

Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Математической Кибернетики

ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

С. А. Ложкин

Москва 2003

Оглавление

1	Дизъюнктивные нормальные формы	5
§1	Некоторые понятия и факты	5
§2	Гиперкуб и функции алгебры логики	10
§3	Эквивалентные преобразования	16
§4	Сокращенная ДНФ	22
§5	Тупиковые и минимальные ДНФ	27
§6	Особенности ДНФ для функций из некоторых классов	31
§7	Функция покрытия. Градиентное покрытие	36
§8	Минимизация ДНФ. Оценки для ранга и длины ДНФ	41
§9	Задача контроля схем и тесты для таблиц	45
2	Дискретные управляющие системы	51
§1	Элементы теории графов и сетей	51
§2	Представление формул с помощью деревьев. СФЭ	55
§3	Функционалы сложности. Оценка числа формул и СФЭ	60
§4	Контактные схемы	65
§5	Некоторые модификации и частные случаи КС	71
§6	Эквивалентные преобразования схем	78
§7	Полнота τ_∞ и отсутствие КПСТ в классе КС	85
§8	Моделирование и ЭП формул и СФЭ в различных базисах	90
§9	Некоторые виды бинарных программ	96
3	Задача синтеза и некоторые методы ее решения	99
§1	Задача синтеза для основных классов схем	99
§2	Простейшие методы синтеза схем	104
§3	Метод каскадов для КС и СФЭ	108
§4	Операция суперпозиции схем. Метод Шеннона	115
§5	Нижние мощностные оценки функций Шеннона	121
§6	Метод Лупанова синтеза СФЭ	125
§7	Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба	128
§8	Синтез КС и формул в стандартном базисе	132

§9	Синтез СФЭ и формул в произвольном базисе	136
§10	Параметры подобных формул	138
§11	141

Глава 1

Представление функций дизъюнктивными нормальными формами и связанные с ним задачи

§1 Некоторые понятия и факты, относящиеся к множествам, матрицам и функциям

В дальнейшем через \mathbb{N} (через \mathbb{N}_0) обозначается множество всех натуральных (соответственно целых неотрицательных) чисел. Множество всех целых чисел j , для которых $a \leq j \leq b$, где a, b — целые, называется *отрезком* и обозначается через

$$[a, b] = (a - 1, b] = [a, b + 1) = (a - 1, b + 1).$$

При этом отрезки вида $[a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots$, где $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, называются *последовательными*.

Для множества A через $(A)^n = A^n$, $n \in \mathbb{N}$, обозначается, как обычно, n -я декартова степень A , то есть множество наборов (строк, слов, выборов) длины n с элементами из A или, иначе, множество упорядоченных n -ок элементов A . Для множества A и $s, n \in \mathbb{N}$ через $(A)^{s,n} = A^{s,n}$ обозначается множество матриц с s строками, n столбцами и элементами из A . При этом предполагается, что $A^n = A^{1,n}$, и что $A^{s,n}$ — n -я декартова степень множества $A^{s,1}$, элементы которого называются столбцами. Число столбцов (строк) матрицы M называется ее *длиной* (соответственно *высотой*) и обозначается через $\lambda(M)$ (соответственно $h(M)$). Для матрицы $M \in A^{s,n}$ и $I' \subseteq [1, s]$, $I'' \subseteq [1, n]$ через $M \langle I', I'' \rangle$ обозначается ее подматрица, расположенная в строках с номерами из I' и столбцах с номерами из I'' . Упорядоченную систему (набор) $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$, состоящую из непустых множеств, будем называть *покрытием* множества $\delta = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_p$. При этом множества $\delta_1, \dots, \delta_p$ считаются *компонентами*

покрытия Δ , а число p — его *длиной* или *рангом*. Покрытие, состоящее из непересекающихся множеств, называется *разбиением*. Покрытие, в котором ни одна из компонент не содержится в другой компоненте (в объединении остальных компонент), считается *приведенным* (соответственно, *строго приведенным*) покрытием.

Множество всех слов конечной длины в алфавите A , включающее в себя и пустое слово Λ длины 0, обозначается через A^* . По аналогии с матрицами для слова $\alpha \in A^n$ и множества $I \subseteq [1, n]$ через $\alpha \langle I \rangle$ обозначается подслово слова α , расположенное в позициях (столбцах) с номерами из I . Подслово вида $\alpha' = \alpha \langle [1, n'] \rangle$ ($\alpha'' = \alpha \langle [n'', n] \rangle$) слова α , где $\alpha \in A^n$ и $n', n'' \in [1, n]$, называется *префиксом* (соответственно *суффиксом*) слова α . При этом указанное слово α считается результатом применения операции *конкатенации* к словам α' , α'' и записывается в виде $\alpha = \alpha' \circ \alpha''$, если $n'' = n' + 1$. Пустое слово Λ является по определению нейтральным элементом операции конкатенации, то есть $\alpha \circ \Lambda = \Lambda \circ \alpha = \alpha$ для любого слова α .

Отношение, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, будем, как обычно, называть отношением эквивалентности. Напомним, что отношение эквивалентности τ , заданное на множестве A , порождает разбиение этого множества на классы τ -эквивалентности — максимальные по включению подмножества множества A , состоящие из попарно τ -эквивалентных элементов.

Слова α' , α'' из A^* называются *перестановочными*, если α' можно получить из α'' в результате некоторой перестановки букв. Заметим, что отношение перестановочности является отношением эквивалентности на A^* , а каждое слово (набор)

$$\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

длины n порождает соответствующий класс эквивалентности, называемый *сочетанием* длины n из A или, иначе, *неупорядоченной n -кой* из A , и обозначаемый через $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. В частности, сочетание, связанное с (упорядоченной) парой (u, v) , считается неупорядоченной парой $\{u, v\}$, сочетание, связанное с (упорядоченным) разбиением $(\delta_1, \dots, \delta_p)$, — неупорядоченным разбиением $\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$, и так далее. С содержательной точки зрения сочетание элементов из A представляет собой «кратное» подмножество множества A , то есть подмножество, в которое все его элементы входят с определенной кратностью (в соответствующем числе «экземпляров»).

Если A — конечное множество, то его мощность, то есть число элементов, обозначается обычно через $|A|$. Заметим, что при этом $|A^n| = |A|^n$, а если $|A| = a \geq n$, то число выборов длины n из A , в которых все элементы различны, — так называемых выборов без повторений, — равно $a(a-1) \dots (a-n+1)$. Число различных сочетаний без повторений длины n из множества A , $|A| = a$, обозначается через $\binom{a}{n}$. Как известно,

$$\binom{a}{n} = \frac{a!}{n!(a-n)!} = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!}, \quad (1.1)$$

а число сочетаний с (возможными) повторениями длины n из A равно $\binom{a+n-1}{n}$ (см., например, [4])

Укажем теперь некоторые оценки для введенных величин. Индукцией по n легко показать, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n, \quad (1.2)$$

а из формулы Стирлинга [1] следует, что¹

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (1.3)$$

Из (1.2) вытекает, в частности, неравенство

$$\binom{a}{n} \leq \left(\frac{3a}{n}\right)^n. \quad (1.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что неравенства $\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1}$ и $2i + 1 < n$ равносильны, если i изменяется на отрезке $[0, n]$. Отсюда следует, что максимальное по i значение величины $\binom{n}{i}$ на отрезке $[0, n]$ достигается при² $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ и равно $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Заметим, что в силу (1.1) и (1.3) имеет место асимптотическое равенство

$$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}. \quad (1.5)$$

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, будем, как обычно, называть отношением *частичного порядка*. Если τ — отношение частичного порядка на множестве A , то пару (A, τ) будем называть *частично упорядоченным множеством*. В том случае, когда в частично упорядоченном множестве (A, τ) любые два элемента a' и a'' из A сравнимы, то есть либо $a'\tau a''$, либо $a''\tau a'$, пару (A, τ) будем считать *линейно упорядоченным множеством*. Предполагается, что все элементы конечного линейно упорядоченного множества (A, τ) , где $|A| = t$, пронумерованы числами отрезка $[0, t)$ так, что для любых a' и a'' из A номер a' не больше, чем номер a'' тогда и только тогда, когда $a'\tau a''$.

По умолчанию все рассматриваемые далее множества считаются конечными. Для частично упорядоченного множества (A, τ) множество, состоящее из попарно сравнимых (несравнимых) элементов множества A , называется *цепью* (соответственно

¹Асимптотическое равенство $a(n) \sim b(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$, то есть

$$a(n) = (1 + o(1))b(n).$$

²Через $\lceil \alpha \rceil$ ($\lfloor \alpha \rfloor$) обозначается ближайшее сверху (соответственно снизу) к α целое число.

антицепью) этого частично упорядоченного множества. Заметим, что цепь $C \subseteq A$ в частично упорядоченном множестве (A, τ) представляет собой линейно упорядоченное множество вида (C, τ) . Максимальная мощность цепей (антицепей) частично упорядоченного множества называется его *длиной* (соответственно *шириной*). Цепь или антицепь частично упорядоченного множества называется *неуплотняемой*, если она представляет собой максимальное по включению множество соответствующего типа. Частично упорядоченное множество (A, τ) длины t называется *ранжированным частично упорядоченным множеством*, если все его неуплотняемые цепи имеют мощность t . При этом каждый элемент A имеет, очевидно, один и тот же номер в любой содержащей его неуплотняемой цепи, называемый *рангом* данного элемента, а все элементы из A , имеющие ранг i , образуют i -й *ярус* данного частично упорядоченного множества (A, τ) . Заметим, что каждый ярус ранжированного частично упорядоченного множества является его неуплотняемой антицепью.

Лемма 1.1. *Если в ранжированном частично упорядоченном множестве (A, τ) через каждые два элемента одного и того же яруса проходит одинаковое число неуплотняемых цепей, то ширина частично упорядоченного множества (A, τ) равна максимальной мощности его ярусов.*

Доказательство. Пусть длина частично упорядоченного множества (A, τ) равна t , пусть T — множество его неуплотняемых цепей, а A_i , где $i \in [0, t)$, — i -й ярус этого частично упорядоченного множества, каждый элемент которого содержится в d_i цепях из T . Заметим, что

$$|A_i| \cdot d_i = |T| \quad (1.6)$$

для любого $i \in [0, t)$, и поэтому

$$\max_{0 \leq i < t} |A_i| = |A_j|, \quad (1.7)$$

где $j \in [0, t)$, тогда и только тогда, когда

$$\min_{0 \leq i < t} d_i = d_j. \quad (1.8)$$

Пусть, далее, $A' \subseteq A$ — неуплотняемая антицепь частично упорядоченного множества (A, τ) и пусть $A'_i = A_i \cap A'$ для всех $i \in [0, t)$. Заметим, что каждая неуплотняемая цепь частично упорядоченного множества (A, τ) содержит не более одного элемента множества A' и поэтому, с учетом (1.6), (1.7) и (1.8),

$$|A_j| \cdot d_j = |T| \geq \sum_{i=0}^{t-1} |A'_i| \cdot d_i \geq |A'| \cdot d_j,$$

откуда следует, что

$$|A'| \leq |A_j|.$$

Лемма доказана. □

Под дискретной функцией понимают, обычно, отображение одного конечного множества в другое. Так, отображение вида $f : ([0, k])^n \rightarrow [0, k]$, где $k \geq 2$, называется n -местной функцией k -значной логики (при $k = 2$ — алгебры логики), а множество всех таких функций обозначается через P_k . Кроме того, к дискретным функциям относят некоторые классы отображений вида $f : A^* \rightarrow W^*$, где A, W — конечные множества, называемых *словарными функциями с входным алфавитом A и выходным алфавитом W* .

Пусть $B = \{0, 1\}$ и $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — линейно упорядоченное множество. Произвольное бинарное отношение τ на множестве A может быть задано с помощью матрицы M , $M \in B^{m,m}$, так, что при любых i, j из отрезка $[1, m]$ равенство $M \langle i, j \rangle = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $a_i \tau a_j$. С другой стороны, любая матрица M , $M \in B^{m,m}$, задает указанным способом некоторое отношение τ на множестве A . При этом матрица M считается *рефлексивной* (*транзитивной*) тогда и только тогда, когда отношение τ является рефлексивным (соответственно транзитивным). Легко видеть, что симметричность матрицы M эквивалентна симметричности отношения τ , и что матрица M является рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда

$$M \langle i, i \rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \geq M \langle i, j \rangle)$$

для любого i (соответственно любых i, j и t) из отрезка $[1, m]$. Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы M , $M \in B^{m,m}$, имеет место тогда и только тогда, когда¹

$$M^2 = M. \tag{1.9}$$

Действительно, полагая $\widehat{M} = M^2$, получим

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = \bigvee_{t=1}^m M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \tag{1.10}$$

и, следовательно, в случае $\widehat{M} = M$ соотношения

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \geq M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle$$

будут выполнены при любых i, j, t из отрезка $[1, m]$. С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы M в силу (1.10) следует, что

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \vee \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq m \\ t \neq i, j}} M \langle i, j \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \right) = M \langle i, j \rangle.$$

¹Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции \vee (максимума) (см. §2).

§2 Гиперкуб и функции алгебры логики. Реализация функций формулами, дизьюнктивные нормальные формы

Множество B^n , где $B = \{0, 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$, то есть множество наборов длины n из 0 и 1, обычно называют *единичным кубом* или *гиперкубом* размерности n . Отношение перестановочности разбивает куб B^n на классы эквивалентности (сочетания) $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$, где B_i^n , $i \in [0, n]$, — так называемый i -й слой куба B^n , то есть множество наборов с i единицами, и, очевидно, $|B_i^n| = \binom{n}{i}$.

На множестве B^n введем отношение лексикографического линейного порядка, которое задается взаимно однозначным отображением (нумерацией) $\nu : B^n \rightarrow [0, 2^n)$ таким, что

$$\nu(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 2^{n-i}.$$

Заметим, что двоичная запись числа $\nu(\alpha)$, $\alpha \in B^n$, дополненная слева нулями до набора длины n , совпадает с α . Множество наборов, являющееся образом отрезка $[a, b]$, где $[a, b] \subseteq [0, 2^n)$, при отображении ν^{-1} , называется *отрезком куба B^n* .

Для наборов α, β из B^n через $\rho(\alpha, \beta)$ обозначается так называемое расстояние Хэмминга между ними, то есть число тех разрядов, в которых они отличаются друг от друга. При этом наборы, находящиеся на расстоянии n , называются *противоположными*, а наборы, отличающиеся только в одном (i -м) разряде, считаются *соседними* (соответственно *соседними по i -й переменной*). При геометрическом изображении куба B^n на плоскости вершины i -го слоя обычно располагаются на одном и том же горизонтальном уровне над вершинами $(i-1)$ -го слоя, $i = 1, \dots, n$, а соседние вершины соединяются отрезками прямых (см. рис. 2.1). Множество наборов куба B^n , находящихся на расстоянии t (не больше, чем t) от набора α , называется *сферой* (соответственно *шаром*) *радиуса t с центром α* . Заметим, что i -й слой куба B^n является сферой радиуса i с центром в наборе $\tilde{0} = (0, \dots, 0)$ и сферой радиуса $(n-i)$ с центром в наборе $\tilde{1} = (1, \dots, 1)$.

На множестве B^n обычным образом введем отношение частичного порядка \leq такое, что

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $i \in [1, n]$. При этом считается, что $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$, а наборы α, β из B^n , для которых $\alpha \leq \beta$ или $\beta \leq \alpha$ ($\alpha \not\leq \beta$ и $\beta \not\leq \alpha$), называются *сравнимыми* (соответственно *несравнимыми*). Заметим, что пара (B^n, \leq) задает ранжированное частично упорядоченное множество (см. §1) длины $n+1$, где при любом $i \in [0, n]$ множество B_i^n образует i -й ярус, а наборы с номерами i и $i+1$, $i \in [0, n)$, в любой неуплотняемой цепи являются соседними наборами

куба. Заметим также, что через каждый набор $\alpha \in B_i^n$ проходит $i!(n-i)!$ неуплотняемых цепей этого частично упорядоченного множества, которое, следовательно, удовлетворяет условию леммы 1.1 и имеет ширину $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (см. §1).

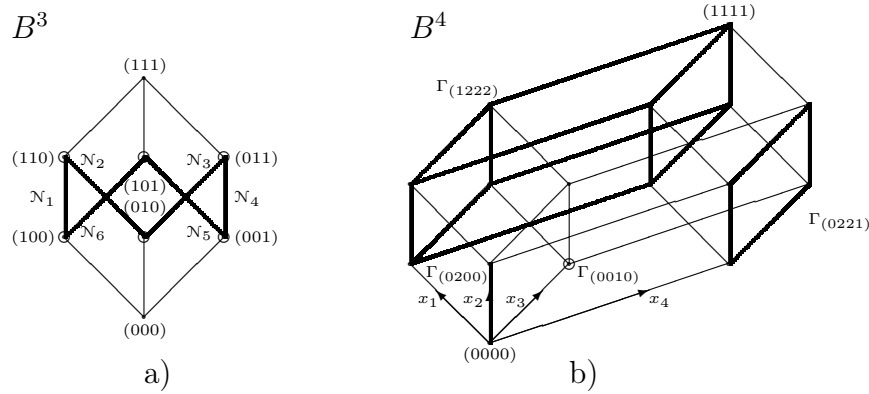


Рис. 2.1: B^3 и B^4

Для набора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ длины n над множеством $[0, 2]$ через Γ_γ обозначим множество всех тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ куба B^n , для которых $\alpha_i = \gamma_i$ при всех $i \in [1, n]$ таких, что $\gamma_i \neq 2$. Множество Γ_γ называется *гранью* куба B^n , число $n-r$, равное числу "2" в наборе γ , считается *размерностью* этой грани, а число r — ее *рангом*. Заметим, что грань Γ_γ представляет собой подкуб размерности $n-r$ куба B^n и состоит из 2^{n-r} наборов, отличающихся друг от друга только в тех разрядах, в которых расположены символы "2" набора γ . В частности, грань размерности 0 представляет собой вершину куба, грань размерности 1 — его ребро, грань размерности 2 — квадрат, и так далее. Так, на рис. 2.1 в кубе B^3 выделены ребра N_1, \dots, N_6 , а в кубе B^4 выделены грани $\Gamma_{(0010)}$, $\Gamma_{(0200)}$, $\Gamma_{(0221)}$ и $\Gamma_{(1222)}$ размерностей 0, 1, 2 и 3 соответственно.

Отображение $f : B^n \rightarrow B$ называется *n -местной булевой функцией* или, иначе, *функцией алгебры логики* (ФАЛ). Будем предполагать, что у нас имеется счетный упорядоченный алфавит булевых переменных (БП) $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и что каждый рассматриваемый n -мерный куб имеет вид $B^n = B^n(\mathcal{X})$, где множество переменных $X = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\} \subset \mathcal{X}$ и $j_1 < \dots < j_n$, причем переменная x_{j_i} для всех $i \in [1, n]$ связана с i -м разрядом куба $B^n(\mathcal{X})$. Множество всех функций алгебры логики $f(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$, отображающих куб $B^n(\mathcal{X})$ в B , будем обозначать через $P_2(X)$, а его m -ю декартову степень, то есть множество систем вида $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящих из m таких функций, — через $P_2^m(X)$. Как правило, мы будем выделять из \mathcal{X} множество БП $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, будем сопоставлять ему набор БП $x(n) = (x_1, \dots, x_n)$ и будем рассматривать множество ФАЛ $P_2(n) = P_2(X(n))$, а также его степени $P_2^m(n) = P_2^m(X(n))$.

x_1	0	\bar{x}_1	x_1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

a)

x_1	x_2	$\&$	\vee	\oplus	\sim	\rightarrow	\downarrow
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

b)

$\tilde{\alpha}_f$	название функции f
(00)	— "0" (константа нуль)
(11)	— "1" (константа единица)
(01)	— тождественная функция
(10)	— отрицание
(0001)	— конъюнкция (умножение)
(0111)	— дизъюнкция
(0110)	— сумма по модулю 2
(1001)	— эквивалентность
(1101)	— импликация
(1110)	— штрих Шеффера
(1000)	— стрелка Пирса

c)

Рис. 2.2: $P_2(1)$ и $P_2(2)$

Для задания ФАЛ f из $P_2(n)$ можно использовать ее таблицу значений, то есть матрицу M из множества $B^{2^n, n+1}$, i -я строка, $i \in [1, 2^n]$, которой имеет вид

$$M \langle i, [1, n+1] \rangle = \alpha \circ f(\alpha),$$

где $\nu(\alpha) = i - 1$. При этом столбец $M \langle [1, 2^n], n+1 \rangle$, однозначно задающий ФАЛ f , считается ее столбцом значений и обычно записывается в виде транспонированной строки, обозначаемой через $\tilde{\alpha}_f$. Отсюда следует, в частности, что $|P_2(n)| = 2^{2^n}$. На рис. 2.2а (2.2б) приведены таблицы всех (соответственно некоторых) ФАЛ от БП x_1 (соответственно x_1, x_2), а на рис. 2.2с перечислены столбцы значений $\tilde{\alpha}_f$ и названия для всех указанных ФАЛ. Столбец значений ФАЛ f из $P_2(n)$ при любом $k \in [1, n]$ можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы) длины 2^k и высоты 2^{n-k} , i -я строка которой, $i \in [1, 2^{n-k}]$, имеет вид

$$\tilde{\alpha} \langle ((i-1)2^k, i2^k] \rangle.$$

Кроме того, ФАЛ f однозначно определяется своим *характеристическим множеством*, которое состоит из всех наборов $\alpha \in B^n$ таких, что $f(\alpha) = 1$, и обозначается через N_f , а также его дополнением $\bar{N}_f = N_{\bar{f}} = B^n \setminus N_f$. Заметим, что ФАЛ f является характеристической функцией множества N_f .

