac{2^{m+s}}{s} \lesssim \frac{n}{2}, \quad q = m + \lambda \lesssim \frac{n}{2},$$

для которых при больших n выполняется неравенство (5.2). Подставляя эти значения и оценки в (6.4), получим неравенство

$$L(\widehat{\mathcal{F}}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right), \quad (6.5)$$

из которого для сложности формулы $\widehat{\mathcal{F}}_f$ следует оценка (6.3).

Теорема доказана. □

Следствие. Из (6.3), с учетом нижней оценки (3.10), вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

§7 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §4 без существенных изменений переносится на класс $\mathcal{U}^{\text{КВС}}$ — класс контактно-вентильных схем из ?? главы 2. Действительно, для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, реализующая ее (1, 1)-КВС $\widetilde{\Sigma}_f$ может быть получена на основе разложения (2.4) так же, как и СФЭ Σ_f из теоремы 4.1. Она является результатом корректной суперпозиции (см. ?? главы 2) вида $\widetilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' , а $(1, 2^{n-q})$ -КВС Σ' реализует систему всех ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ' по-прежнему содержит в качестве подсхемы $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующую систему ФАЛ \vec{G} на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ

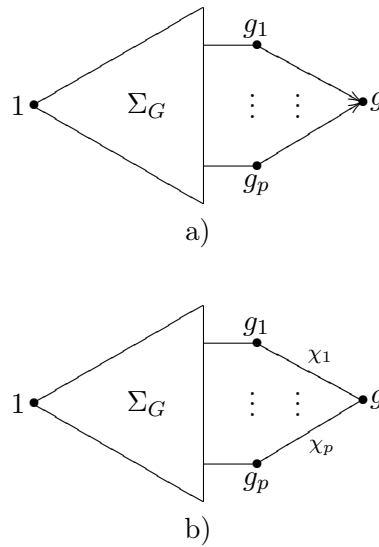


Рис. 7.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ g_1, \dots, g_p в классах КВС и ИКС

$g(x')$ типа $f_{\sigma''}(x')$ на основе ее представления (4.1) в виде дизъюнкции $g = g_1 \vee \dots \vee g_p$ с помощью присоединения входов вентиляльной звезды порядка p к соответствующим выходам КС Σ_G (см. рис. 7.1а, а также рис. 4.3с из главы 2), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС $\tilde{\Sigma}_f$ при тех же значениях параметров, что и в теореме 4.1, будет удовлетворять неравенству (4.5).

Напомним (см. §4), что в представлении (4.1) ФАЛ g_1, \dots, g_p берутся из множеств $G^{(1)}, \dots, G^{(p)}$ соответственно и что для всех $i, i \in [1, p]$, $g_i = g \cdot \chi_i = g_i \cdot \chi_i$, где $\chi_i, \chi_i \in G^{(i)}$, — характеристическая ФАЛ компоненты π_i разбиения $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m (см. рис. 7.2а). Учитывая эти особенности ФАЛ g_1, \dots, g_p , их дизъюнкцию g мож-

но реализовать на основе эквивалентного (4.1) представления

$$g = \chi_1 \cdot g_1 \vee \dots \vee \chi_p \cdot g_p \quad (7.1)$$

с помощью корректной суперпозиции т.-н. итеративно-контактных схем, показанной на рис. 7.1b, где ФАЛ χ_1, \dots, χ_p управляют проводимостью соответствующих контактов. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (7.1) на компонентах подходящего m -регулярного разбиения куба B^{m+p} .

Пусть $\check{\delta}$ — m -регулярное множество наборов куба B^{m+p} , соответствующее системе ФАЛ $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_p)$ (см. рис. 7.2a), а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2p})$ — построенное для него по лемме 5.1 разбиение куба B^{m+p} . Заметим, что любая ФАЛ g , $g \in P_2(m+p)$, на любой компоненте этого разбиения вида $\check{\delta} \oplus \alpha$, где

$$\alpha = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p}),$$

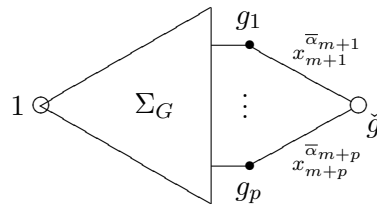
совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (7.2)$$

где $g_i = g\chi_i \in G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$. При этом ФАЛ \check{g} может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида $x_{m+1}^{\bar{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\bar{\alpha}_{m+p}}$ к выходам $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующей систему ФАЛ \vec{G} , так, как это показано на рис. 7.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$ в силу разделительности присоединяемой $(p, 1)$ -КС на этом множестве.

| | $x_1 \dots x_{m-1} x_m$ | χ_1 | χ_2 | \dots | χ_p |
|---------|-------------------------|----------|----------|---------|----------|
| π_1 | 0 \dots 0 0 | 1 | 0 | | 0 |
| | 0 \dots 0 1 | 1 | 0 | \dots | 0 |
| | \dots | \vdots | \vdots | | \vdots |
| | \dots | 1 | 0 | | 0 |
| π_2 | \dots | 0 | 1 | | 0 |
| | \dots | 0 | 1 | \dots | 0 |
| | \dots | \vdots | \vdots | | \vdots |
| | \dots | 0 | 1 | | 0 |
| | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots |
| π_p | \dots | 0 | 0 | | 1 |
| | \dots | 0 | 0 | \dots | 1 |
| | \dots | \vdots | \vdots | | \vdots |
| | 1 \dots 1 1 | 0 | 0 | | 1 |

a)



b)