На рис. 2.3а показана таблица значений ФАЛ трех переменных $H(x_1, x_2, x_3)$, которая называется функцией *голосования*, на рис. 2.3б приведены прямоугольные таблицы ее значений, а на рис. 2.3с выписаны наборы множеств N_H и \bar{N}_H .

Переменная x_i , $i \in [1, n]$ называется *несущественной* БП ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если $f(\alpha) = f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n . В противном случае БП x_i называется *существенной* БП ФАЛ f . Считается, что ФАЛ f существенно (несущественно) зависит от БП x_i , если x_i — существенная (соответственно несущественная) БП ФАЛ f . Несущественная БП не влияет на значение ФАЛ, поэтому, как обычно, равенство ФАЛ будем рассматривать с точностью до добавления или изъятия несущественных БП. При этом две ФАЛ считаются *равными*, если они имеют одни и те же существенные переменные и одинаковым образом отображают гиперкуб, связанный с их существенными БП, в B . Будем говорить, что f — *существенная* ФАЛ, если она существенно зависит от всех своих БП.

Пусть $P_2 = P_2(\mathcal{X})$ — множество всех ФАЛ от БП из \mathcal{X} . Предполагается, что у нас имеется счетный алфавит функциональных символов (ФС) для обозначения ФАЛ из P_2 , и что в P_2 выделено «базисное» множество B . Дадим индуктивное определение формулы над B и реализуемой ею ФАЛ, которое, в отличие от [2], неявно предполагает наличие в B ФАЛ, тождественно равной БП. Заметим, что с содержательной точки зрения формула представляет собой слово, построенное из ФС «базисных» ФАЛ, символов БП и «разделителей», которое задает последовательность выполнения операций суперпозиции.

x_1	x_2	x_3	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a)

x_1	x_2	x_3	0	1	x_2	0	0	1	1
0	0	0	0	0	x_1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

b)

$$N_H = \{(011), (101), (110), (111)\}$$

$$\overline{N}_H = \{(000), (001), (010), (100)\}$$

c)

Рис. 2.3: функция голосования

Любая БП x_j из \mathcal{X} считается *формулой глубины 0 над множеством* B , которая реализует ФАЛ x_j . Если $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in B$ и для каждого $i, i \in [1, n]$ определена формула \mathcal{F}_i глубины q_i над множеством B , которая реализует ФАЛ f_i из P_2 , то запись \mathcal{F} вида ¹

$$\mathcal{F} = \varphi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$$

является *формулой глубины* $q = \max\{q_1, \dots, q_k\} + 1$ над B , которая реализует ФАЛ f вида $f = \varphi(f_1, \dots, f_k)$. Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над множеством* B . Под *сложностью* (*рангом*) формулы \mathcal{F} понимается число вхождений в нее ФС (соответственно символов БП), которое обозначается $L(\mathcal{F})$ (соответственно, $R(\mathcal{F})$). Так, запись вида

$$\mathcal{F} = \overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot (x_1 \vee x_2)$$

представляет собой формулу над множеством $B_0 = \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ глубины 3, ранга 4 и сложности 4, которая реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2$.

Формулы \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' , реализующие равные ФАЛ f' и f'' , называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ считается *тождеством*.

Нетрудно убедиться в том, что бинарные операции $\&$, \vee , \oplus удовлетворяют обычными «алгебраическим» тождествам ассоциативности и коммутативности, а операция $\&$, кроме того, — тождествам дистрибутивности относительно \vee и \oplus . Заметим, также, что имеют место тождества¹

$$x \cdot 0 = x \cdot \bar{x} = x \oplus x = 0, \quad x \vee 1 = x \vee \bar{x} = x \oplus \bar{x} = 1, \quad (2.1)$$

$$x \cdot x = x \vee x = x \vee 0 = x \oplus 0 = x \cdot 1 = x. \quad (2.2)$$

Рассмотрим некоторые формулы «алгебраического» типа над множеством B_0 . Функции x_i и \bar{x}_i будем называть *буквами* БП x_i и, как обычно, будем считать, что $x_i^0 = \bar{x}_i$, $x_i^1 = x_i$. Конъюнкция (дизъюнкция) r , $1 \leq r \leq n$, букв различных БП из множества $X(n)$ называется *элементарной конъюнкцией* (соответственно *элементарной дизъюнкцией*) *ранга* r *от булевых переменных* $X(n)$. Из (2.1), (2.2) следует, что элементарная конъюнкция (ЭК) $K = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_r}^{\alpha_r}$ и элементарная дизъюнкция (ЭД) $J = x_{i_1}^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\bar{\alpha}_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$, являются характеристическими ФАЛ грани $N_K = \Gamma_\beta$ и ее дополнения $N_J = B^n \setminus \Gamma_\beta$, где набор β из $([0, 2])^n$ обладает тем свойством, что $\beta \langle i_p \rangle = \alpha_p$ при всех $p \in [1, r]$ и $\beta \langle i \rangle = 2$ в остальных случаях. Так, элементарные конъюнкции $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$, $\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $x_1 \bar{x}_4$ и x_1 ранга 4, 3, 2 и 1 соответственно

¹В случае $k = 2$ будем, как обычно, вместо $\mathcal{F} = \varphi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ писать $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1 \varphi \mathcal{F}_2)$.

¹При записи формул над $P_2(2)$ будем применять обычные соглашения о «силе» операций, в соответствии с которыми ФАЛ \neg сильнее ФАЛ $\&$, а ФАЛ $\&$ сильнее всех остальных ФАЛ от двух БП. Кроме того, внешние скобки и скобки, задающие порядок многократного выполнения одной и той же бинарной ассоциативной операции $\&$, \vee , \sim , \oplus , будем, как правило, опускать.

от БП x_1, x_2, x_3, x_4 являются характеристическими ФАЛ граней куба B^4 , показанных на рис. 2.1. Будем считать, что константа 1 (константа 0) является элементарная конъюнкция (соответственно элементарная дизъюнкция) ранга 0. Заметим, что любая отличная от $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \sim x_2$ существенная ФАЛ от БП x_1, x_2 является либо ЭК, либо ЭД ранга 2.

Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ), а конъюнкция различных элементарных дизъюнкций — *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). При этом ДНФ (КНФ) считается *совершенной*, если все ее ЭК (соответственно ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг равен числу этих БП. Число ЭК (ЭД) в ДНФ (соответственно КНФ) \mathfrak{A} называется ее *длиной* и обозначается через $\lambda(\mathfrak{A})$. Любую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, отличную от константы, можно представить в виде ее совершенных ДНФ и КНФ следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N_f} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \bigwedge_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \bar{N}_f} (x_1^{\beta_1} \vee \dots \vee x_n^{\beta_n}). \quad (2.3)$$

Так, совершенная ДНФ ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3)$, для которой $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$, (см. рис. 2.1a) имеет вид

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Заметим, что любую ФАЛ f из $P_2(n)$, отличную от константы 0, можно представить ее совершенной ДНФ вида (2.3), а ФАЛ $f \equiv 0$ — формулой $x_1 \cdot \bar{x}_1$. Следовательно, любая ФАЛ из P_2 может быть реализована формулой над B_0 , и поэтому множество B_0 является (функционально) полным (см. [3]). В дальнейшем любое конечное базисное множество B будем называть *базисом*. При этом в отличие от $\llbracket \rrbracket$, в B могут присутствовать ФАЛ, при удалении которых оставшееся множество продолжает быть полным.

§3 Эквивалентные преобразования формул.

Полнота системы основных тождеств для формул базиса $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим вопросы, связанные с эквивалентными преобразованиями формул над базисом B на основе тождеств. Для того, чтобы выделить набор $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, который состоит из всех различных БП алфавита \mathcal{X} , встречающихся в формуле \mathcal{F} и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. При этом формулу, которая получается из \mathcal{F} в результате замены каждого вхождения БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, формулой \mathcal{F}_j будем считать *результатом*

подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_{i_j} , $j = 1, \dots, n$, в формулу \mathcal{F} и будем обозначать ее через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Заметим, что формула $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ реализует ФАЛ $f(f_1, \dots, f_n)$, где ФАЛ f (ФАЛ f_j) — ФАЛ, реализуемая формулой \mathcal{F} (соответственно \mathcal{F}_j , $j = 1, \dots, n$). Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$, мы получим тождество

$$\hat{t} : \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}'',$$

где $\hat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ и $\hat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$, которое называется *подстановкой для тождества t* .

Формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы \mathcal{F} , называются ее *подформулами*. При этом подформулы, из которых на последнем шаге индуктивного построения получается \mathcal{F} , считаются ее *главными* подформулами. Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если подформулу $\hat{\mathcal{F}}'$ (подформулу $\hat{\mathcal{F}}''$) формулы \mathcal{F} заменить, учитывая тождество \hat{t} эквивалентной ей формулой $\hat{\mathcal{F}}''$ (соответственно $\hat{\mathcal{F}}'$), то полученная в результате такой замены формула $\check{\mathcal{F}}$ будет эквивалентна формуле \mathcal{F} , то есть будет справедливо тождество

$$\check{t} : \mathcal{F} = \check{\mathcal{F}}.$$

Указанный переход от \mathcal{F} к $\check{\mathcal{F}}$ (от t к \check{t}) будем записывать в виде однократной выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow{t} \check{\mathcal{F}}$ (соответственно $t \mapsto \check{t}$). Аналогичный переход от \mathcal{F} к $\tilde{\mathcal{F}}$ в результате применения одного из тождеств системы τ (нескольких последовательных применений тождеств из τ) будем записывать в виде однократной (соответственно кратной) выводимости вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ (соответственно $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$). При этом считается, что тождество

$$\tilde{t} : \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$$

выводится из системы тождеств τ , и этот факт записывается в виде выводимости $\tau \mapsto \tilde{t}$ или $\tau \xrightarrow{\tau} \tilde{t}$ в зависимости от числа использованных переходов. Переход вида $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ будем называть также *эквивалентным преобразованием (ЭП) формулы \mathcal{F} в формулу $\tilde{\mathcal{F}}$ на основе системы тождеств τ* . Заметим, что в силу обратимости ЭП из выводимости $\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} \tilde{\mathcal{F}}$ следует обратная выводимость $\tilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{F}$. Система тождеств τ называется *полной* для ЭП формул над \mathcal{B} , если для любых двух эквивалентных формул \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' над \mathcal{B} имеет место выводимость $\mathcal{F}' \xrightarrow{\tau} \mathcal{F}''$.

Далее до конца главы будем рассматривать только формулы над базисом \mathcal{B}_0 и будем называть их просто формулами. Заметим, что имеют место (см., в частности, §2) следующие тождества ассоциативности

$$t_{\circ}^A : x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3,$$

тождества коммутативности

$$t_{\circ}^K : x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

и тождества отождествления БП

$$t_{\circ}^{\text{ОП}} : x \circ x = x,$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$, тождества дистрибутивности

$$t_{\circ, \diamond}^D : x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

и тождества («правила») де Моргана

$$t_{\neg}^M : \overline{\overline{x_1}} = x_1, \quad t_{\circ}^M : \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x_1}) \diamond (\overline{x_2}),$$

где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$, тождества подстановки констант¹

$$\begin{aligned} t_{0, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \cdot \overline{x_2}) &= x_2 \cdot \overline{x_2}, & t_{1, \&}^{\text{ПК}} : x_1 (x_2 \vee \overline{x_2}) &= x_1, \\ t_{0, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x_2} &= x_1, & t_{1, \vee}^{\text{ПК}} : x_1 \vee (x_2 \vee \overline{x_2}) &= x_2 \vee \overline{x_2}, \end{aligned}$$

а также тождество поглощения

$$t^{\text{П}} : x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

тождество обобщенного склеивания

$$t^{\text{ОС}} : x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_3 = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_3 \vee x_2 x_3$$

и другие.

Рассмотрим теперь примеры ЭП формул. Докажем, что

$$\{t_{\&}^M, t_{\neg}^M\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^M\} \quad \text{и} \quad \{t_{\&}^K, \tau^M\} \Leftrightarrow \{t_{\vee}^K\},$$

где $\tau^M = \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\vee}^M\}$. Действительно,

$$\overline{x_1 \vee x_2} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{\overline{x_2}}} \xrightarrow[t_{\&}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}}} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

и

$$x_1 \vee x_2 \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} \xrightarrow[t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} \xrightarrow[t_{\&}^K]{\Leftrightarrow} \overline{\overline{x_2} \cdot \overline{x_1}} \xrightarrow[t_{\&}^M, t_{\vee}^M]{\Leftrightarrow} x_2 \vee x_1.$$

¹В отличие от (2.1)–(2.2) тождества подстановки констант приведены для базиса B_0 , где роль константы 0 (константы 1) играет формула вида $x_i \cdot \overline{x_i}$ (соответственно $x_i \vee \overline{x_i}$).

Аналогичным образом доказывается, что

$$\{t_{\&}^A, \tau^M\} \models \{t_{\vee}^A\}, \{t_{\&}^{\text{ОП}}, \tau^M\} \models \{t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \{t_{\&,\vee}^D, \tau^M\} \models \{t_{\vee,\&}^D\} \text{ и } \{t_{\sigma,\&}^{\text{ПК}}, \tau^M\} \models \{t_{\sigma,\vee}^{\text{ПК}}\},$$

где $\sigma \in \{0, 1\}$. Завершая примеры выводимостей, докажем, что

$$\{t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&,\vee}^D, t_{\vee}^A, t_{\vee}^K, t_{\vee}^{\text{ОП}}\} \models t^{\text{П}}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_1 x_2 &\xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2 \xrightarrow[t_{\&,\vee}^D]{} x_1 ((x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2) \\ &\models x_1 ((x_2 \vee x_2) \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{\vee}^{\text{ОП}}]{} x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} x_1. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tau^{\text{осн}} &= \{t_{\&}^M, t_{\neg}^M, t_{\&}^A, t_{\&}^K, t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\&,\vee}^D, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\&}^{\text{ПК}}\}, \\ \tau^A &= \{t_{\&}^A, t_{\vee}^A\}, \\ \tau^K &= \{t_{\&}^K, t_{\vee}^K\}, \\ \tau^{\text{ОП}} &= \{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}, \\ \tau^D &= \{t_{\&,\vee}^D, t_{\vee,\&}^D\}, \\ \tau^{\text{ПК}} &= \{t_{0,\&}^{\text{ПК}}, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{0,\vee}^{\text{ПК}}, t_{1,\vee}^{\text{ПК}}\}, \\ \tilde{\tau}^{\text{осн}} &= \{\tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ОП}}, \tau^D, \tau^{\text{ПК}}, t^{\text{П}}\}. \end{aligned}$$

Систему $\tau^{\text{осн}}$ будем называть *системой основных тождеств*, а систему $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ — *расширенной системой основных тождеств*. Рассмотренные выше примеры выводимостей доказывают следующее утверждение.

Лемма 3.1. Система $\tilde{\tau}^{\text{осн}}$ выводима из системы $\tau^{\text{осн}}$.

Покажем теперь, что с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ из любой формулы можно получить совершенную ДНФ или формулу $x_1 \bar{x}_1$. Введем для этого некоторые понятия, характеризующие формулы, появляющиеся на промежуточных этапах указанного ЭП. Произвольную конъюнкцию букв, содержащую, в общем случае, повторяющиеся или противоположные буквы, будем называть *обобщенной ЭК* (ОЭК), а дизъюнкцию таких конъюнкций, содержащую, в общем случае, повторяющиеся «слагаемые», — *обобщенной ДНФ* (ОДНФ). Обычную ЭК (ДНФ) и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ будем считать *канонической ОЭК* (соответственно *канонической ОДНФ*), а совершенную ДНФ и формулу $x_1 \cdot \bar{x}_1$ — *совершенными ОДНФ*. Формулу, в которой все ФС \neg применяются только к БП и нет двух последовательно применяемых ФС \neg , будем называть *формулой с поднятыми отрицаниями*.

Пусть формула $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ реализует ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$. Докажем существование ЭП вида

$$\mathcal{F} \underset{\tau^M}{\rightleftarrows} \mathcal{F}' \underset{\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}}{\rightleftarrows} \mathcal{F}'' \underset{\tau^{\text{СП}}}{\rightleftarrows} \widehat{\mathcal{F}} \underset{\{t_{\&, \vee}^D, \tau^{\text{СП}}\}}{\rightleftarrows} \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (3.1)$$

где $\tau^{\text{СП}} = \{\tau^A, \tau^K, \tau^{\text{ПК}}, \tau^{\text{ОП}}\}$, \mathcal{F}' — формула с поднятыми отрицаниями, \mathcal{F}'' — обобщенная ДНФ, а $\widehat{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ — каноническая и совершенная ОДНФ ФАЛ f соответственно. Действительно, *поднятие отрицаний*, то есть переход от \mathcal{F} к \mathcal{F}' в (3.1) можно осуществить применением тождеств $t_{\&}^M$, $t_{\&}^M$ и t_{\vee}^M к подформулам вида $\overline{(\mathcal{F}_1)}$, $\overline{(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2)}$ и $\overline{(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)}$ соответственно до тех пор, пока все такие подформулы не будут «устранены». Переход от \mathcal{F}' к \mathcal{F}'' в (3.1), который называется *раскрытием скобок*, осуществляется применением тождеств $\{t_{\&, \vee}^D, t_{\&}^K\}$ к подформулам вида $\mathcal{F}_1 \cdot (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ или $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cdot \mathcal{F}_3$ до тех пор, пока они встречаются в преобразуемой формуле.

Переход от \mathcal{F}'' к $\widehat{\mathcal{F}}$ в (3.1), который называется *сокращением подобных*, выполняется в два этапа. Сначала каждая ОЭК K'' из ОДНФ \mathcal{F}'' преобразуется в каноническую ОЭК K с помощью тождеств $\{t_{\&}^{\text{ОП}}, t_{0, \&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^A, t_{\&}^K\}$, а также тождества

$$x_i \cdot \bar{x}_i = x_1 \cdot \bar{x}_1, \quad (3.2)$$

которое выводится из них следующим образом:

$$x_i \cdot \bar{x}_i \xrightarrow{t_{0, \&}^{\text{ПК}}} (x_1 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_i \cdot \bar{x}_i) \xrightarrow{t_{\&}^K} (x_i \cdot \bar{x}_i) \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_1) \xrightarrow{t_{0, \&}^{\text{ПК}}} x_1 \cdot \bar{x}_1.$$

Далее, полученная формула $\widehat{\mathcal{F}}$ преобразуется в $\widetilde{\mathcal{F}}$ путем «устранения» повторных вхождений равных ЭК или подформулы $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K, t_{\vee}^{\text{ОП}}\}$ и, в случае $f \neq 0$, последующего «устранения» ОЭК $x_1 \cdot \bar{x}_1$ с помощью тождеств $\{t_{\vee}^A, t_{\vee}^K, t_{0, \vee}^{\text{ПК}}\}$. Заметим, что раскрытие скобок и различные этапы сокращения подобных можно чередовать друг с другом при элементарных преобразованиях подформул формулы \mathcal{F}' или формулы \mathcal{F}'' .

Переход от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$ в (3.1) тоже выполняется в два этапа. Сначала каждая ЭК \widehat{K} из $\widehat{\mathcal{F}}$, которая имеет ранг r , где $r = n - q < n$, и не содержит букв БП x_{i_1}, \dots, x_{i_q} , приводится к ее совершенной ДНФ \widetilde{K} от БП $X(n)$ в результате следующего ЭП:

$$\widehat{K} \underset{t_{1, \&}^{\text{ПК}}}{\rightleftarrows} \widehat{K}(x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_1}) \cdots (x_{i_q} \vee \bar{x}_{i_q}) \underset{t_{\&, \vee}^D}{\rightleftarrows} \widetilde{K}.$$

Затем в полученной ОДНФ устраняются повторные вхождения слагаемых так, как это делалось ранее при переходе от $\widehat{\mathcal{F}}$ к $\widetilde{\mathcal{F}}$, и в результате мы приходим к совершенной ОДНФ $\widetilde{\mathcal{F}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Любую формулу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$, реализующую ФАЛ f , с помощью ЭП на основе системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ можно преобразовать в совершенную ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$.*

Рассмотрим описанные выше ЭП на примере формулы

$$\mathcal{F} = (x_1 \vee x_2) \cdot \overline{(x_1 \cdot x_3)} \cdot (x_2 \vee x_3),$$

для которой

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\xrightarrow[t_{\&}^M]{} (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \cdot (x_2 \vee x_3) &&= \mathcal{F}', \\ \mathcal{F}' &\xrightarrow[\{t_{\&,\vee}^D, \tau^{\text{СП}}\}]{} x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_2 \overline{x_3} &&= \check{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}, \\ \widehat{\mathcal{F}} &\xrightarrow[\{t_{\&,\vee}^D, \tau^{\text{СП}}\}]{} x_1 x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} &&= \widetilde{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Система $\tau^{\text{осн}}$ — полная система тождеств.

Доказательство. Пусть \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' — эквивалентные формулы, реализующие равные ФАЛ f' и f'' соответственно, а набор $x(n) = x$ содержит все различные БП, встречающиеся в \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' . Пусть, далее, ФАЛ $f(x)$ равна f' и f'' , а $\widetilde{\mathcal{F}}$ — совершенная ОДНФ ФАЛ f от БП $X(n)$. В силу леммы 3.2 имеет место ЭП

$$\mathcal{F}' \xrightarrow[\tau^{\text{осн}}]{} \widetilde{\mathcal{F}} \xrightarrow[\tau^{\text{осн}}]{} \mathcal{F}'',$$

которое доказывает теорему. □

Коснемся, в заключение, вопроса о наличии в системе $\tau^{\text{осн}}$ тождеств, которые можно вывести из других тождеств этой системы. Заметим, сначала, что тождество (3.2) можно вывести из системы тождеств $\tau' = \{\tau^M, t_{1,\&}^{\text{ПК}}, t_{\&}^K\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \overline{x_1} &\xrightarrow[\tau^M]{} \overline{(\overline{x_1} \vee x_1)} \xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \overline{(\overline{x_1} \vee x_1) \cdot (x_2 \vee \overline{x_2})} \xrightarrow[t_{\&}^K]{} \overline{(x_2 \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_1)} \\ &\xrightarrow[t_{1,\&}^{\text{ПК}}]{} \overline{(x_2 \vee \overline{x_2})} \xrightarrow[\tau^M]{} \overline{x_2} \cdot x_2 \xrightarrow[t_{\&}^K]{} x_2 \cdot \overline{x_2}. \end{aligned}$$

Далее, из системы тождеств $\{\tau', t_{\&}^A, t_{\&}^{\text{ОП}}\}$ можно вывести тождество $t_{0,\&}^{\text{ПК}}$, так как

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot \overline{x_2}) \xrightarrow[\tau']{} x_1 \cdot (x_1 \cdot \overline{x_1}) \xrightarrow[t_{\&}^A]{} (x_1 \cdot x_1) \cdot \overline{x_1} \xrightarrow[t_{\&}^{\text{ОП}}]{} x_1 \cdot \overline{x_1} \xrightarrow[t_{\&}^{\text{ОП}}]{} x_2 \cdot \overline{x_2}.$$

Следовательно, тождество $t_{0,\&}^{\text{ПК}}$ выводится из остальных тождеств системы $\tau^{\text{осн}}$.

§4 Сокращенная ДНФ и способы ее построения. Некоторые оценки длины сокращенной ДНФ

Представление ФАЛ в виде ДНФ или КНФ имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \dots \vee K_s = \mathfrak{A}, \quad (4.1)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = J_1 \cdots J_t = \mathfrak{B}, \quad (4.2)$$

где K_1, \dots, K_s (J_1, \dots, J_t) — различные ЭК (соответственно ЭД) от БП x_1, \dots, x_n . Из (2.1), (2.2) следует, что представления (4.1) и (4.2) эквивалентны следующим покрытиям множеств N_f и \bar{N}_f гранями куба B^n

$$N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s}; \quad (4.3)$$

$$\bar{N}_f = \bar{N}_{J_1} \cup \dots \cup \bar{N}_{J_t}. \quad (4.4)$$

Так, представление

$$g(x_1, x_2, x_3) = K_1 \vee \dots \vee K_6, \quad (4.5)$$

где $\bar{N}_g = \{(000), (111)\}$ и

$$K_1 = x_1\bar{x}_3, \quad K_2 = x_2\bar{x}_3, \quad K_3 = \bar{x}_1x_2, \quad K_4 = \bar{x}_1x_3, \quad K_5 = \bar{x}_2x_3, \quad K_6 = x_1\bar{x}_2,$$

соответствует покрытию $N_g = \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_6$, где $\mathcal{N}_i = N_{K_i}$ при всех $i = 1, \dots, 6$ (см. рис. 2.1). Заметим, что совершенные ДНФ и КНФ ФАЛ f из (2.3) задают покрытие множеств N_f и \bar{N}_f соответственно гранями размерности 0. Принимая во внимание указанную выше геометрическую интерпретацию, мы не будем в дальнейшем делать существенных различий между ЭК K_i и соответствующей ей гранью N_{K_i} , а также между ДНФ вида (4.1) и соответствующим ей покрытием (4.3).

Рассмотрим теперь некоторые специальные виды ДНФ, их «геометрическую» интерпретацию и способы построения. Будем говорить, что ФАЛ f' *имплицирует* ФАЛ f'' или, иначе, ФАЛ f'' *поглощает* ФАЛ f' , если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, то есть импликация $(f' \rightarrow f'')$ тождественно равна 1. Заметим, что отношение имплицируемости является отношением частичного порядка, и что f' имплицирует f'' тогда и только тогда, когда $f'' = f' \vee f''$ или $f' = f' \cdot f''$. Отсюда следует, в частности, что ЭК K' имплицирует ЭК K'' тогда и только тогда, когда множество букв K'' содержится во множестве букв K' , то есть $K' = K'' \cdot K$ для некоторой ЭК K , не имеющей общих букв с ЭК K'' . Это означает, что

$$K'' \vee K' = K'' \vee K'' \cdot K \xrightarrow{t\Pi} K'', \quad (4.6)$$

то есть ЭК K' может быть «устранена» из дизъюнкции $K'' \vee K'$ путем ЭП с помощью тождества поглощения (см. §3). Конъюнкция, которая имплицирует ФАЛ f , называется *импликантой* этой ФАЛ.

ДНФ \mathfrak{A} вида (4.1) будем называть *приведенной*, если соответствующее ей покрытие является приведенным (см. §1), то есть ни одна из граней N_{K_1}, \dots, N_{K_s} не содержится ни в одной из других граней покрытия. На «языке имплицируемости» это означает, что ни одна из ЭК K_i , $i \in [1, n]$, не является импликантой ЭК K_j , где $j \in [1, n]$ и $i \neq j$. Заметим, что формируя с помощью тождеств $\{\tau^A, \tau^K\}$ подходящие подформулы и применяя к ним эквивалентные преобразования вида (4.6), из любой ДНФ \mathfrak{A} можно получить приведенную ДНФ $\hat{\mathfrak{A}}$. При этом ДНФ $\hat{\mathfrak{A}}$ будем считать результатом *сокращения всех поглощаемых ЭК* в ДНФ \mathfrak{A} .

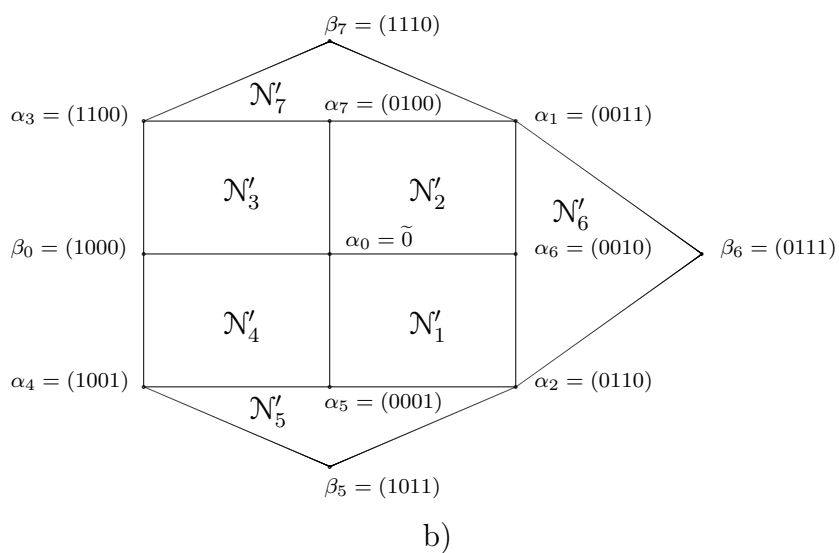
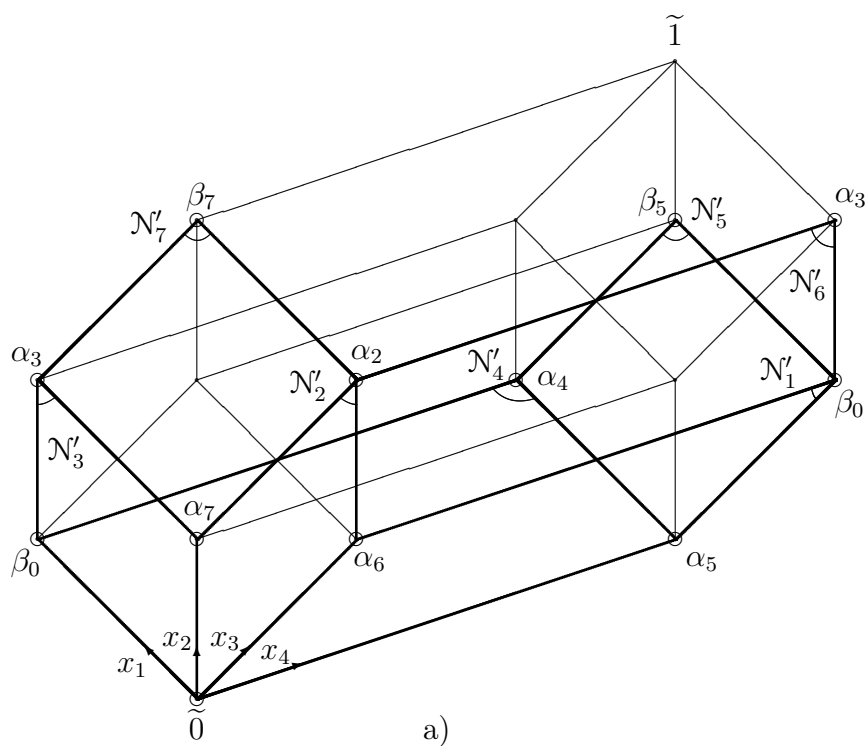
Импликанта K ФАЛ f называется *простой импликантой* этой ФАЛ, если она не поглощается никакой другой отличной от нее импликантой ФАЛ f . Из определений и отмеченных выше фактов следует, что в простую импликанту ФАЛ f не входят буквы несущественных БП этой ФАЛ и что из любой импликанты ФАЛ f можно получить ее простую импликанту удалением некоторых букв. Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется ее *сокращенной ДНФ*. Заметим, что сокращенная ДНФ ФАЛ f является приведенной ДНФ, и что ей соответствует покрытие множества N_f всеми максимальными по включению гранями множества N_f этой ФАЛ, которые мы будем называть просто *максимальными гранями* ФАЛ f . Указанное соответствие позволяет строить сокращенную ДНФ на основе «геометрических» соображений. Так, в соответствии с рис. 2.1 правая часть (4.5) является сокращенной ДНФ ФАЛ g , а из рис. 4.1a вытекает, что сокращенная ДНФ ФАЛ $g'(x_1, x_2, x_3, x_4)$, для которой $\tilde{\alpha}_{g'} = (1111 1011 1101 1010)$, имеет вид

$$g' = K'_1 \vee \dots \vee K'_7, \quad (4.7)$$

где $K'_1 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$, $K'_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_4$, $K'_3 = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$, $K'_4 = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $K'_5 = x_2 \cdot \bar{x}_4$, $K'_6 = \bar{x}_1 x_3$, $K'_7 = \bar{x}_2 x_4$, причем ЭК K'_i , $i = 1, \dots, 7$, соответствует грани $N'_i = N_{K'_i}$ на рис. 4.1a. На рис. 4.1b приведена для наглядности «развертка» множества $N_{g'}$ и составляющих его максимальных граней указанной ФАЛ g' . Легко видеть, что сокращенная ДНФ ЭК или ЭД совпадает с ней самой.

Дизъюнктивная нормальная форма, содержащая все простые импликанты ФАЛ f , называется *квасисокращенной ДНФ* этой ФАЛ. Заметим, что приведенная ДНФ, которая получается из квазисокращенной ДНФ ФАЛ f в результате сокращения всех поглощаемых ЭК, является сокращенной ДНФ этой ФАЛ. Легко видеть, что ДНФ \mathfrak{A} является квазисокращенной ДНФ ФАЛ f тогда и только тогда, когда любая импликанта ФАЛ f является импликантой некоторой ЭК из \mathfrak{A} .

Теорема 4.1. Пусть \mathfrak{A}' и \mathfrak{A}'' — квазисокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ \mathfrak{A} получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и сокращения подобных. Тогда \mathfrak{A} — квазисокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

Рис. 4.1: «геометрия» сокращенной ДНФ ФАЛ g'

Доказательство. Пусть ЭК K является простой импликантой ФАЛ f и, следовательно, является импликантой как ФАЛ f' , так и ФАЛ f'' . Из свойств квазисокращенных ДНФ вытекает, что в \mathfrak{A}' и \mathfrak{A}'' найдутся ЭК K' и K'' соответственно, которые поглощают ЭК K . Таким образом, в ДНФ \mathfrak{A} войдет ЭК \tilde{K} , равная $K' \cdot K''$, которая получится в результате раскрытия скобок и сокращения подобных в формуле $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$. Поскольку ЭК \tilde{K} является импликантой ФАЛ f и, одновременно, поглощает ЭК K , то $\tilde{K} = K$, так как K — простая импликанта ФАЛ f .

Теорема доказана. \square

Следствие. Если ДНФ \mathfrak{A} получается из КНФ \mathfrak{B} ФАЛ f в результате раскрытия скобок, сокращения подобных и сокращения всех поглощаемых ЭК, то \mathfrak{A} — сокращенная ДНФ ФАЛ f .

Применяя следствие из теоремы 4.1 к ФАЛ g' , показанной на рис. 4.1, получим (сравните с (4.7))

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \\ &= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \\ &= \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_4. \end{aligned}$$

Следующий метод (метод Блейка [4]) позволяет получать сокращенную ДНФ ФАЛ f из произвольной ДНФ этой ФАЛ с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств $\{\tau^{\text{СП}}, t^{\text{П}}, t^{\text{ОС}}\}$ (см. §3). Любая ДНФ, которую можно получить из ДНФ \mathfrak{A} путем формирования в ней с помощью тождеств $\{\tau^{\text{А}}, \tau^{\text{К}}\}$ подформулы \mathcal{F} вида $x_i K' \vee \bar{x}_i K''$, применения к \mathcal{F} ЭП вида

$$\mathcal{F} \xrightarrow[t^{\text{ОС}}]{} x_i K' \vee \bar{x}_i K'' \vee K' K''$$

и последующего сокращения подобных, называется *расширением* дизъюнктивной нормальной формы \mathfrak{A} . Будем считать по определению, что любая ДНФ является своим расширением, а ДНФ, у которой других расширений нет, будем называть *нерасширяемой*. Очевидно, что в результате последовательных расширений из любой ДНФ можно получить нерасширяемую ДНФ.

Теорема 4.2. Нерасширяемая дизъюнктивная нормальная форма \mathfrak{A} ФАЛ f является квазисокращенной ДНФ этой ФАЛ.

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что ДНФ \mathfrak{A} содержит все простые импликанты ФАЛ f . Пусть $X(n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество существенных БП этой ФАЛ, а K — простая импликанта f , которая не входит в \mathfrak{A} . Рассмотрим множество \mathcal{K} , состоящее из всех тех элементарных конъюнкций от БП $X(n)$, которые являются импликантами f , но не являются импликантами ни одной ЭК из \mathfrak{A} . Заметим, что в

силу простоты импликанты K для ФАЛ f множество \mathcal{K} содержит ЭК K и что \mathcal{K} не может содержать ЭК ранга n .

Пусть, далее, k — ЭК максимального ранга в \mathcal{K} и пусть буквы некоторой БП x_i , $1 \leq i \leq n$, не входят в k . Тогда в силу выбора ЭК k и из свойств ЭК вида $x_i \cdot k$ (вида $\bar{x}_i \cdot k$) должна быть импликантой некоторой ЭК вида $x_i \cdot K'$ (соответственно $\bar{x}_i \cdot K''$) из \mathfrak{A} . Следовательно, ЭК k будет импликантой ЭК вида $K' \cdot K''$, которая входит в \mathfrak{A} в силу нерасширяемости последней. Полученное противоречие доказывает, что ЭК K входит в \mathfrak{A} .

Теорема доказана. \square

Следствие. Из любой ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате последовательных расширений ДНФ \mathfrak{A} до получения нерасширяемой ДНФ и последующего сокращения всех поглощаемых ЭК в ней. При этом ЭП, связанные с расширением ДНФ и сокращением поглощаемых ЭК, можно чередовать друг с другом.

Возьмем для примера в качестве ДНФ \mathfrak{A} совершенную ДНФ ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3)$, которая имеет вид

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3.$$

Применяя к \mathfrak{A} метод Блейка, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\stackrel{\{\tau^A, \tau^K\}}{\equiv} (x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3) \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \stackrel{\{t^{OC}, t^{II}\}}{\equiv} (x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3) \\ &\stackrel{\{\tau^A, \tau^K\}}{\equiv} (x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_1x_3) \vee x_1x_2\bar{x}_3 \stackrel{\{t^{OC}, t^{II}, t_{\&}^{OP}\}}{\equiv} x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \\ &\stackrel{\tau^A, \tau^K}{\equiv} x_2x_3 \vee (x_3x_1 \vee \bar{x}_3x_1x_2) \stackrel{\{t^{OC}, t^{II}, t_{\&}^{OP}\}}{\equiv} x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Приведем, в заключение параграфа, некоторые оценки длины сокращенной ДНФ у ФАЛ от n БП, показывающие, в частности, что длина сокращенной ДНФ может быть существенно больше длины совершенной ДНФ той же ФАЛ. Для $I \subseteq [0, n]$ через $s_n^I(x_1, \dots, x_n)$ обозначим ФАЛ из $P_2(X)(n)$, которая является характеристической ФАЛ объединения всех слоев куба B^n с номерами из I . При этом числа из I считаются *рабочими числами* ФАЛ s_n^I . Заметим, что ФАЛ s_n^I является *симметрической*, то есть не изменяет свое значение при любой перестановке аргументов, и наоборот, любая симметрическая функция алгебры логики совпадает с одной из ФАЛ вида s_n^I . Заметим также, что отличная от константы симметрическая ФАЛ является существенной ФАЛ. Симметрическая ФАЛ называется *поясковой*, если ее рабочие числа образуют отрезок. Поясковой ФАЛ является, в частности ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3) = s_3^{[2,3]}$, а также ФАЛ $g = s_3^{[1,2]}$, показанная на рис. 2.1. Легко видеть,

что сокращенная ДНФ поясковой ФАЛ $s_n^{[r,p]}(x_1, \dots, x_n)$, где $0 \leq r \leq p \leq n$, состоит из всех ЭК ранга $(n + r - p)$, которые содержат r БП и $(n - p)$ отрицаний БП, то есть имеет вид

$$s_n^{[r,p]}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{n+r-p} \leq n \\ \sigma_1 + \dots + \sigma_{n+r-p} = r}} x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_{n+r-p}}^{\sigma_{n+r-p}}. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что длина сокращенной ДНФ ФАЛ $s_n^{[r,p]}$ равна $\binom{n}{r} \cdot \binom{n-p}{n-r}$, и поэтому при $r = n - p = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ она в соответствии с формулой Стирлинга (1.3) не меньше, чем $e_1 \frac{3^n}{n}$, где e_1 — некоторая константа.

С другой стороны, сокращенная ДНФ любой ФАЛ из $P_2(n)$ является приведенной ДНФ, и поэтому соответствует антицепи в частично упорядоченном множестве из всех граней куба B^n с отношением вложения. Заметим, что это частично упорядоченное множество является ранжированным частично упорядоченным множеством длины $(n + 1)$, где i -й ярус, $i = 0, \dots, n$, состоит из всех граней размерности i , число которых равно $\binom{n}{i} 2^i$. Заметим также, что через любую грань куба B^n размерности i , $i = 0, \dots, n$, проходит $(n - i)! \cdot i! \cdot 2^i$ неуплотняемых цепей указанного частично упорядоченного множества, которое, следовательно, удовлетворяет условию леммы 1.1. Оценивая максимальное значение величины $\binom{n}{i} 2^i$ на отрезке $i \in [0, n]$ так, как это делалось в §1 для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{i}$, можно показать, что оно достигается когда $i \in [\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1, \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1]$. В соответствии с формулой Стирлинга (1.3) отсюда следует, что мощность любой антицепи рассматриваемого частично упорядоченного множества, а значит и длина сокращенной ДНФ любой ФАЛ f из $P_2(n)$ не больше, чем $e_2 \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, где e_2 — некоторая константа.

§5 Тупиковые и минимальные ДНФ.