Рис. 7.2: m -регулярное множество $\check{\delta}$ и связанная с ним суперпозиция КС

Теорема 7.1 (ср. [14]). Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (7.3)$$

Доказательство. Пусть $q = m + p$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^p})$ — описанное выше разбиение куба B^q , для которого представление (6.2) ФАЛ f имеет вид

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \check{g}_{\sigma'', i}(x''), \quad (7.4)$$

где в качестве ФАЛ $f_{\sigma'', i}$ из разложения (6.2) при всех $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$, и $i, i \in [1, 2^p]$, берется ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (7.2), совпадающая с ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на компоненте $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$. Для реализации ФАЛ f , в соответствии с (6.2), будем использовать суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где схема Σ' реализует систему всех ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$, а схема Σ'' — «внешнюю» часть разложения (6.2).

Пусть Σ_G — $(1, \lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.3)). Для каждого $i, i = 1, \dots, 2^p$, построим $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i (см. рис. 7.3а), которая содержит КС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $\check{g}_{\sigma'', i}$ вида (7.2) с помощью корректной на множестве наборов δ_i суперпозиции, показанной на рисунке 7.2б. Пусть, далее $(1, 2^{n-m})$ -КС Σ' получается в результате отождествления входов у построенных выше КС $\Sigma'_i, i \in [1, 2^p]$, и реализует систему из всех ФАЛ вида $\check{g}_{\sigma'', i}$, где $\sigma'' \in B^{n-q}, i \in [1, 2^p]$. Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L(\Sigma_G) &\leq \lambda 2^{m+1}, \\ L(\Sigma'_i) &\leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}, \\ L(\Sigma') &\leq p 2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

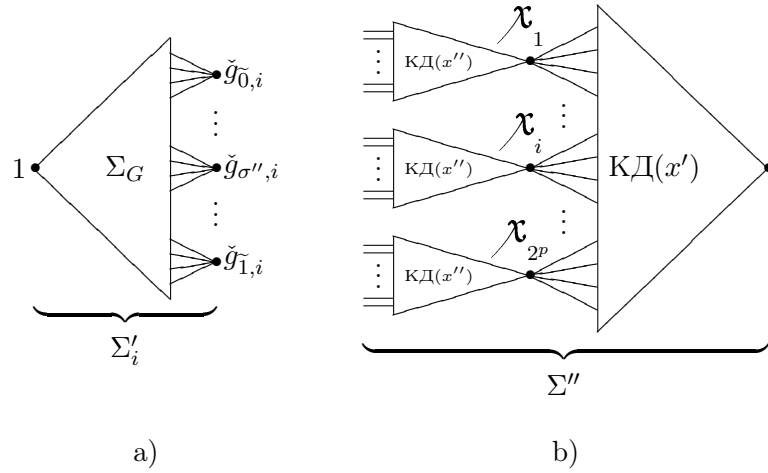


Рис. 7.3: к доказательству теоремы 7.1

Построим, наконец, разделительную по входам $(2^{n-m}, 1)$ -КС Σ'' , которая реализует столбец из всех ФАЛ вида $\chi_i(x') \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $i \in [1, 2^p]$ и $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}$. Эта КС получается в результате объединения 2^p схем типа $(2^{n-q}, 1)$ -КД от БП x'' , к выходам которых присоединены входы $(2^p, 1)$ -КС, реализующей столбец из ФАЛ $\chi_i, i \in [1, 2^p]$, и получающейся из $(2^q, 1)$ -КД от БП x' в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 7.3b). Легко видеть, что при этом

$$L(\Sigma'') \leq 2^{q+1} + 2^{n-m+1}. \quad (7.6)$$

Искомая КС Σ_f является результатом корректной стыковки вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, полученной в результате присоединения входов КС Σ'' к выходам КС Σ' в соответствии с представлением (7.4), сложность которой, в силу (7.5)–(7.6),

удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Из этого неравенства при $q = m + p$ и

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil,$$

при которых выполнены условия (4.3) и (5.2), в силу (4.2) и (4.4), вытекает неравенство (7.3) для сложности Σ_f , так как

$$\begin{aligned} (p+2)2^{n-m} &\leq \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \\ (\lambda+1)2^{q+1} &\leq p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leq \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leq \\ &\leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие. Из (7.3) с учетом нижней оценки (3.11) вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda+1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 7.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем Σ_G схем Σ'_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, а любой из остальных контактов КС Σ_f считать отдельной звездой.

Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

- [18] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [19] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [20] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [21] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [22] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [23] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [24] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [26] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.
- [27] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [28] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

-
- [29] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [30] Яблонский С. В. Эквивалентные преобразования управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [31] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [32] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [33] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.