Ядро и ДНФ Квайна. Критерий вхождения

импликант в тупиковые ДНФ, его локальность

Рассмотрим вопрос о построении тех ДНФ, в которых нет ничего «лишнего». Будем говорить, что ДНФ \mathfrak{A} , реализующая ФАЛ f , является *тупиковой* ДНФ, если $f \neq \mathfrak{A}'$ для любой ДНФ \mathfrak{A}' , полученной из \mathfrak{A} в результате удаления некоторых букв или целых ЭК. Из определения вытекает, что в тупиковую ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f могут входить только простые импликанты этой ФАЛ, то есть \mathfrak{A} получается из сокращенной ДНФ ФАЛ f путем удаления некоторых ЭК и что \mathfrak{A} является приведенной ДНФ (см. §4). С «геометрической» точки зрения тупиковая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f задает строго приведенное (см. §1) покрытие множества N_f максимальными гранями ФАЛ f и обратно. Исходя из этих «геометрических» соображений, можно находить все или

некоторые тупиковые ДНФ для ФАЛ от небольшого числа БП. Так например, сокращенная ДНФ (4.8) для ФАЛ «голосования» $H(x_1, x_2, x_3)$ является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ, ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3) = s_3^{\{1,2\}}$ (см. рис. 2.1а и (4.5)) имеет пять тупиковых ДНФ —

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5, \quad \mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6 \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5, \quad \mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6, \quad \mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1, \quad (5.2)$$

а у ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (см. рис. 4.1 и (4.7)) имеются две тупиковые ДНФ —

$$\mathfrak{A}'_1 = K'_5 \vee K'_6 \vee K'_7 \vee K'_1, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_5 \vee K'_6 \vee K'_7 \vee K'_4. \quad (5.3)$$

Построение всех или некоторых тупиковых ДНФ для заданной ФАЛ f является, обычно, промежуточным этапом при построении *минимальной (кратчайшей)* ДНФ ФАЛ f , то есть ДНФ, которая имеет минимальный ранг (соответственно длину) среди всех ДНФ, реализующих f . Это связано с тем, что минимальная ДНФ обязательно является тупиковой, а среди кратчайших ДНФ всегда есть тупиковая. Так ДНФ \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 в (5.1) являются минимальными и, одновременно, кратчайшими ДНФ ФАЛ $g = s_3^{\{1,2\}}$, а для ФАЛ f , показанной на рис. 4.1, обе ее тупиковые ДНФ $\tilde{\mathfrak{A}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_2$ в (5.3) являются минимальными и, одновременно, кратчайшими.

При построении тупиковых ДНФ ФАЛ f бывает полезно знать ДНФ *пересечение тупиковых (сумма тупиковых)* ФАЛ f , то есть дизъюнкцию всех тех различных простых импликант этой ФАЛ, которые входят в любую (соответственно хотя бы в одну) тупиковую ДНФ ФАЛ f . Заметим, что ДНФ пересечение тупиковых (ДНФ $\cap T$) ФАЛ f в общем случае не реализует саму ФАЛ f , а в некоторых случаях и, в частности, в случае $g = s_3^{\{1,2\}}$ (см. выше) может быть пустой. В тоже время ДНФ сумма тупиковых (ДНФ ΣT) ФАЛ f всегда реализует эту ФАЛ, содержится в ее сокращенной и может с ней совпадать, как это имеет место в случае $g_3^{\{1,2\}}$ или в случае ФАЛ «голосования». Аналогичным образом определяется ДНФ сумма минимальных (ДНФ ΣM) ФАЛ f и т.п. Очевидно, что ДНФ ΣM ФАЛ f реализует эту ФАЛ и содержится в ее ДНФ ΣT , а для всех приведенных выше ФАЛ ДНФ ΣM совпадает с ДНФ ΣT .

Набор α , $\alpha \in B^n$, называется *ядровой точкой* ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f . При этом грань N_K , являющаяся максимальной допустимой гранью ФАЛ f и содержащая точку α , считается *ядровой гранью* ФАЛ f , а совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется *ядром* ФАЛ f . Так, ядром ФАЛ g' , показанной на рис. 4.1, являются грани N'_5 , N'_6 и N'_7 , которые содержат ядровые точки β_5 , β_6 и β_7 соответственно.

Лемма 5.1. *Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f , которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.*

Доказательство. Пусть тупиковая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ не включает в себя простую импликанту K , которая соответствует ядровой грани N_K ФАЛ f , содержащей ядровую точку α этой ФАЛ. Поскольку все отличные от K простые импликанты ФАЛ f обращаются в 0 на наборе α , то ДНФ \mathfrak{A} также будет равна 0 на этом наборе и, следовательно, $f(\alpha) = 0$. Полученное противоречие с тем, что $\alpha \in N_f$, доказывает необходимость включения ЭК K в любую тупиковую ДНФ ФАЛ f .

Пусть теперь простая импликанта K ФАЛ f соответствует грани N_K , которая не входит в ядро ФАЛ f . При этом каждая точка грани N_K покрывается хотя бы одной отличной от N_K максимальной допустимой гранью ФАЛ f . Следовательно, все отличные от N_K максимальные допустимые грани ФАЛ f образуют покрытие множества N_f , из которого можно выделить строго приведенное подпокрытие, соответствующее тупиковой ДНФ ФАЛ f , не содержащей ЭК K .

Лемма доказана. □

Будем называть ДНФ *ядровой*, если все ее максимальные допустимые грани являются ядровыми. Из леммы 5.1 следует, что сокращенная ДНФ ядровой ФАЛ является ее единственной тупиковой ДНФ. Примером ядровой ФАЛ является ФАЛ голосования (4.8) (см. также §6).

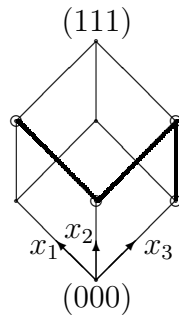


Рис. 5.1: покрытие $N_{g''}$

Дизъюнктивная нормальная форма, получающаяся из сокращенной ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K , для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f , но не входит в него, называется *ДНФ Квайна* этой ФАЛ. Из определений следует, что ДНФ Квайна ФАЛ f включает в себя ДНФ ΣT этой ФАЛ и содержится в ее сокращенной ДНФ. Заметим, что для ФАЛ $g''(x_1, x_2, x_3)$, показанной на рис. 5.1, ее сокращенная ДНФ имеет вид $g'' = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$, то есть отличается от ДНФ Квайна, которая является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид $g'' = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3$. В то же время для ФАЛ g' , показанной на рис. 4.1, ДНФ Квайна совпадает с сокращенной ДНФ этой ФАЛ и отличается от ее ДНФ ΣT , которая (см. выше) равна

$$K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5 \vee K'_6 \vee K'_7.$$

Для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ и набора α , $\alpha \in N_f$, обозначим через $\Pi_\alpha(f)$ множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f , которые мы будем называть *пучком ФАЛ f через точку α* . Точку α будем называть *регулярной относительно грани N_K точкой ФАЛ f* , где $\alpha \in N_f$ и $N_K \in \Pi_\alpha(f)$, если найдется точка β , $\beta \in N_f \setminus N_K$, для которой $\Pi_\beta(f) \subseteq \Pi_\alpha(f)$. При этом, очевидно, $N_K \notin \Pi_\beta(f)$, так как $\beta \notin N_K$, и, следовательно, включение $\Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha$, которое означает, что любая максимальная грань ФАЛ f , проходящая через точку β , проходит и через точку α , может быть только строгим включением $\Pi_\beta \subset \Pi_\alpha$. Грань N_K ФАЛ f называется *регулярной гранью* этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны относительно нее самой. Заметим, что грань, которая не входит в ядро, но покрывается им, является регулярной. Заметим также, что для ФАЛ g' , показанной на рис. 4.1, грани N'_1 и N'_2 , которые не входят в ДНФ ΣT , являются регулярными, так как

$$\Pi_{\beta_5}(f) \subset \Pi_{\alpha_1}, \Pi_{\beta_6}(f) \subset \Pi_{\alpha_2}(f) \text{ и } \Pi_{\beta_i} \subset \Pi_{\alpha_i} \text{ для всех } i, i = 0, 5, 6, 7.$$

Теорема 5.1 (II). *Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.*

Доказательство. Пусть $N_K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ — регулярная грань ФАЛ f . Тогда для каждого j , $j = 1, \dots, s$, в силу регулярности точки α_j относительно грани N_K найдется точка β_j , $\beta_j \in N_f \setminus N_K$, обладающая тем свойством, что любая максимальная грань ФАЛ f , проходящая через точку β_j , проходит и через точку α_j . Следовательно, любая система максимальных граней ФАЛ f , не содержащая грань N_K и покрывающая не принадлежащие ей точки β_1, \dots, β_s «автоматически» покроеет все точки $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ этой грани. Таким образом, грань N_K не может входить в строго приведенное покрытие множества N_f максимальными гранями и поэтому ЭК K не может входить в ДНФ ΣT ФАЛ f .

Пусть теперь N_K — нерегулярная грань ФАЛ f , которая содержит нерегулярную относительно N_K точку α , и пусть $N_f \setminus N_K = \{\beta_1, \dots, \beta_q\}$. Из нерегулярности точки α относительно грани N_K следует, что для любого j , $j = 1, \dots, q$, пучок $\Pi_{\beta_j}(f)$ не вложен в пучок $\Pi_\alpha(f)$ и поэтому в $\Pi_{\beta_j}(\alpha)$ найдется грань N_{K_j} , которая проходит через точку β_j , но не проходит через точку α . Следовательно, из покрытия

$$N_K \cup N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_q}$$

множества N_f нельзя удалить грань N_K , так как только она покрывает в нем точку α . Таким образом, любое строго приведенное покрытие множества N_f , являющееся подпокрытием указанного покрытия, будет соответствовать тупиковой ДНФ, содержащей ЭК K .

Теорема доказана. □

Коснемся, в заключение, вопроса о локальном характере рассмотренных выше критериев вхождения простых импликант ФАЛ f в ее ДНФ $\cap T$ и ДНФ ΣT . Для

каждой максимальной грани \mathcal{N} ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ положим $S_0(\mathcal{N}, f) = \{\mathcal{N}\}$, а затем индукцией по r , $r = 1, 2, \dots$, определим множество $S_r(\mathcal{N}, f)$ как множество всех тех максимальных граней ФАЛ f , которые имеют непустое пересечение хотя бы с одной гранью из $S_{r-1}(\mathcal{N}, f)$. При этом множество $S_r(\mathcal{N}, f)$ будем называть *окрестностью порядка r грани \mathcal{N} функции f* .

Докажем, что вопрос о вхождении простой импликанты K ФАЛ f в ДНФ $\cap T$ (ДНФ ΣT) этой ФАЛ можно решить, рассматривая окрестность $S_1(N_K, f)$ (соответственно $S_2(N_K, f)$). Действительно, грань N_K является ядровой гранью ФАЛ f тогда и только тогда, когда она не покрывается всеми остальными максимальными гранями этой ФАЛ. Поскольку грани, не входящие в $S_1(N_K, f)$, не имеют общих точек с N_K , грань N_K является ядровой тогда и только тогда, когда она не покрывается всеми остальными гранями из $S_1(N_K, f)$. Из теоремы 5.1 следует, что ЭК K входит в ДНФ ΣT ФАЛ f тогда и только тогда, когда для любой точки α из N_K найдется точка β , $\beta \in N_f \setminus N_K$, для которой $\Pi_\beta(f) \subset \Pi_\alpha(f)$. Заметим, что все грани пучка $\Pi_\alpha(f)$ входят в $S_1(N_K, f)$, а все грани пучка $\Pi_\beta(f)$, если $\Pi_\alpha(f) \cap \Pi_\beta(f) \neq \emptyset$, — в $S_2(N_K, f)$. Следовательно, проверку грани N_K на регулярность можно осуществить на основе анализа ее окрестности порядка 2. Легко показать, что рассмотрение окрестности порядка 2 достаточно для проверки грани N_K на ее вхождение в ДНФ Квайна ФАЛ f . Если же все ядровые грани ФАЛ f выделены и «помечены» (для этого, как уже говорилось, достаточно рассмотреть их окрестности порядка 1), то вхождение ЭК K в ДНФ Квайна ФАЛ f сводится к покрытию грани N_K отличными от нее «помеченными» гранями из окрестности $S_1(N_K, f)$.

§6 Особенности ДНФ для функций из некоторых классов. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

Рассмотрим особенности «поведения» и связанные с ними особенности ДНФ для функций из некоторых классов. Напомним, что ФАЛ вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0 \quad (6.1)$$

из $P_2(n)$, где $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ — булевы константы, называется *линейной* ФАЛ и заметим, что существенными БП этой ФАЛ являются те и только те БП x_i из множества $X(n)$, для которых «коэффициент» α_i равен 1. Заметим также, что функции алгебры логики $\ell_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n = s_n^{\{1,3,5,\dots\}}$ и $\bar{\ell}_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1 = s_n^{\{0,2,4,\dots\}}$ являются единственными существенными линейными ФАЛ в $P_2(n)$. Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейно зависит от БП x_i* или, иначе, что БП x_i является *линейной БП* ФАЛ f , если $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n .

При этом, очевидно, имеет место равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \oplus f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (6.2)$$

и обратно, а значит ФАЛ является линейной тогда и только тогда, когда она линейно зависит от всех своих существенных БП. На самом деле для линейности ФАЛ f достаточно, чтобы она линейно зависела от всех своих существенных БП, кроме одной. Это легко доказать индукцией по числу существенных БП ФАЛ f , используя тот факт, что все ФАЛ из $P_2(1)$ являются линейными, в качестве базиса индукции и применяя равенство (6.2) для обоснования индуктивного перехода.

Заметим, что если во множестве N_f ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ нет соседних по некоторой БП x_i наборов, то в каждую импликанту K ФАЛ f обязательно входит одна из букв БП x_i . Действительно, если K не содержит букв БП x_i , то для любого набора α из N_K и соседнего с ним по БП x_i набора β будут выполняться равенства $K(\alpha) = K(\beta) = 1$. Следовательно, $f(\alpha) = f(\beta) = 1$, так как K — импликанта f , а это противоречит свойствам множества N_f . Указанное свойство выполняется, в частности, если ФАЛ f линейно зависит от БП x_i , так как при этом $f(\alpha) \neq f(\beta)$ для любых соседних по БП x_i наборов α и β .

Заметим, далее, что если во множестве N_f ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ вообще нет соседних наборов, то она имеет единственную ДНФ от БП $X(n)$ — свою совершенную ДНФ. Действительно, ранг любой импликанты K ФАЛ f в этом случае равен n , а соответствующая ей грань N_K состоит из одного набора куба B^n . Следовательно, любая ДНФ \mathfrak{A} ФАЛ f включает в себя $|N_f|$ ЭК ранга n , то есть является ее совершенной ДНФ. Очевидно, что если во множестве N_f есть соседние наборы, то совершенная ДНФ ФАЛ f уже не будет единственной ДНФ этой ФАЛ. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Совершенная ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ является ее единственной ДНФ от БП $X(n)$ тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.*

Следствие. *Совершенная ДНФ линейной существенной ФАЛ является единственной ДНФ этой ФАЛ от ее существенных БП.*

Рассмотрим теперь класс монотонных ФАЛ и некоторые связанные с ним другие классы функций. Напомним, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$ для любых наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$. Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *монотонно зависит от БП x_i* или, иначе, БП x_i является *монотонной* БП ФАЛ f , если неравенство $f(\alpha) \leq f(\beta)$ выполняется для любых соседних по БП x_i наборов α и β куба B^n таких, что $\alpha \leq \beta$. Легко видеть, что монотонная ФАЛ монотонно зависит от всех своих БП и обратно.

Докажем, что если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ монотонно зависит от БП x_i , то ни одна из ее простых импликант не может содержать букву \bar{x}_i . Действительно, пусть простая

импликанта K ФАЛ f имеет вид $K = \bar{x}_i \cdot K'$, где ЭК K' не содержит букв БП x_i . Заметим, что ЭК K' не является импликантой ФАЛ f , так как иначе ЭК K не была бы простой импликантой f , и, следовательно, существует набор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такой, что $K'(\beta) = 1$, но $K(\beta) = f(\beta) = 0$. Таким образом, $\beta_i = 1$ и поэтому для набора α соседнего с набором β по БП x_i выполняются равенства

$$K'(\alpha) = K'(\beta) = K(\alpha) = f(\alpha) = 1,$$

а также неравенство $\alpha \leq \beta$, из которого в силу монотонности ФАЛ f по БП x_i вытекает, что $f(\beta) = 1$. Полученное противоречие доказывает, что простая импликация монотонной по БП x_i ФАЛ не может содержать буквы \bar{x}_i . Отсюда следует, что любая простая импликанта отличной от 0 монотонной ФАЛ является монотонной ЭК, то есть не содержит отрицаний БП.

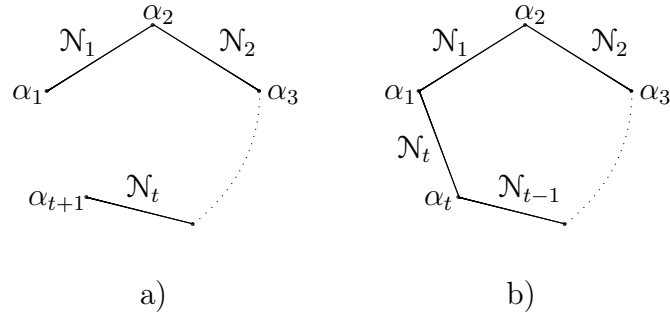
Частным случаем монотонной зависимости ФАЛ f от БП x_i является *конъюнктивная* (*дизъюнктивная*) зависимость f от x_i , когда $f = x_i \cdot g$ (соответственно $f = x_i \vee g$), где ФАЛ g получается из f подстановкой константы 1 (соответственно 0) вместо БП x_i . При этом в случае конъюнктивной зависимости буква x_i входит в любую импликанту ФАЛ f , а в случае дизъюнктивной зависимости буква x_i не входит ни в одну простую импликанту ФАЛ f отличную от x_i . Будем говорить, что ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ *инмонотонно* (*инконъюнктивно*, *индизъюнктивно*) зависит от БП x_i , если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ зависит от x_i монотонно (соответственно конъюнктивно, дизъюнктивно). Очевидно, что все особенности ДНФ, характерные для ФАЛ с той или иной монотонной зависимостью от БП распространяются на ФАЛ с аналогичной инмонотонной зависимостью после инвертирования соответствующих БП.

Сопоставим каждому набору $\beta \in B^n$, монотонную ЭК K_β^+ от БП $X(n)$, состоящую из тех и только тех букв x_j , $j \in [1, n]$, для которых $\beta \langle j \rangle = 1$, и заметим, что каждая монотонная ЭК от БП $X(n)$ может быть представлена в указанном виде. Легко видеть также, что $K_\beta^+(\gamma) = 1$ тогда и только тогда, когда $\gamma \geq \beta$, откуда следует, что ЭК $K_{\beta'}^+$ имплицирует ЭК $K_{\beta''}^+$ тогда и только тогда, когда $\beta' \geq \beta''$. Набор α , $\alpha \in B^n$ называется *нижней единицей* монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, если $\alpha \in N_f$ и $f(\beta) = 0$ для любого отличного от α набора β такого, что $\beta \leq \alpha$. Множество всех нижних единиц монотонной ФАЛ f будем обозначать через N_f^+ .

Лемма 6.2. *Сокращенная ДНФ \mathfrak{A} монотонной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:*

$$\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \dots, x_n).$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любого набора β , $\beta \in N_f^+$, ЭК $K = K_\beta^+$ является простой импликантой ФАЛ f . Действительно, ЭК K является импликантой

Рис. 6.1: N_f цепной и циклической ФАЛ

ФАЛ f так как $K(\beta) = 1$ и поэтому, в силу монотонности ФАЛ f , $K(\gamma) = 1$ для любого набора γ из B^n такого, что $\gamma \geq \beta$, то есть для любого набора γ из N_K . Более того, ЭК K является простой импликантой ФАЛ f , так как любая ЭК K' , получающаяся из K удалением некоторых букв, имеет вид $K' = K_{\beta'}^+$, где $\beta' \leq \beta$ и $\beta' \neq \beta$, то есть не является импликантой ФАЛ f , поскольку обращается в 1 на наборе β' из \bar{N}_f .

Докажем теперь, что у ФАЛ f нет простых импликант, отличных от ЭК из \mathfrak{A} . Пусть монотонная ЭК K является простой импликантой ФАЛ f и имеет вид $K = K_{\beta}^+$, где $\beta \notin N_f^+$. При этом набор β входит в N_K и, следовательно, входит в N_f . Отсюда вытекает существование в N_f^+ набора β' , для которого выполнены соотношения $\beta' \leq \beta$ и $\beta' \neq \beta$, то есть имеют место включения $N_f \supseteq N_{K'} \supset N_K$, где $K' = K_{\beta'}^+$, противоречащие простоте импликанты K . Совпадение ДНФ \mathfrak{A} с сокращенной ДНФ ФАЛ f доказано.

Завершая доказательство, заметим, что в покрытии множества N_f , соответствующем ДНФ \mathfrak{A} , любой набор β , $\beta \in N_f^+$, покрывается только той максимальной гранью ФАЛ f , которая связана с ЭК K_{β}^+ . Это означает, что все грани указанного покрытия являются ядровыми гранями ФАЛ f , а ДНФ \mathfrak{A} совпадает с ДНФ $\cap T$ ФАЛ f .

Лемма доказана. \square

Следствие. *Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.*

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *цепной (циклической) функцией длины t* , если ее сокращенная ДНФ с «геометрической» точки зрения представляет собой цепь (соответственно цикл) из t последовательно соединенных ребер $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_t$ куба B^n (см. рис. 6.1а и 6.1б). Заметим, что циклическая ФАЛ длины t существует тогда и только тогда, когда $t \geq 6$ — четное число, а цепная ФАЛ длины t — при любом $t \geq 1$. Пример цепной ФАЛ длины 3 дает ФАЛ, показанная на рис. 6.1, а ФАЛ $g = s_3^{\{1,2\}}$ (см. рис. 2.1а) является циклической ФАЛ длины 6.

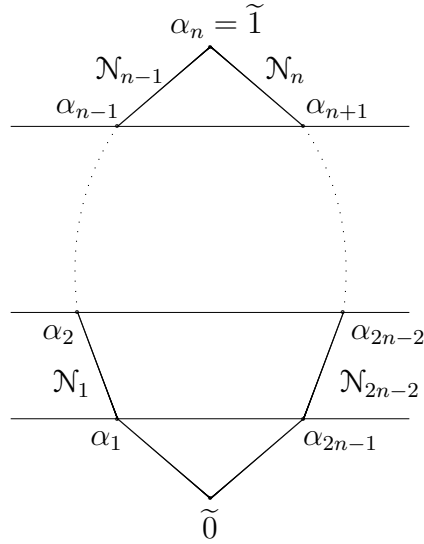


Рис. 6.2: N_f циклической ФАЛ

Из теоремы 5.1 следует, в частности, что для любой цепной ФАЛ длины не меньше 4 и любой циклической ФАЛ ДНФ ΣT совпадает с сокращенной ДНФ. При этом цепная ФАЛ f нечетной длины $t = 2k - 1 \geq 3$ имеет единственную минимальную ДНФ, которая совпадает с ее ДНФ ΣM и соответствует покрытию (см. рис. 6.1а) $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3 \cup \dots \cup \mathcal{N}_t$ длины k . Действительно, множество N_f в данном случае состоит из $2k$ наборов и не может быть покрыто $(k - 1)$ ребром. Кроме того, покрытие множества N_f , состоящее из k ребер, не может включать в себя ребра с общими вершинами и должно содержать ядровые ребра \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_t ФАЛ f . Легко видеть, что только покрытие $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_3 \cup \dots \cup \mathcal{N}_t$ обладает всеми этими свойствами. Таким образом, для цепной ФАЛ нечетной длины t , $t \geq 5$, ДНФ ΣT не совпадает с ДНФ ΣM .

Теорема 6.1 (ср. [1]). При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'' , имеющие общую простую импликанту K , которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Доказательство. Достаточно построить в $P_2(n)$ цепную функцию f четной длины $t = 2k \geq 2n - 2 \geq 4$. Действительно, если указанная ФАЛ f найдена, а ее множество N_f соответствует рис. 6.1а, то, полагая

$$N_{f'} = N_f \setminus \{\alpha_1\} \quad \text{и} \quad N_{f''} = N_f \setminus \{\alpha_{t+1}\},$$

получим цепные ФАЛ f' и f'' нечетной длины $2k - 1$ такие, что каждое ребро \mathcal{N}_i , где $i = 2, \dots, t - 1$, входит в ДНФ ΣM одной из них, но не входит в ДНФ ΣM другой. При этом, очевидно, $S_{k-2}(\mathcal{N}_k, f') = S_{k-2}(\mathcal{N}_k, f'')$ и, следовательно, искомая ЭК K соответствует ребру \mathcal{N}_k .

Для завершения доказательства возьмем в качестве f цепную ФАЛ длины $2n - 2$, у которой множество N_f состоит из всех наборов $\alpha_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$, где $i \in [1, n]$,

и наборов $\alpha_{n+i} = \bar{\alpha}_i$, $i \in [1, n]$, а ребро с номером j , $j \in [1, 2n - 2]$, имеет вид $N_j = \{\alpha_j, \alpha_{j+1}\}$ (см. рис. 6.2) и применим к ней описанные выше построения.

Теорема доказана. \square

Замечание 1. Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения в ДНФ ΣT (сравните с теоремой 5.1).

Замечание 2. Известно [], что при $n \geq 12$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины t , $t \geq 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$ (см. доказательство).

§7 Функция покрытия и построение всех тупиковых ДНФ. Оценка длины градиентного покрытия

Напомним, что с «геометрической» точки зрения, сокращенная ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ представляет собой покрытие множества N_f всеми максимальными гранями, а тупиковая ДНФ соответствует строго приведенному подпокрытию, выделяемому из этого покрытия. Рассмотрим сначала метод выделения из заданного покрытия конечного множества всех его строго приведенных подпокрытий, основанный на построении сокращенной ДНФ для специальной монотонной ФАЛ, связанной с исходным покрытием.

Пусть $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ — конечное множество, а $\mathfrak{N} = (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_p)$ — система его подмножеств, образующих покрытие множества \mathcal{N} . Сопоставим паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ матрицу M , $M \in B^{p,s}$, для которой $M \langle i, j \rangle = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_i \ni \alpha_j$. Заметим, что матрица M не имеет нулевых столбцов, так как система \mathfrak{N} образует покрытие множества \mathcal{N} . Будем считать, что i -я строка (j -й столбец) матрицы M связана с подмножеством \mathcal{N}_i системы \mathfrak{N} (элементом α_j множества \mathcal{N}) и не будем делать между ними существенных различий. Так, будем говорить, что i -я строка матрицы M *покрывает* ее j -й столбец, если $M \langle i, j \rangle = 1$, то есть $\mathcal{N}_i \ni \alpha_j$, и что система строк с номерами из I , $I \subseteq [1, p]$, образует *покрытие матрицы M* , если каждый ее столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I , то есть система подмножеств $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in I}$ задает покрытие множества \mathcal{N} . Покрытие матрицы M , в котором ни одна строка не покрывает все столбцы, покрываемые другой строкой, считается *приведенным*, покрытие не имеющее собственных подпокрытий, называется *строго приведенным* и т.п. Заметим, что задача выделения всех строго приведенных подпокрытий из покрытия \mathfrak{N} множества \mathcal{N} эквивалентна задаче построения всех строго приведенных покрытий матрицы M , соответствующей паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$.

Пусть $M, M \in B^{p,s}$ — матрица без нулевых столбцов. Сопоставим i -й строке, $i \in [1, p]$, матрицы M БП y_i , а каждому набору β , $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1, \dots, y_p)$ — множество строк матрицы M с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1, p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta \langle i \rangle = 1$. Рассмотрим ФАЛ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы M с номерами из $I(\beta)$ образует ее покрытие, и будем называть эту ФАЛ *функцией покрытия* матрицы M . Заметим, что ФАЛ покрытия $F(y)$ является монотонной ФАЛ, а ее «нижние единицы» соответствуют строго приведенным покрытиям матрицы M . Действительно, из неравенства $\beta' \leq \beta''$ вытекает, что $I(\beta') \subseteq I(\beta'')$ и потому $F(\beta') \leq F(\beta'')$, то есть ФАЛ F является монотонной. Из определений следует также, что набор β , $\beta \in B^p$, являющийся «нижней единицей» ФАЛ F , соответствует множеству $I(\beta)$, которое задает строго приведенное покрытие матрицы M , и обратно. Таким образом, в силу леммы 6.1 каждая простая импликанта вида $K = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, ФАЛ покрытия $F(y)$ соответствует строго приведенному покрытию матрицы M , состоящему из строк с номерами из множества $I = \{i_1, \dots, i_r\}$, и обратно.

Лемма 7.1. *Функция покрытия $F(y_1, \dots, y_p)$ матрицы M , $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:*

$$F(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^s \left(\bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M \langle i, j \rangle = 1}} y_i \right). \quad (7.1)$$

Доказательство. Для каждого j , $j \in [1, s]$, положим

$$J_j(y) = \bigvee_{\substack{1 \leq i \leq p \\ M \langle i, j \rangle = 1}} y_i,$$

где набор $y = (y_1, \dots, y_p)$. Легко видеть, что $J_j(\beta) = 1$ для произвольного набора β , $\beta \in B^p$, тогда и только тогда, когда множество строк с номерами из $I(\beta)$ покрывает j -й столбец матрицы M , $j \in [1, s]$. Отсюда следует, что КНФ в правой части (7.1) обращается в 1 на наборе β тогда и только тогда, когда указанное выше множество строк образует покрытие матрицы M , то есть тогда и только тогда, когда $F(\beta) = 1$.

Лемма доказана. □

Следствие. *В результате раскрытия скобок, сокращения подобных и сокращения всех поглощаемых ЭК из КНФ (7.1) можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют строго приведенным покрытиям матрицы M .*

Задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ на основе ее сокращенной ДНФ сводится к рассмотренной выше задаче о покрытии, если в качестве множества \mathcal{N} взять множество N_f , а в качестве его покрытия \mathfrak{N} — систему всех максимальных граней ФАЛ f . Матрица M , соответствующая указанной паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, называется, обычно, *таблицей Квайна* ФАЛ f . Заметим, что по таблице Квайна можно построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ ΣT рассматриваемой ФАЛ.

Рассмотрим, для примера, задачу построения всех тупиковых ДНФ для ФАЛ $g(x_1, x_2, x_3) = s_3^{\{1,2\}}$ из ее сокращенной ДНФ, полагая (см. рис. 2.1, (4.5), (5.1) и (5.2)), что

$$N_g = \{\alpha_1 = (100), \alpha_2 = (110), \alpha_3 = (010), \alpha_4 = (011), \alpha_5 = (001), \alpha_6 = (101)\},$$

$$\mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_6\},$$

где $\mathcal{N}_i = N_{K_i} = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ для всех i , $i \in [1, 6]$, причем $\alpha_7 = \alpha_1 = (100)$. Паре (N_g, \mathfrak{N}) указанным выше способом сопоставим таблицу Квайна

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ФАЛ покрытия которой в соответствии с (7.1) задается следующей КНФ от переменных $y = (y_1, \dots, y_6)$:

$$F(y) = (y_6 \vee y_1) \cdot (y_1 \vee y_2) \cdot (y_2 \vee y_3) \cdot (y_3 \vee y_4) \cdot (y_4 \vee y_5) \cdot (y_5 \vee y_6).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки и сокращая подобные, получим сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$ вида

$$F(y_1, \dots, y_6) = y_1 y_3 y_5 \vee y_2 y_4 y_6 \vee y_1 y_2 y_4 y_5 \vee y_2 y_3 y_5 y_6 \vee y_1 y_3 y_4 y_6,$$

слагаемые которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым ДНФ ФАЛ g (см. (5.1), (5.2)).

В общем случае при построении всех тупиковых ДНФ ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, с помощью леммы 7.1 на основе ее сокращенной ДНФ используют, обычно, следующую модификацию рассмотренного выше подхода, которая позволяет уменьшать размеры матрицы M . Пусть N_{K_1}, \dots, N_{K_q} — все максимальные грани ФАЛ f , причем грани $N_{K_{p+1}}, \dots, N_{K_t}$, где $1 \leq p \leq t \leq q$, являются ядровыми, а грани $N_{K_{t+1}}, \dots, N_{K_q}$ — регулярными гранями ФАЛ f . Положим

$$\widehat{\mathcal{N}} = \bigcup_{i=p+1}^t N_{K_i}, \quad \mathcal{N} = N_f \setminus \widehat{\mathcal{N}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_p\},$$

где $\mathcal{N}_i = N_{K_i} \setminus \widehat{\mathcal{N}}$ при всех i , $i \in [1, p]$. При этом задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f эквивалентна задаче выделения всех строго приведенных подпокрытий из покрытия \mathfrak{N} множества \mathcal{N} . Действительно, если система подмножеств $\mathcal{N}_{i_1}, \dots, \mathcal{N}_{i_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, является строго приведенным покрытием множества \mathcal{N} , то система максимальных граней $N_{K_{i_1}}, \dots, N_{K_{i_r}}, N_{K_{p+1}}, \dots, N_{K_t}$ задает строго приведенное покрытие множества N_f , то есть соответствует тупиковой ДНФ ФАЛ f , и наоборот.

Так, применяя указанную модификацию к ФАЛ g' из $P_2(4)$, показанной на рис. 4.1 (см. также (4.7) и (5.3)), получим тривиальную задачу о покрытии множества $\mathcal{N} = \{(1000)\}$ двумя совпадающими с ним подмножествами $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}'_3 \setminus \widehat{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}'_4 \setminus \widehat{\mathcal{N}}$, где $\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{N}'_5 \cup \mathcal{N}'_6 \cup \mathcal{N}'_7$.

Выделение всех строго приведенных подпокрытий из заданного покрытия и, в частности, построения всех тупиковых ДНФ является трудоемкой задачей. В связи с этим вместо того, чтобы строить все тупиковые ДНФ и выбирать среди них, например, кратчайшую, часто используют эвристические алгоритмы, позволяющие получать не очень «длинные» ДНФ. К числу таких алгоритмов относится и градиентный алгоритм, ориентированный на выделение из заданного покрытия достаточно «коротких» подпокрытий или, иначе, на построение достаточно «коротких» покрытий для заданной матрицы. На каждом шаге градиентного алгоритма в матрице выбирается и включается в покрытие такая строка, которая покрывает наибольшее число еще не покрытых столбцов (если таких строк несколько, из них выбирается строка с наименьшим номером). Алгоритм заканчивает свою работу после того шага, на котором получилось покрытие.

Следующее утверждение дает верхнюю оценку длины покрытия, получаемого с помощью градиентного алгоритма для матриц с заданной «густотой».

Теорема 7.1 (□). Пусть для действительного γ , $0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M , получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем $m^1 \left[\frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right] + \frac{1}{\gamma}$.

Доказательство. Пусть для построения покрытия матрицы M с помощью градиентного алгоритма потребовалось сделать q шагов, причем на шаге с номером t , $t \in [1, q]$, была выбрана строка с номером i_t . Для каждого t , $t \in [1, q]$, рассмотрим матрицу M_t , которая получается из матрицы M в результате удаления строк с номерами $\{i_1, \dots, i_t\}$, а также покрываемых ими столбцов и которая принадлежит множеству B^{p_t, s_t} , где $p_t = p - t$ и $s_t = s \cdot \delta_t$, $0 \leq \delta_t \leq 1$. Для определенности будем считать, что $M_0 = M$, $p_0 = p$, $s_0 = s$, $\delta_0 = 1$ и $p_q = p - q$, $s_q = \delta_q = 0$. Заметим, что при любом

¹Полагаем, что $\ln^+ x = \ln x$, если $x \geq 1$, и $\ln^+ x = 0$, если $0 < x < 1$.

$t, t \in [0, q]$, справедливо неравенство

$$q \leq t + \delta_t \cdot s, \quad (7.2)$$

так как после выполнения первых t шагов алгоритма остаются не покрытыми $\delta_t \cdot s$ столбцов матрицы M , а на каждом следующем шаге покрывается не менее одного столбца.

Заметим, далее, что в каждом столбце матрицы $M_t, t \in [0, q]$, имеется не менее, чем $\gamma \cdot p$, единиц и поэтому общее число единиц в матрице M_t не меньше, чем $\gamma p s \delta_t$, а значит среднее число единиц в ее строках не меньше, чем $\gamma s \delta_t$. Отсюда вытекает, что строка матрицы M с номером i_{t+1} , которая выбирается на $(t+1)$ -м шаге алгоритма и является строкой матрицы M_t с наибольшим числом единиц, содержит не меньше, чем $\gamma s \delta_t$, единиц, то есть покрывает не меньше, чем $\gamma s \delta_t$, еще не покрытых столбцов матрицы M . Таким образом, для любого $t, t \in [0, q]$, выполняются соотношения

$$s \delta_{t+1} = s_{t+1} \leq s_t - \gamma s \delta_t = s \delta_t (1 - \gamma)$$

из которых, с учетом $\delta_0 = 1$, следует, что

$$\delta_t \leq (1 - \gamma)^t \leq e^{-\gamma t} \quad (7.3)$$

при любом $t, t \in [0, q]$.

Выбирая значение параметра t так, что

$$t = \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil,$$

подставляя его в (7.2) и учитывая (7.3), получим

$$q \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + s \cdot e^{-\ln^+(\gamma s)} \leq \left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^+(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}.$$

Теорема доказана. □

В качестве примера применения градиентного алгоритма рассмотрим задачу о «протыкании» граней куба его точками.

Лемма 7.2 (□). *При любых натуральных n и $m, m \leq n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, через наборы которого проходят все грани ранга m .*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{N}, |\mathcal{N}| = \binom{n}{m} \cdot 2^m$, состоящее из всех граней ранга m куба B^n , а также систему $\mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_\alpha\}_{\alpha \in B^n}$ его подмножеств, где \mathcal{N}_α — множество тех граней из \mathcal{N} , которые проходят через точку α . Очевидно, что каждая

грань из \mathcal{N} содержится в тех 2^{n-m} подмножествах \mathcal{N}_α , для которых точка α принадлежит этой грани. Следовательно, матрица M , связанная с парой $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, состоит из $p = 2^n$ строк и $s = \binom{n}{m} \cdot 2^m$ столбцов, в каждом из которых имеется $p \cdot \gamma$, где $\gamma = 2^{-m}$, единиц. Искомое множество наборов получается в результате применения к матрице M теоремы 7.1 и построения покрытия длины q , где

$$q \leq \left\lceil 2^m \ln^+ \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq \left\lceil 2^m \log \left(\binom{n}{m} \right) \right\rceil + 2^m \leq 2^m (n - 1) + 2^m = n \cdot 2^m.$$

Лемма доказана. \square

§8 Алгоритмические трудности минимизации ДНФ. Оценки максимальных и типичных значений для ранга и длины ДНФ

Как уже отмечалось, ДНФ представляет собой удобную и наглядную (с «геометрической» точки зрения) форму задания ФАЛ. С другой стороны, ДНФ можно рассматривать как простейшую модель, предназначенную для структурной реализации ФАЛ (см. гл. 2). Заметим, что различные параметры ДНФ (ранг, длина и т.п.) характеризуют различные «меры» сложности указанного представления или структурной реализации. В связи с этим часто возникает необходимость построения оптимальной в том или ином смысле ДНФ для заданной ФАЛ, то есть необходимость решения соответствующей задачи *минимизации ДНФ*, которая является частным случаем задачи синтеза управляющих систем (см. гл. 3).

В общем виде задача минимизации ДНФ может быть сформулирована следующим образом. Пусть для каждой ДНФ \mathfrak{A} определена ее «сложность» $\pi(\mathfrak{A})$, $\pi(\mathfrak{A}) \geq 0$, для которой $\pi(\mathfrak{A}') \geq \pi(\mathfrak{A}'')$, если ДНФ \mathfrak{A}'' получается из ДНФ \mathfrak{A}' удалением букв или ЭК. В этом случае будем говорить, что на множестве ДНФ задан неотрицательный *функционал сложности* π , обладающий свойством монотонности. Примерами таких функционалов могут служить длина $\lambda(\mathfrak{A})$, ранг $R(\mathfrak{A})$ или «формульная» сложность $L(\mathfrak{A})$ ДНФ \mathfrak{A} , а также число вхождений БП с отрицаниями и другие параметры ДНФ. Задача минимизации ДНФ относительно функционала сложности π состоит в том, чтобы по заданной ФАЛ f построить реализующую ее ДНФ \mathfrak{A} такую, что

$$\pi(\mathfrak{A}) = \min \pi(\mathfrak{A}'),$$

где минимум берется по всем ДНФ \mathfrak{A}' , реализующим ФАЛ f . При этом ДНФ \mathfrak{A} считается *минимальной относительно функционала π* или, иначе, *π -минимальной ДНФ*, а значение $\pi(\mathfrak{A})$ называется *сложностью ФАЛ f относительно функционала π* или, иначе, *π -сложностью ФАЛ f* в классе ДНФ. В соответствии с введенными

ранее определениями λ -минимальную ДНФ, то есть ДНФ минимальную по длине, будем называть кратчайшей, а R -минимальную ДНФ, то есть ДНФ минимальную по рангу, — просто минимальной. Функцию

$$\pi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \pi(f),$$

которая характеризует максимальное значение π -сложности ФАЛ из $P_2(n)$, называют, обычно, *функцией Шеннона* для класса ДНФ относительно функционала π .

С алгоритмической точки зрения задача минимизации ДНФ является очень трудоемкой задачей. В теории сложности вычислений, где трудоемкость алгоритма определяется, обычно, числом битовых операций, необходимых для его вычисления в «худшем» случае, выделен целый класс так называемых NP-полных проблем, которые считаются алгоритмически трудными (см., например, [1]). К NP-полным проблемам относится, в частности, проблема выполнимости КНФ, которая состоит в том, чтобы по заданной КНФ выяснить равна тождественно нулю реализация ею ФАЛ или нет. Таким образом, даже построение сокращенной ДНФ из КНФ (см. §4) является алгоритмически трудной задачей.

С другой стороны, Ю.И. Журавлев [2] предложил применительно к ДНФ модель так называемых локальных или окрестностных алгоритмов, когда преобразование рассматриваемой грани однозначно определяется «состоянием» ее «окрестности» заданного порядка (см. §6). Он же (см. теорему 6.1) доказал, что при построении минимальной ДНФ для ФАЛ из $P_2(n)$, $n \geq 3$, приходится, в общем случае, рассматривать окрестности порядка $(n-3)$ для ее максимальных граней. Следовательно, задача минимизации ДНФ является трудной и с точки зрения уровня локальности используемых алгоритмов.

Из монотонности функционала π для сложности ДНФ следует, что π -минимальную ДНФ всегда можно выбрать среди тупиковых ДНФ, алгоритм построения которых описан в §7. Однако, как показывает следующее утверждение, ФАЛ могут иметь очень много различных¹ тупиковых ДНФ и даже число различных минимальных ДНФ у них может быть очень велико.

Лемма 8.1. *Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geq 4$, вида*

$$f(x_1, \dots, x_n) = s_3^{\{1,2\}}(x_1, x_2, x_3) \oplus x_4 \oplus \dots \oplus x_n$$

равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Доказательство. Пусть

$$g(x_1, x_2, x_3) = s_3^{\{1,2\}}(x_1, x_2, x_3), \quad \ell(x_4, \dots, x_n) = x_4 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1.$$

¹Все ДНФ рассматриваются с точностью до перестановки ЭК и букв в них.

Из линейной зависимости ФАЛ f от БП x_4, \dots, x_n вытекает, что (см. §6) любая простая импликанта K ФАЛ f имеет вид

$$K = K'(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4^{\beta_4} \cdots x_n^{\beta_n},$$

где либо K' — произвольная простая импликанта K_i , $i = 1, \dots, 6$, ФАЛ g (см. рис. 2.1 и (4.5)) и $\beta = (\beta_4, \dots, \beta_n) \in N_\ell$, либо $K' \in \{x_1x_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\}$ и $\beta \in \bar{N}_\ell$. Таким образом, сокращенная ДНФ ФАЛ f с «геометрической» точки зрения состоит из 2^{n-3} изолированных точек — ядровых граней размерности 0, — и 2^{n-4} циклов длины 6 (см. §6). Следовательно, любая тупиковая (минимальная) ДНФ ФАЛ f включает в себя систему из 2^{n-3} точек и одно из пяти (соответственно двух) реберных покрытий, связанных с тупиковыми (соответственно минимальными) ДНФ ФАЛ g , приведенными в (5.1)–(5.2) (соответственно (5.1)), для каждого из 2^{n-4} указанных циклов. Поэтому число тупиковых (минимальных) ДНФ ФАЛ f равно $5 \cdot 2^{n-4}$ (соответственно $2 \cdot 2^{n-4}$).

Лемма доказана. \square

Замечание 1. Поскольку длина тупиковой ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем 2^n , а число различных граней куба B^n равно 3^n , то, следовательно, число тупиковых ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем

$$2^n \binom{3^n}{2^n} \leq 2^n \cdot \frac{3^{n \cdot 2^n}}{(2^n)!} \leq 3^{n \cdot 2^n}.$$

Замечание 2. Оценку замечания 1 можно уточнить следующим образом. Установим между множеством всех ДНФ от БП $X(n)$ и кубом B^{3^n} изоморфизм, отображающий ДНФ \mathfrak{A} в набор β , для которого $\beta \langle i \rangle = 1$ тогда и только тогда, когда грань куба B^n с номером i , $i \in [1, 3^n]$, входит в покрытие, связанное с \mathfrak{A} . При этом любая тупиковая ДНФ соответствует набору с не более, чем 2^n , единицами, а две различные тупиковые ДНФ одной и той же ФАЛ — попарно не сравнимым наборам. Следовательно, число тупиковых ДНФ у одной и той же ФАЛ из $P_2(n)$ не больше ширины ЧУМ, состоящего из всех слоев куба B^{3^n} с номерами $0, 1, \dots, 2^n$, которая, в свою очередь, в силу леммы 1.1 не больше, чем $\binom{3^n}{2^n}$.

Рассмотрим, в заключение, поведение функций Шеннона для ранга и длины ДНФ, а также сравним их с «типичными», то есть характерными для почти всех ФАЛ, значениями соответствующих функционалов сложности.

Теорема 8.1. Для любого n , $n \in \mathbb{N}$, и для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, имеют место соотношения¹:

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, \quad R(n) = n \cdot 2^{n-1}, \quad (8.1)$$

$$\lambda(f) \lesssim \frac{3}{4} 2^{n-1}, \quad R(f) \lesssim \frac{3}{4} n \cdot 2^{n-1} \quad (8.2)$$

¹ Асимптотическое неравенство $a(n) \lesssim b(n)$ означает, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a(n)/b(n)) \leq 1$, или, что то же самое, $a(n) \leq b(n)(1 + \bar{o}(1))$.

Доказательство. Нижняя оценка в (8.1) достигается на линейной функции алгебры логики $\ell_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, для которой совершенная ДНФ длины 2^{n-1} от БП $X(n)$ является ее единственной ДНФ от этих БП (см. §6) и поэтому

$$\lambda(\ell_n) = 2^{n-1}, \quad R(\ell_n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Для получения требуемой в (8.1) верхней оценки возьмем произвольную ФАЛ f из $P_2(n)$ и разложим ее по БП x_1, \dots, x_{n-1} следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})} x_1^{\sigma_1} \dots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n) \quad (8.3)$$

Легко видеть, что после замены в разложении (8.3) каждой ФАЛ $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n)$ равной ей ФАЛ из множества $\{0, 1, x_n, \bar{x}_n\}$ и проведения необходимых ЭП (см. §3) мы получим ДНФ \mathfrak{A}_f длины не больше, чем 2^{n-1} , что доказывает верхние оценки в (8.1).

Рассмотрим, далее, дискретную векторную случайную величину $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{\bar{1}})$, состоящую из 2^n независимых случайных величин ξ_α , $\alpha \in B^n$, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, а также совокупность из 2^{n-1} случайных величин η_β , где $\beta \in B^{n-1}$, вида $\eta_\beta = \xi_{\beta,0} \vee \xi_{\beta,1}$, которые, очевидно, являются независимыми случайными величинами, принимающими значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно. Заметим, что любая ФАЛ f из $P_2(n)$ является реализацией величины ξ , при которой $\xi_\alpha = f(\alpha)$ для любого α , $\alpha \in B^n$, и что вероятность такой реализации равна 2^{-2^n} . Отсюда следует, что для любого множества Q , $Q \subseteq P_2(n)$, отношение $|Q|/2^{2^n}$, то есть доля тех ФАЛ f из $P_2(n)$, которые принадлежат Q , равна вероятности того, что реализация случайной величины ξ принадлежит Q . В частности, вероятность того, что случайная величина

$$\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \eta_\beta$$

принимает значение из отрезка I , $I \subseteq [0, 2^n]$, равна доле тех функций алгебры логики f из $P_2(n)$, для которых $\lambda(\mathfrak{A}_f) \in I$. Действительно, при указанной выше интерпретации $\eta_\beta = f(\beta, 0) \vee f(\beta, 1)$ и, следовательно, $\eta_\beta = 1$ тогда и только тогда, когда ФАЛ вида $x_1^{\beta_1} \dots x_{n-1}^{\beta_{n-1}} f(\beta, 1)$ из (8.3) не равна тождественно 0, то есть входит в ДНФ \mathfrak{A}_f в виде отдельной ЭК.

Из независимости случайных величин η_β , $\beta \in B^{n-1}$, вытекает (см., например, []), что

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \mathbb{E}\eta_\beta, \quad \mathbb{D}\eta = \sum_{\beta \in B^{n-1}} \mathbb{D}\eta_\beta,$$

где $\mathbb{E}\theta$ и $\mathbb{D}\theta$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины θ соответственно. Следовательно

$$\mathbb{E}\eta = \frac{3}{4}2^{n-1}, \quad \mathbb{D}\eta = \frac{3}{16}2^{n-1}, \quad (8.4)$$

так как $\mathbb{E}\eta_\beta = \frac{1}{4}$ и $\mathbb{D}\eta_\beta = \frac{3}{16}$ при любом β , $\beta \in B^{n-1}$. Полагая

$$t = \lceil n \cdot 2^{\frac{n}{2}} \rceil, \quad I = \left(\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} - t, \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} + t \right)$$

и применяя к случайной величине η с учетом (8.4) неравенство Чебышева [], получим, что вероятность события $\eta \notin I$, то есть доля тех ФАЛ f из $P_2(n)$, для которых $\lambda(\mathfrak{A}_f) \notin I$, не больше, чем

$$\frac{\mathbb{D}\eta}{t^2} \leq \frac{3}{32n^2}$$

и, следовательно, стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности. Это означает, в частности, что для почти всех ФАЛ f из $P_2(n)$, выполнено соотношение (8.2).

Теорема доказана. \square

§9 Задача контроля схем и тесты для таблиц.

Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель (см. []), в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности и контроля. Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) И, под действием которого рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$, и источнику неисправностей И соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, \dots, \Sigma_s$, где схема Σ_i , $i = 2, \dots, s$, реализует функцию f_i от переменных x . При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, \dots, \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ , будем иметь в виду пару $(\Sigma, И)$ и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевыми, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть $(\Sigma, И)$ — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ в которых реализуются функцией алгебры логики

$f = f_1, f_2, \dots, f_s$ от булевых переменных $X(n)$ соответственно, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу M , $M \in B^{p \times s}$, где

$$M \langle i, j \rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что i -й строке (j -му столбцу) этой таблицы соответствует набор α_i (соответственно функция f_j и состояние Σ_j). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется *отделимой по столбцам* (соответственно *строкам*) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели (Σ, \mathcal{I}) соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу \widehat{M} , состоящую из всех различных столбцов матрицы M . При этом будем считать, что каждый столбец матрицы \widehat{M} связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели (Σ, \mathcal{I}) и будем называть \widehat{M} *таблицей контроля* данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели (Σ, \mathcal{I}) попарно отличимы, то есть, $M = \widehat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля M модели (Σ, M) задана цель контроля, то есть указано множество \mathcal{N} , состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если \mathcal{N} состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $\mathcal{N} = \{(1, 2), \dots, (1, t)\}$, то — *проверка исправности схемы*. Множество строк матрицы M с номерами из T , $T \subseteq [1, p]$, называется *тестом для матрицы M относительно множества \mathcal{N}* , или, иначе, *тестом для (M, \mathcal{N})* , если для любой пары (i, j) из \mathcal{N} существует t , $t \in T$, такое, что $M \langle t, i \rangle \neq M \langle t, j \rangle$. Мощность теста называется также его *длиной*.

Заметим, что множество всех строк таблицы контроля всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагностическим* (соответственно *проверяющим*). Будем говорить, что множество наборов θ , $\theta \in A$, образует *тест для модели (Σ, \mathcal{I}) относительно цели контроля \mathcal{N}* или, иначе, *тест для $(\Sigma, \mathcal{I}, \mathcal{N})$* , если соответствующие наборам из θ строки матрицы M образуют тест для (M, \mathcal{N}) . Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем.

Для отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{p \times s}$, и цели контроля \mathcal{N} определим булеву функцию теста $f(y_1, \dots, y_p)$ следующим образом: $f(\beta_1, \dots, \beta_p) = 1$ тогда и только тогда, когда строки матрицы M с номерами из множества T , состоящего из тех чисел t , $t \in [1, p]$, для которых $\beta_t = 1$, образуют тест для (M, \mathcal{N}) . Сопоставим

паре (M, \mathcal{N}) матрицу \mathcal{M} из множества $B^{p,s}$, $s = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы парами из \mathcal{N} , а ее столбец с номером $(i, j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами i и j матрицы M . Заметим, что строки матрицы M с номерами из множества T , $T \subseteq [1, p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары (M, \mathcal{N}) тогда и только тогда, когда строки матрицы \mathcal{M} с номерами из T образуют покрытие (строго приведенное покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы \mathcal{M} . Отсюда вытекает, в частности, что ФАЛ теста F для пары (M, \mathcal{N}) является, одновременно, ФАЛ покрытия для матрицы \mathcal{M} и для нее в силу леммы 7.1 справедливо следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Функция теста $f(y_1, \dots, y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы M , $M \in B^{p,s}$, и цели контроля \mathcal{N} может быть задана с помощью КНФ*

$$f(y_1, \dots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{N}} \left(\bigvee_{\substack{1 \leq t \leq p \\ M(t,i) \neq M(t,j)}} y_t \right), \quad (9.1)$$

Следствие. *Каждая элементарная конъюнкция вида y_{t_1}, \dots, y_{t_r} сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \dots, y_p)$, получающаяся из КНФ (9.1) в результате раскрытия скобок, сокращения подобных и сокращения всех поглощаемых ЭК (см. §4), соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля \mathcal{N} :

1. выписываем для функции теста КНФ вида (9.1);
2. раскрывая в ней скобки, сокращая подобные и сокращая все поглощаемые ЭК (см. §4), получаем сокращенную ДНФ функции теста;
3. сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Так, например, для построения всех тупиковых диагностических тестов матрицы M вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выпишем соответствующую ей КНФ (9.1):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \cdot (y_2 \vee y_4) \cdot (y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки, сокращая подобные и сокращая все поглощаемые ЭК, получим сокращенную ДНФ для функции теста:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2 \vee y_1y_4 \vee y_2y_3 \vee y_2y_4 \vee y_3y_4.$$

Следовательно, тупиковыми диагностическими тестами матрицы M являются множества ее строк с номерами

$$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Для упрощения преобразований, связанных с применением описанного алгоритма, вместо исходной матрицы M можно рассматривать отделимую по строкам матрицу \widehat{M} , получающуюся из M удалением повторных вхождений одинаковых строк. При этом, очевидно, любой тест матрицы M получается из некоторого теста той же длины матрицы \widehat{M} в результате замены совпадающих строк M и обратно.

Рассмотрим, далее, некоторые оценки длины диагностических тестов для матриц с заданным числом столбцов.

Лемма 9.2. *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества $B^{p,s}$ заключена в пределах от $\lceil \log s \rceil$ до $(s - 1)$.*

Доказательство. Пусть $M \in B^{p,s}$ и пусть, для определенности, первые t строк матрицы \widehat{M} образуют ее тупиковый диагностический тест. Очевидно, что в этом случае все столбцы матрицы M , состоящей из первых t строк матрицы M , различны и, следовательно, $s \leq 2^t$, то есть $t \geq \lceil \log s \rceil$, поскольку число различных булевых столбцов высоты t равно 2^t . Требуемая нижняя оценка длины диагностического теста установлена.

Докажем теперь, что $t \leq (s - 1)$. Для этого на множестве столбцов матрицы \widehat{M} при любом q , $q \in [1, t]$, определим отношение эквивалентности \sim_q так, что $m' \sim_q m''$ тогда и только тогда, когда столбцы m' и m'' матрицы \widehat{M} совпадают в строках с номерами из отрезка $[1, q]$. Будем считать, по определению, что \sim_0 — тривиальное отношение с одним классом эквивалентности, а число классов эквивалентности по отношению \sim_q , где $q \in [1, t]$, будем обозначать через $\theta(q)$. Из общих свойств отношений эквивалентности (см. §1) в силу тупиковости и диагностичности рассматриваемого теста следует, что

$$1 = \theta(0) < \theta(1) < \dots < \theta(t) = s,$$

то есть $t \leq (s - 1)$.

Лемма доказана. \square

Замечание. Указанные в лемме границы достигаются: нижняя — на любой отделимой по столбцам матрице из $B^{p,s}$, где $p = \lceil \log s \rceil$; верхняя — на матрице из $B^{s-1,s}$, все столбцы которой различны и содержат не более одной единицы (обе матрицы имеют единственный диагностический тест, состоящий из всех строк).

Следующее утверждение характеризует «типичное» значение длины диагностического теста, то есть длину минимального диагностического теста у «почти всех» таблиц контроля.

Лемма 9.3. Пусть $\varphi(s)$, $t(s)$ и $p(s)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента s , для которых

$$t(s) = \lceil 2 \log s \rceil + \varphi(s), \quad p(s) \geq t(s), \quad \varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty.$$

Тогда у почти всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p(s),s}$ первые $t(s)$ строк образуют диагностический тест.

Доказательство. Заметим, что все матрицы из $B^{p,s}$, где $p = p(s)$, у которых первые $t = t(s)$ строк образуют диагностический тест, отделимы по столбцам. Легко видеть также, что число таких матриц равно

$$2^t (2^t - 1) \cdots (2^t - s + 1) \cdot 2^{(p-t)s} = 2^{ps} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right),$$

а их доля среди всех отделимых по столбцам матриц из $B^{p,s}$ не меньше, чем

$$\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \cdots \left(1 - \frac{(s-1)}{2^t}\right) \geq 1 - 2^{-2\varphi(s)},$$

и, следовательно, стремиться к 1 при s стремящемся к бесконечности.

Лемма доказана. □

Глава 2

Основные классы дискретных управляющих систем. Оценка числа схем, их эквивалентные преобразования и структурное моделирование

§1 Некоторые понятия и факты из теории графов и сетей, связанные со структурной реализацией дискретных функций

Структурная реализация дискретных функций связана с их вычислениями, представлениями или реализациями с помощью тех или иных графов. Пару (V, E) , где E — сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из V , будем, как обычно, называть *графом с множеством вершин* $V = V(G)$ и *множеством ребер* $E = E(G)$. При этом длина сочетания E считается числом ребер графа G и обозначается через $|E|$. Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами* или, иначе *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами* (*дугами*), дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных) ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом G' считается *подграфом графа* G , *натянутым на множество вершин* V' , если E' включает в себя все входящие в E пары вершин из V' .

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро вида (u, v) (соответственно $\{u, v\}$) *инцидентно* вершинам u, v , и что дуга (u, v) *исходит* или, иначе, *выходит* (*заходит* или, иначе, *входит*) из вершины u (соответственно в вершину v). Число ребер, инцидентных вершине v (входящих в v , выходящих из v) в графе G , называется *степенью* (соответственно *полустепенью захода*, *полустепенью исхода*) вершины v в графе G и обозначается через $d_G(v)$ (соответственно $d_G^+(v)$, $d_G^-(v)$). Заметим, что

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|, \quad (1.1)$$

и что $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$ в случае ориентированного графа. Вершина v называется *изолированной вершиной* (*стоком*, *истоком*) графа G , если $d_G(v) = 0$ (соответственно $d_G^-(v) = 0$, $d_G^+(v) = 0$).

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность C вида e_1, e_2, \dots, e_n , где ребра $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ при всех i , $i \in [1, n]$, называется $(v_1 \rightarrow v_{n+1})$ -*путем* графа G . При этом вершина v_1 (v_{n+1}) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, а число n — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи) C совпадают, то C считается *замкнутым путем* (*циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Вершина u графа G называется *достижимой* (*k-достижимой*) *из вершины* v , $v \in V(G)$, если $u = v$, или в G существует цепь (соответственно цепь длины не более k) с начальной вершиной u и конечной вершиной v . Заметим, что отношение достижимости вершин графа G является рефлексивным и транзитивным, а если G — неориентированный граф, то и симметричным. Следовательно, множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе \widehat{G} , который получается из графа G заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ($G = \widehat{G}$, если G — неориентированный граф). При этом подграф графа G , натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа G , а множество всех его связных компонент обозначается через $c(G)$. Известно (см., например, [1], §1), что

$$|E(G)| \geq |V(G)| - |c(G)|. \quad (1.2)$$

Граф G называется *связным*, если $|c(G)| = 1$.

Для произвольных выборок $V' = (v'_1, \dots, v'_p)$ и $V'' = (v''_1, \dots, v''_q)$ из множества $V(G)$ графа G определим *матрицу достижимости выборки* V'' *из выборки* V' как

матрицу M , $M \in B^{p,q}$, для которой

$$M \langle i, j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j'' \text{ достижима из } v_i', \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогичным образом для всех k , $k = 1, 2, \dots$, определяется матрица $M^{(k)}$ — матрица k -достижимости выборки V'' из выборки V' . Очевидно, что при этом выполняется матричное «поэлементное» неравенство

$$M^{(k+1)} \geq M^{(k)}$$

для всех k , $k = 1, 2, \dots$ и, следовательно, $M = M^{(k_0)}$ для некоторого k_0 , не превосходящего максимальной длины простой цепи графа G . Заметим, что в случае $V' = V''$ матрица M является рефлексивной и транзитивной (см. §1 главы 1), а если, кроме того, G — неориентированный граф, то и симметричной матрицей. Заметим также, что в случае, когда $V' = V''$ — некоторая перестановка вершин графа G , для любого k , $k = 1, 2, \dots$ имеет место (см. [1, §1]) равенство

$$(M^{(1)})^k = M^{(k)}. \quad (1.3)$$

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе G всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины v можно определить ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину $(u \rightarrow v)$ - (соответственно $(v \rightarrow u)$ -) путей графа G , где u — один из истоков (соответственно, стоков) G .

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева G , как известно (см., например [1]), имеет место равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \quad (1.4)$$

Дерево D называется *остовным поддеревом* связного неориентированного графа G , если D — подграф G и $V(D) = V(G)$. Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*. Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частности, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит

(см. [1], §1). Ориентированный граф G называется *упорядоченным*, если для любой его вершины v , $v \in V(G)$, все ребра, входящие в v , упорядочены и пронумерованы числами $1, 2, \dots, d_G^+(v)$. Заметим, что на множество цепей, соединяющих листья ориентированного упорядоченного дерева с его корнем, можно ввести отношение линейного порядка τ так, что $C'\tau C''$ тогда и только тогда, когда $k' < k''$, где k' и k'' — номера дуг, по которым цепи C' и C'' соответственно входят в свою первую общую вершину. Этот порядок порождает естественную упорядоченность листьев ориентированного упорядоченного корневого дерева. Графы $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$ называются *изоморфными*, если существуют такие взаимнооднозначные отображения $\varphi : V' \rightarrow V''$ и $\psi : E' \rightarrow E''$, при которых вершины и неориентированные ребра (дуги) G' переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги) G'' с сохранением отношения инцидентности (соответственно, исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для (конечного) множества графов \mathcal{G} через $|\mathcal{G}|$ будем обозначать число попарно неизоморфных графов в \mathcal{G} . Известно (см., например, [1], §2), что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leq 4^q, \quad (1.5)$$

где $\mathfrak{D}(q)$ — множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем q ребрами.

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G — граф, а V' и V'' — выборки из множества $V(G)$ длины q' и q'' соответственно, называется (q', q'') -сетью. При этом выборка V' (выборка V'') считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее i -я вершина называется i -м *входным* (соответственно *выходным*) *полюсом* или, иначе, i -м *входом* (соответственно *выходом*) сети \mathcal{G} . Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не имеют общих вершин), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделенными*) *полюсами*. При этом в случае неразделенных полюсов сеть $\mathcal{G} = (G; V; V)$ будем записывать в виде $\mathcal{G} = (G; V)$. Сеть считается *бесповторной по входам* (*выходам, полюсам*), если ее входная (соответственно выходная, полюсная) выборка является выборкой без повторений. Как правило, входы и выходы (полюса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Пусть \mathcal{G}' и \mathcal{G}'' — (p', q') - и (p'', q'') -сети соответственно, где $q'' = p'$, и пусть V'' — входная выборка \mathcal{G}'' , а V' — выходная выборка \mathcal{G}' . Сеть \mathcal{G} с входной выборкой V'' и выходной выборкой V' , которая получается в результате отождествления (присоединения) i -го выхода \mathcal{G}'' к i -му входу \mathcal{G}' для всех i , $i = 1, \dots, q''$, называется *результатом суперпозиции сетей \mathcal{G}' , \mathcal{G}''* и обозначается через $\mathcal{G} = \mathcal{G}'(\mathcal{G}'')$. Заметим, что при этом

$$M \geq M' \cdot M'', \quad (1.6)$$

где M , M' и M'' — матрица достижимости выходной выборки сети \mathcal{G} , \mathcal{G}' и \mathcal{G}'' соответственно из ее входной выборки. Заметим также, что неравенство (1.6) переходит

в равенство

$$M = M' \cdot M'', \tag{1.7}$$

если сеть \mathcal{G}'' неповторна по выходам, а сеть \mathcal{G}' – по входам, и между любыми двумя различными входами \mathcal{G}' или между любыми двумя различными выходами \mathcal{G}'' отсутствует достижимость.

§2 Представление формул с помощью деревьев. Схемы из функциональных элементов

В §2 главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею ФАЛ. Рассмотрим способ представления формул с помощью деревьев и на его основе введем понятие схемы из функциональных элементов.

Пусть, по-прежнему, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ – счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ – базис, где ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$, зависит от k_i , $k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что \mathcal{B} – полный базис (см. §2 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом $\mathcal{B}_0 = \{\& , \vee, \neg\}$, где базисными являются ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и \bar{x}_1 .

Сопоставим каждому ФС φ_i , $i = 1, \dots, b$, функциональный элемент (ФЭ) \mathcal{E}_i , имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j -я БП x_j ФАЛ φ_i и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 2.1a). Упрощенный вариант изображения ФЭ \mathcal{E}_i в виде вершины графа с пометкой φ_i , в которую входят k_i упорядоченных, то есть пронумерованных числами $1, \dots, k$ дуг, показан на рис. 2.1b. При этом предполагается, что дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, соответствует j -му входу ФЭ \mathcal{E}_i . В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом φ_i и функциональным элементом \mathcal{E}_i .



Рис. 2.1: функциональный элемент

Множество всех формул над базисом \mathcal{B} будем обозначать через $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ и положим $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}^{\Phi} = \mathcal{U}^{\Phi}$. Индукцией по глубине каждой формуле глубины q над \mathcal{B} можно сопо-

ставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины q , каждому листу которого приписана БП из \mathcal{X} , а каждой внутренней вершине — ФС из \mathcal{B} . Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j (см. рис. 2.2a). Формуле \mathcal{F} вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}), \quad (2.1)$$

которая является формулой глубины $(q + 1)$ над \mathcal{B} , где

$$q = \max\{q_1, \dots, q_{k_i}\}, \quad (2.2)$$

а q_j , $j = 1, \dots, k_i$, — глубина главной подформулы \mathcal{F}_j формулы \mathcal{F} , сопоставим дереву \mathcal{D} глубины $(q + 1)$ с корнем v , показанное на рис. 2.2b, где \mathcal{D}_j , $j = 1, \dots, k_i$ — дерево глубины q_j с корнем v_j , которое соответствует формуле \mathcal{F}_j .

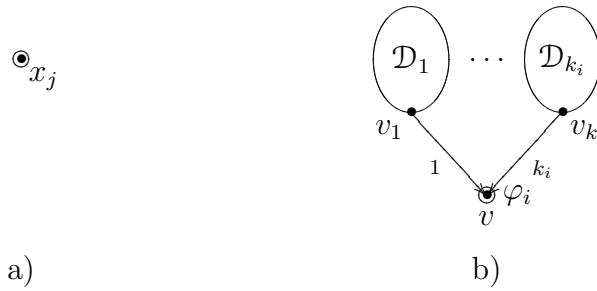


Рис. 2.2: представление функции деревом

Граф, который получается из дерева \mathcal{D} , соответствующего формуле \mathcal{F} , в результате «склеивания» листьев с одинаковыми пометками, называется *квазидеревом*, *соответствующим формуле \mathcal{F}* . Заметим, что при этом поддеревья (квазиподдеревья) дерева (соответственно квазидерева) \mathcal{D} , сопоставленного формуле \mathcal{F} , взаимнооднозначно сопоставляются ее подформулам. Заметим также, что формула по сопоставленному ей дереву или квазидереву восстанавливается однозначно. На рис. 2.3a показано дерево, а на рис. 2.3b — квазидерево, которое соответствует формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2), \quad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом \mathcal{B}_0 и реализует ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}$. Для удобства будем считать, что в $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом \mathcal{B} , что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и что ей соответствует система из деревьев или квазидеревьев с общим набором «склеенных» листьев.

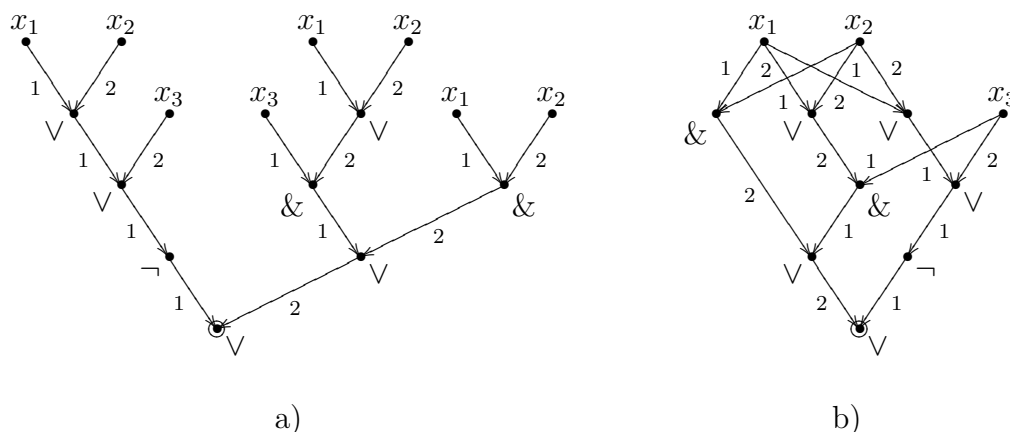


Рис. 2.3: представление $s_3^{\{0,2,3\}}$ деревом и квазидеревом

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего квазидерево, и где возможно многократное использование промежуточных результатов. По существу СФЭ получается из системы квазидеревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев (совпадающих подформул).

Пусть \mathcal{Z} — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом \mathcal{X} .

Определение. Схемой из функциональных элементов над базисом \mathcal{B} называется ориентированный ациклический упорядоченный граф Σ , вершины которого помечены следующим образом:

1. каждый исток Σ помечен некоторой БП из \mathcal{X} , причем различные истоки помечены различными БП;
2. каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i , где $k_i = d_{\Sigma}^+(v)$;
3. некоторые вершины Σ помечены выходными БП из \mathcal{Z} так, что одной и той же вершине может быть сопоставлено несколько БП из \mathcal{Z} , но разным вершинам не может быть сопоставлена одна и та же БП.

При этом входные (выходные) БП, которые приписаны каким-либо вершинам Σ , считаются *входными* (соответственно, *выходными*) БП Σ , а те вершины, которым они сопоставлены, — *входами* (соответственно, *выходами*) СФЭ Σ .

Для того, чтобы выделить множество $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ ($Z = \{z_{j_1}, \dots, z_{j_m}\}$), состоящее из всех входных (соответственно, выходных) БП СФЭ Σ , перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите \mathcal{X} (соответственно, \mathcal{Z}), будем записывать СФЭ Σ в виде $\Sigma = \Sigma(X; Z)$ или $\Sigma = \Sigma(x; z)$, где $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ и $z = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$ — наборы БП, соответствующие множествам X и Z .

Обозначим через \mathcal{U}_B^C множество всех СФЭ над базисом B , и пусть $\mathcal{U}^C = \mathcal{U}_{B_0}^C$. Заметим, что система квазидеревьев, соответствующая системе формул над базисом B , становится СФЭ над B , если корням этих квазидеревьев приписать различные выходные БП. В связи с этим формулы над B будем считать частным случаем СФЭ над B , полагая, что имеет место включение $\mathcal{U}_B^\Phi \subseteq \mathcal{U}_B^C$. Заметим, что СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, входит в \mathcal{U}_B^Φ тогда и только тогда, когда все истоки Σ , и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины Σ , отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

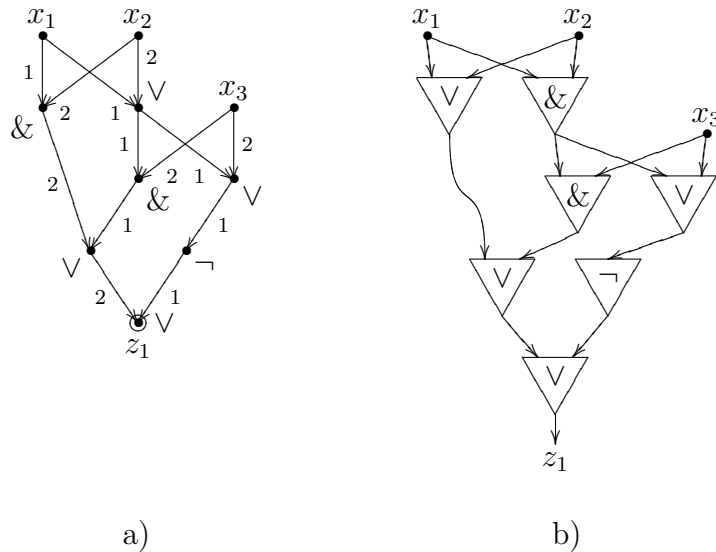


Рис. 2.4: представление $s_3^{\{0,2,3\}}$ схемой из функциональных элементов

На рис. 2.4а показан пример СФЭ над базисом B_0 с входными БП x_1, x_2, x_3 и выходной БП z_1 . Данная СФЭ получена из квазидерева, сопоставленного формуле (2.3) и приведенного на рис. 2.3б. На рис. 2.4б дано ее более «наглядное» изображение в виде сети (см. [6, с. 227–229]), построенной из соответствующих ФЭ.

Определим теперь функционирование СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ над базисом B . Сначала индукцией по q , $q = 0, 1, \dots$, определим для каждой вершины v глубины q в схеме Σ реализуемую в ней формулу $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \dots, x_n)$ глубины q над базисом B . Если $q = 0$, то есть v — вход Σ , положим $\mathcal{F}_v = x_j$, где x_j — входная БП,

сопоставленная вершине v . Пусть теперь v — вершина глубины $q + 1$, $q \geq 0$, схемы Σ , которая имеет пометку φ_i , и в которую входит k_i дуг, причем дуга с номером j , $1 \leq j \leq k_i$, исходит из вершины v_j глубины q_j . Где уже реализована формула $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$ глубины q_j , а для чисел q, q_1, \dots, q_{k_i} выполнено (2.2). Тогда в вершине v реализуется формула $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$ вида (2.1), которая имеет глубину $(q + 1)$.

При этом считается, что в вершине v СФЭ Σ реализуется ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, если ФАЛ f реализуется формулой \mathcal{F}_v , и что СФЭ Σ реализует систему ФАЛ F , $F = (f_1, \dots, f_m)$, или реализует систему булевых уравнений $z_1 = f_1, \dots, z_m = f_m$, если f_j , $j = 1, \dots, m$, — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ Σ , которой приписана БП z_j . Так, СФЭ на рис. 2.4 реализует ФАЛ $s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$, или уравнение $z_1 = s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$. Схемы, реализующие равные системы ФАЛ, называются эквивалентными. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v СФЭ Σ , которой сопоставлен ФЭ \mathcal{E}_i с симметрической ФАЛ φ_i , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование Σ . В связи с этим в подобных случаях номера дуг, входящих в вершину v , могут не указываться.

Две СФЭ Σ' и Σ'' считаются *изоморфными*, если они изоморфны как помеченные графы (см. §1). Заметим, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных СФЭ реализуются одинаковые формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные СФЭ эквивалентны.

Рассмотрим, далее, некоторые виды преобразований, позволяющих избавляться от «лишних» вершин и ребер в формулах или СФЭ, реализующих заданные ФАЛ. Вершина СФЭ называется *висячей*, если из нее не выходит ни одна дуга, и она не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим, что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам.

Пусть СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v и переноса начальной вершины всех дуг Σ , исходящих из v , а также всех выходных БП, приписанных v , в отличную от нее вершину w , которая не достижима из v . Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ операции *наложения вершины v на вершину w* . Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно наложить на другую. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию наложения одной из двух эквивалентных вершин на другую, мы получим СФЭ Σ' , которая, очевидно, эквивалентна Σ .

Схема (система формул) называется *строго приведенной*, если в ней нет висячих и эквивалентных вершин (соответственно эквивалентных вершин, лежащих на одной цепи). Из любой СФЭ (системы формул) можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ (соответственно систему формул) с помощью операции наложения эквивалентных вершин (соответственно эквивалентных вершин, принадлежащих одной цепи) и операции удаления висячих вершин.

§3 Функционалы сложности и некоторые соотношения между ними. Оценка числа формул и схем из функциональных элементов

В §2 главы 1 были определены глубина, ранг и размер формул. Обобщая эти понятия, введем для формул и СФЭ параметры, называемые обычно функционалами сложности, которые характеризуют ту или иную «меру» сложности СФЭ над базисом B . Будем считать, что каждому функциональному элементу \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, b$, сопоставлены положительные действительные числа L_i и T_i , называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность и время срабатывания \mathcal{E}_i соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1. Если (v_0, v_t) -цепь C длины t в СФЭ Σ проходит через вершины v_1, \dots, v_{t-1} , и вершине v_j , $j = 1, \dots, t$, при этом соответствует ФЭ \mathcal{E}_{i_j} базиса B , то число $T(C) = T_{i_1} + \dots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи.

По аналогии с глубиной (см. §1) определим *задержку* вершины v СФЭ Σ как максимальную задержку тех цепей Σ , которые начинаются в одной из ее входных вершин и заканчиваются в вершине v . Для каждой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, определим следующие параметры (функционалы сложности):

1. $S(\Sigma)$ ($L(\Sigma)$) — *размер* (соответственно, *сложность*) Σ , то есть число (соответственно, сумма «весов») всех ее ФЭ;
2. $D(\Sigma)$ ($T(\Sigma)$) — *глубина* (соответственно, *задержка*) Σ , то есть максимальная глубина (соответственно, задержка) ее вершин;
3. $R(\Sigma)$ — *ранг* Σ , то есть число ребер, выходящих из ее входов.

Заметим, что функционал $S(D)$ является частным случаем функционала L (соответственно, T), когда веса (соответственно, задержки) всех ФЭ базиса B равны 1. Введем также «частичную» сложность $L_{B'}(\Sigma)$ (размер $S_{B'}(\Sigma)$, глубину $D_{B'}(\Sigma)$ или задержку $T_{B'}(\Sigma)$), которая равна сумме весов ФЭ Σ типа \mathcal{E}_i , где $\mathcal{E}_i \in B'$ (соответственно, числу таких ФЭ в Σ , максимальному числу или максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида), лежащих на одной цепи Σ .

Для некоторых типов СФЭ можно рассматривать и другие функционалы сложности. Так, например, для ДНФ мы уже рассматривали их длину, то есть число ЭК, а для СФЭ с монотонной нумерацией вершин в §9 будем рассматривать — их ширину. С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах. Ранг схемы отражает число обращений программы к памяти, в которой хранятся значения входных БП, а ее ширина (см. §9) — число ячеек памяти, необходимых для хранения внутренних БП, и т. д.

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между введенными параметрами.

Лемма 3.1. *Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, справедливы соотношения*

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1, \quad R(\mathcal{F}) \leq 2^{D_{\&, \vee}(\mathcal{F})}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Сравнивая число ребер, входящих в вершины квазидерева (формулы) \mathcal{F} с числом ребер, выходящих из его вершин, получим

$$|E(\mathcal{F})| = 2L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + L_{\neg}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F}) - 1,$$

откуда следует, что

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1.$$

Второе из соотношений (3.1) легко устанавливается индукцией по $D(\mathcal{F})$.

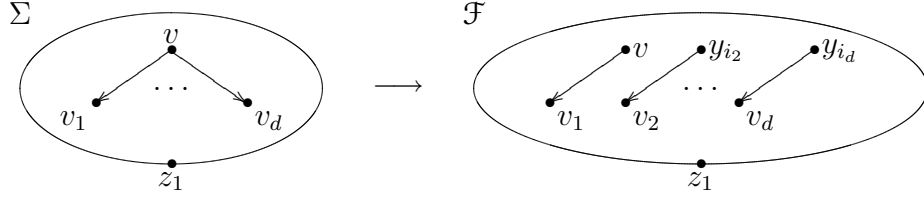
Лемма доказана. □

Формула, ранг которой равен числу встречающихся в ней БП, называется *абсолютной* формулой. Пусть Σ — приведенная СФЭ с одним выходом, а \mathcal{F} — абсолютная формула от БП $y = (y_1, \dots, y_t)$, где

$$t = |E(\Sigma)| - S(\Sigma) + 1 = R(\mathcal{F}),$$

получающаяся из Σ в результате «отсоединения» от каждой ее вершины v такой, что $d_{\Sigma}^-(v) > 1$, всех исходящих из v дуг, кроме одной, приписывания начальным вершинам отсоединенных таким образом от всех вершин Σ дуг некоторых $(t - n)$ БП из набора y и замены БП x_1, \dots, x_n оставшимися БП из y (см. рис. 3.1, где $d_{\Sigma}^-(v) = d$). Построенная таким способом формула $\mathcal{F}(y)$ называется *каркасом* схемы Σ , если БП из y приписаны листьям дерева \mathcal{F} в соответствии с их естественной упорядоченностью (см. §1).

Легко видеть, что любая формула (приведенная СФЭ с одним выходом) от БП x_1, \dots, x_n может быть получена из формулы \mathcal{F} , являющейся ее каркасом, в результате применения ряда операций наложения (см. §2) входов \mathcal{F} на входы x_1, \dots, x_n (соответственно на входы x_1, \dots, x_n и внутренние вершины \mathcal{F}).

Рис. 3.1: к определению каркаса схемы Σ

Обозначим через $\mathcal{U}_B^C(L, n)$ ($\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)$ и $\mathcal{U}_B^\Phi\langle T, n \rangle$) множество приведенных СФЭ $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n, z_1)$ (соответственно формул $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$) над базисом B , для которых $L(\Sigma) \leq L$ (соответственно $L(\mathcal{F}) \leq L$ и $T(\mathcal{F}) \leq T$), причем индекс B_0 будем, как обычно, опускать. Число попарно не эквивалентных схем в конечном множестве \mathcal{U} будем обозначать через $\|\mathcal{U}\|$. Очевидно, что $\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|$, а если \mathcal{U} — одно из введенных множеств, то

$$\|\mathcal{U}\| \leq |\tilde{\mathcal{U}}| \leq |\mathcal{U}|, \quad (3.2)$$

где $\tilde{\mathcal{U}}$ — множество всех строго приведенных схем из \mathcal{U} .

Теорема 3.1. Для любых натуральных n, L, T выполняются неравенства

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (32(L+n))^{L+1}, \quad \|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (32n)^{L+1} \quad (3.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi\langle T, n \rangle\| \leq (64n)^{2^T}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C(L, n)$, а $\check{\mathcal{F}}$ — каркас Σ . В силу леммы 3.1 формула $\check{\mathcal{F}}$ удовлетворяет соотношениям

$$R(\check{\mathcal{F}}) = L_{\&,v}(\check{\mathcal{F}}) + 1 \leq L + 1, \\ |E(\check{\mathcal{F}})| \leq 2L(\check{\mathcal{F}}) \leq 2L.$$

Напомним (см. §1), что число попарно не изоморфных корневых ориентированных (двоичных) деревьев с не более, чем $2L$, ребрами не превосходит 4^{2L} , а число способов пометки внутренних вершин такого дерева символами ФЭ из B_0 с подходящим числом входов не больше, чем 2^L . Следовательно, число попарно не изоморфных каркасов для схем $\mathcal{U}^C(L, n)$ не превосходит 32^L .

Заметим, далее, что любая формула \mathcal{F} (СФЭ Σ) из $\mathcal{U}^C(L, n)$ может быть получена в результате наложения $R(\check{\mathcal{F}}) \leq L + 1$ входов формулы $\check{\mathcal{F}}$, являющейся ее каркасом, на входы x_1, \dots, x_n (соответственно на входы x_1, \dots, x_n и внутренние вершины $\check{\mathcal{F}}$), которое можно осуществить не более, чем n^{L+1} (соответственно $(L+n)^{L+1}$) способами. Таким образом, в силу (3.2)

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq 32^L \cdot n^{L+1} \leq (32n)^{L+1}, \\ \|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq 32^L \cdot (L+n)^{L+1} \leq (32(L+n))^{L+1}$$

и неравенства (3.3) доказаны.

Пусть теперь $\mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n)$ — формула из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями (см. §3 главы 1), для которой $R(\mathcal{F}') \leq R$, и пусть формула \mathcal{F} получается из \mathcal{F}' заменой каждой ее подформулы вида \bar{x}_i , $i \in [1, n]$, формулой x_i , а $\check{\mathcal{F}}$ — каркас \mathcal{F} .

Повторяя для \mathcal{F} проведенные выше рассуждения и учитывая то, что в данном случае

$$\begin{aligned} R(\check{\mathcal{F}}) &= R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) \leq R, \\ |E(\check{\mathcal{F}})| &= 2L_{\&, \vee}(\check{\mathcal{F}}) \leq 2R(\check{\mathcal{F}}) - 2 \leq 2R, \end{aligned}$$

а также то, что число различных формул \mathcal{F}' , связанных с одной и той же формулой \mathcal{F} , не больше, чем 2^R , получим верхнюю оценку $(64n)^R$ для числа попарно не изоморфных формул \mathcal{F}' рассматриваемого вида. Эта оценка доказывает неравенство (3.4), так как из любой формулы \mathcal{F}' , $\mathcal{F}'' \in \mathcal{U}^\Phi \langle T, n \rangle$, поднятием отрицаний (см. §3 главы 1) можно получить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n)$, для которой в силу леммы 3.1

$$R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}'') \leq 2^T.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает, что число попарно не эквивалентных формул $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ над базисом B_0 , для которых $R(\mathcal{F}) \leq R$, не превосходит $(64n)^R$.

Обобщим лемму 3.1 и теорему 3.1 на случай произвольного базиса $B = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^b$. Положим $\widehat{B} = \{\mathcal{E}_i : k_i \geq 2\}$ и заметим, что множество \widehat{B} не пусто в силу полноты базиса B . Для ФЭ \mathcal{E}_i , $\mathcal{E}_i \in \widehat{B}$, определим его *приведенный вес* ρ_i и *приведенную задержку* τ_i следующим образом:

$$\rho_i = \frac{L_i}{k_i - 1}, \quad \tau_i = \frac{T_i}{\log k_i}.$$

Введем, далее, величины

$$\rho_B = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{B}} \rho_i \quad \text{и} \quad \tau_B = \min_{\mathcal{E}_i \in \widehat{B}} \tau_i,$$

которые назовем *приведенным весом* и *приведенной задержкой базиса* B соответственно. Для базиса B_0 , очевидно,

$$\widehat{B}_0 = \{\&, \vee\}, \quad \rho_{B_0} = \tau_{B_0} = 1.$$

Для функционала сложности ψ типа L, S, T, D через $\widehat{\psi}(\Sigma)$ будем обозначать величину $\psi_{\widehat{B}}(\Sigma)$.

Лемма 3.2. Для любой формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) \leq \frac{1}{\rho_{\mathbb{B}}} \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1, \quad R(\mathcal{F}) \leq 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\mathbb{B}}}}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть для каждого i , $i = 1, \dots, b$, формула \mathcal{F} содержит s_i ФЭ \mathcal{E}_i . При этом для числа ребер квазидерева \mathcal{F} будут выполняться равенства

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^b s_i \cdot k_i = R(\mathcal{F}) + \sum_{i=1}^b s_i - 1.$$

Следовательно,

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^b s_i (k_i - 1) + 1 = \sum_{k_i \geq 2} \frac{k_i - 1}{L_i} \cdot L_i s_i + 1 \leq \frac{1}{\rho_{\mathbb{B}}} \sum_{k_i \geq 2} L_i s_i + 1 = \frac{1}{\rho_{\mathbb{B}}} \widehat{L}(\mathcal{F}) + 1$$

и первое неравенство (3.5) доказано.

Второе неравенство (3.5) доказывается индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, при $D(\mathcal{F}) = 0$, когда $\mathcal{F} = x_j$ для некоторого $j \in [1, n]$, оно, очевидно, выполняется. Пусть теперь второе неравенство (3.5) верно для любой формулы глубины не больше, чем d , и пусть $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$, где $D(\mathcal{F}_j) = t_j$ при всех $j = 1, \dots, k_i$. Тогда

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_i} R(\mathcal{F}_j) \leq k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\mathbb{B}}}},$$

где $t = \max_{1 \leq j \leq k_i} t_j$. Следовательно, при $k_i = 1$ формула \mathcal{F} удовлетворяет второму неравенству (3.5), так как в этом случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t$. При $k_i \geq 2$ в соответствии с определением $\tau_{\mathbb{B}}$ выполняется неравенство

$$k_i \leq 2^{\frac{T_i}{\tau_{\mathbb{B}}}},$$

используя которое и учитывая, что в данном случае $\widehat{T}(\mathcal{F}) = t + T_i$, получим

$$R(\mathcal{F}) \leq k_i \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{\mathbb{B}}}} \leq 2^{\frac{t+T_i}{\tau_{\mathbb{B}}}} = 2^{\frac{\widehat{T}(\mathcal{F})}{\tau_{\mathbb{B}}}}.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Аналогично (3.5) доказывается, что число ребер квазидерева, соответствующего формуле \mathcal{F} , удовлетворяет неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leq \alpha_{\mathbb{B}} L(\mathcal{F}), \quad (3.6)$$

где

$$\alpha_B = \max_{1 \leq i \leq b} \frac{k_i}{L_i},$$

а если в \mathcal{F} нет трех и более последовательно соединенных одноходовых ФЭ, то, кроме того, неравенству

$$|E(\mathcal{F})| \leq 6(R(\mathcal{F}) - 1). \quad (3.7)$$

Действительно, если \mathcal{F} содержит s_i ФЭ \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, b$, то

$$|E(\mathcal{F})| = \sum_{i=1}^b k_i s_i = \sum_{i=1}^b \frac{k_i}{L_i} \cdot L_i s_i \leq \alpha_B L(\mathcal{F}).$$

Для формулы \mathcal{F} рассматриваемого вида, в которой нет трех или более последовательно соединенных одноходовых ФЭ, получим

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^b s_i (k_i - 1) + 1 \geq \widehat{S}(\mathcal{F}) + 1,$$

$$|E(\mathcal{F})| \leq 3(R(\mathcal{F}) + \widehat{S}(\mathcal{F}) - 1) \leq 3(2R(\mathcal{F}) - 2) = 6(R(\mathcal{F}) - 1).$$

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 3.1 с использованием (3.3), (3.5)–(3.7) и с учетом того, что в строго приведенной формуле или СФЭ нет трех и более последовательно соединенных одноходовых ФЭ.

Теорема 3.2. Для любых $L \geq 0$, $T \geq 0$ и любого натурального n справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_B^C(L, n)\| &\leq (c(L+n))^{\frac{1}{\rho_B} L+1}, \\ \|\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)\| &\leq (cn)^{\frac{1}{\rho_B} L+1}, \\ \|\mathcal{U}_B^\Phi(T, n)\| &\leq (cn)^{2\frac{T}{\rho_B}}, \end{aligned}$$

где c — некоторая константа, зависящая от базиса B .

§4 Контактные схемы

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §2), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой x_i (\bar{x}_i) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП x_i (см. рис. 4.1).

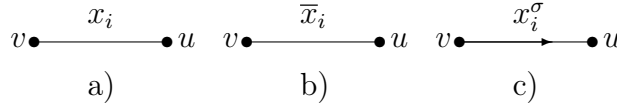


Рис. 4.1: типы контактов

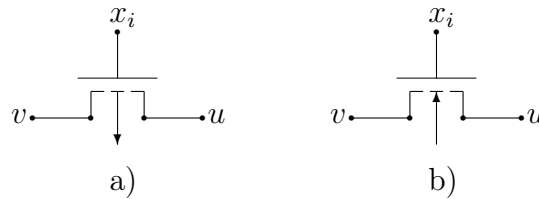


Рис. 4.2: физическая интерпретация контактов

Считается, что контакт вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

С точки зрения управления проводимостью неориентированный размыкающий (замыкающий) контакт БП x_i функционирует как p -МОП (соответственно n -МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП x_i (см. рис. 4.2а и 4.2б), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки [4]. Кроме того, ориентированный контакт вида x_i^σ , идущий из вершины v в вершину u (см. рис. 4.1с), часто рассматривают как команду условного перехода из v в u , который выполняется, если $x_i = \sigma$ (см. §9).

Сеть Σ с неразделенными полюсами a_1, \dots, a_m (входами $a'_1, \dots, a'_{m'}$ и выходами $a''_1, \dots, a''_{m''}$), в которой все ребра (дуги) помечены БП x_1, \dots, x_n или их отрицаниями $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, называется *контактной схемой* (КС) от БП x_1, \dots, x_n с полюсами a_1, \dots, a_m (соответственно входами $a'_1, \dots, a'_{m'}$ и выходами $a''_1, \dots, a''_{m''}$) и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_m)$ (соответственно $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_{m'}; a''_1, \dots, a''_{m''})$). При этом число контактов называется *сложностью* КС Σ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 4.3а–с показаны некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3 .

Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ — КС от БП $X(n)$ и пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$. Определим $\Sigma(\alpha)$ как сеть, получающуюся из Σ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α , и снятия пометок с остальных ребер Σ . Для вершин v и u КС Σ введем *функцию проводимости от вершины v к вершине u* как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$, которая равна 1 на наборе α тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma(\alpha)$ существует $(v \rightarrow u)$ -цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u . Из определения следует, что для нахождения ФАЛ

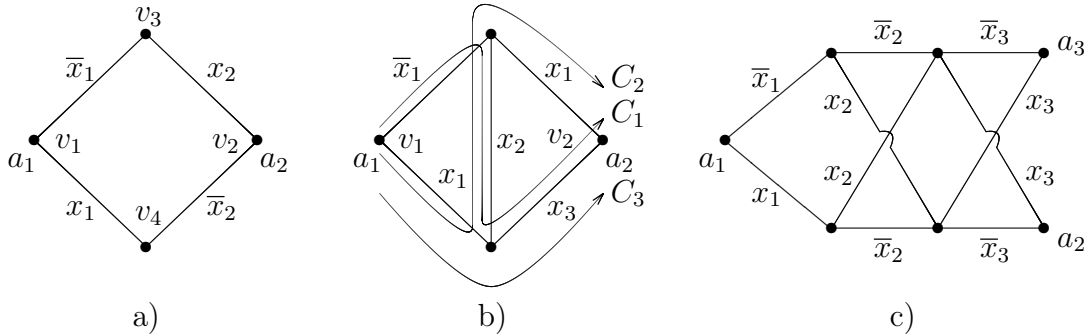


Рис. 4.3: некоторые конкретные КС от БП x_1, x_2, x_3

$g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ достаточно просмотреть все наборы α , $\alpha \in B^n$, и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в Σ цепи, состоящей из проводящих на наборе α контактов, которая идет из v в u . Так, просматривая все наборы значений БП x_1, x_2 , можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости $g_{v_1,v_2}(x_1, x_2)$ в КС Σ , показанной на рис. 4.3а, равна $x_1 \oplus x_2$, а ФАЛ проводимости g_{v_3,v_4} равна 0.

Другой способ нахождения ФАЛ проводимости заключается в следующем. Для цепи C , состоящей из последовательно соединенных контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$, ФАЛ, равную ОЭК $K(C) = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$ будем считать *функцией проводимости цепи* C . При этом цепь C называется *проводящей*, если $K(C) \neq 0$, и *нулевой* в противном случае. Легко видеть, что ОЭК $K(C)$ в случае нулевой цепи C содержит какую-либо БП вместе с ее отрицанием, а в случае проводящей цепи C может быть преобразована в ЭК в результате сокращения подобных (см. §3 главы 1). Заметим также, что из любой проводящей цепи C всегда можно выделить простую цепь C' , которая соединяет те же самые вершины и для которой $K(C') = K(C)$. Пусть теперь C_1, \dots, C_t — все простые проводящие цепи КС Σ , идущие из вершины v в вершину u . Тогда

$$g_{v,u}(x_1, \dots, x_n) = K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t). \quad (4.1)$$

Заметим, что ОДНФ (4.1) может быть преобразована в ДНФ в результате сокращения подобных (см. §3 главы 1), если $g_{v,u} \neq 0$. Так, в КС, показанной на рис. 4.3б, имеются три простые проводящие цепи C_1, C_2 и C_3 , которые идут из v_1 в v_2 . При этом

$$K(C_1) = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$g_{v_1,v_2}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1,$$

то есть ФАЛ g_{v_1,v_2} равна ФАЛ голосования $H(x_1, x_2, x_3)$.

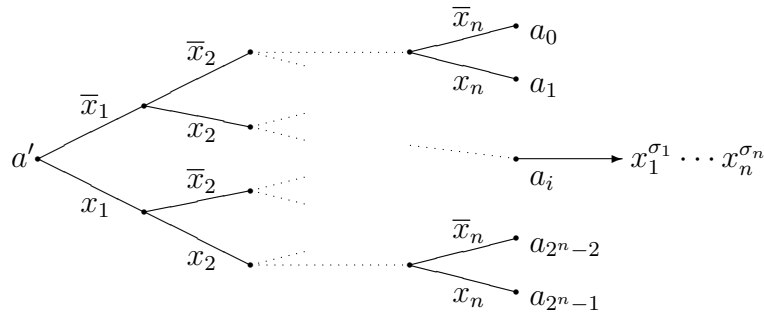


Рис. 4.4: контактное дерево

Аналогичным образом можно вычислить ФАЛ проводимости $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ в КС Σ на основе КНФ. Множество контактов S , которое отделяет вершину v от вершины u , то есть имеет хотя бы один общий контакт с любой соединяющей их простой проводящей цепью, называется (v, u) -сечением КС Σ . Для сечения S , состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$, дизъюнкцию $J(S) = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ будем называть функцией отделимости сечения S . При этом сечение S называется *единичным*, если $J(S) = 1$, и *отделимым* в противном случае. Легко видеть, что дизъюнкция $J(S)$ в случае единичного сечения S содержит какую-либо переменную вместе с ее отрицанием, а в случае отделимого сечения S может быть преобразована в ЭД устранением повторных вхождений БП или их отрицаний (см. §3 главы 1). Заметим также, что из любого отделимого сечения S всегда можно выделить тупиковое сечение S' , то есть сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечениями. Пусть теперь S_1, \dots, S_t — все отделимые тупиковые (v, u) -сечения КС Σ . Тогда ФАЛ проводимости $g_{v,u}$ задается формулой

$$g_{v,u}(x_1, \dots, x_n) = J(S_1) \& \dots \& J(S_t),$$

которая может быть преобразована в КНФ в результате замены каждой дизъюнкции $J(S_i)$ на соответствующую ЭД и устранения повторных вхождений ЭД в рассматриваемую конъюнкцию (см. §3 главы 1).

Определим функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_{m'}; a''_1, \dots, a''_{m''})$ с разделенными полюсами как матрицу $F = F(x_1, \dots, x_n)$ с m' строками, m'' столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F\langle i, j \rangle$ — ФАЛ проводимости от a'_i к a''_j , где $i \in [1, m']$ и $j \in [1, m'']$. Заметим, что при любом α , $\alpha \in B^n$, матрица $F(\alpha)$ является матрицей достижимости выходной выборки сети $\Sigma(\alpha)$ из ее входной выборки. В соответствии с §1 функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$. В этом случае матрица F является рефлексивной и транзитивной матрицей (см. §1 главы 1), а если, кроме того, Σ — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей.

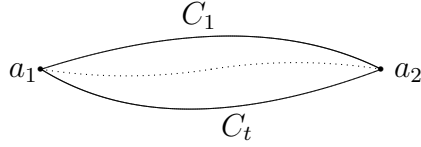


Рис. 4.5: каноническая КС

Заметим, что функционирование $(1, 1)$ -КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами, функционирование $(1, m'')$ -КС представляет собой набор (строку) из m'' ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование $(m', 1)$ -КС — столбец из m' ФАЛ проводимости от ее входов к выходу. Так, в случае, когда полюс a_1 является входом, а остальные полюса — выходами, КС, изображенные на рис. 4.3а, 4.3б и 4.3с реализуют ФАЛ $x_1 \oplus x_2$, $H(x_1, x_2, x_3)$ и набор ФАЛ $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ соответственно.

На рис. 4.4 показана $(1, 2^n)$ -КС $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; a'; a_0, \dots, a_{2^n-1})$, которая называется *контактным деревом порядка n* от БП $X(n)$. Легко видеть, что в выходной вершине a_i , $i = 0, \dots, 2^n - 1$, контактного дерева (КД) порядка n от БП $X(n)$ реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (i - 1)$, и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким образом, КД порядка n является дешифратором порядка n , то есть схемой, реализующей систему Q_n из всех ЭК ранга n от БП $X(n)$.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные матрицы из ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

Рассмотрим теперь некоторые факты, касающиеся полноты класса \mathcal{U}^K — класса КС из неориентированных контактов, то есть возможности реализации в этом классе различных ФАЛ и составленных из них матриц. Заметим сначала, что установленное выше соотношение (4.1) можно использовать для построения двухполюсной КС Σ , в которой ФАЛ проводимости между полюсами описывается заданной ДНФ вида

$$\mathfrak{A} = K_1 \vee \dots \vee K_t,$$

где K_1, \dots, K_t — различные ЭК, и которая «моделирует» ДНФ \mathfrak{A} . Указанная контактная схема Σ с полюсами a_1, a_2 получается в результате проведения из полюса a_1 в полюс a_2 цепей C_1, \dots, C_t без общих контактов и внутренних вершин так, что $K(C_i) = K_i$, $i = 1, \dots, t$ (см. рис. 4.5). Заметим, что при этом $L(\Sigma) = R(\mathfrak{A})$. Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ f называется *канонической КС* для этой ФАЛ. Многополюсная КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ называется *канонической* для матрицы F , $F \in (P_2(n))^{m,m}$, обладающей свойствами рефлексивности, транзитивности и симметричности, если Σ состоит из КС $\Sigma_{i,j}(x_1, \dots, x_m; a_i, a_j)$, где $1 \leq i, j \leq m$ и $\Sigma_{i,j}$ — двухполюсная каноническая схема для ФАЛ $F \langle i, j \rangle$, которые не имеют общих

контактов и внутренних вершин. Заметим, что КС Σ реализует при этом матрицу F как матрицу проводимости между своими полюсами, и поэтому любая матрица, обладающая указанными свойствами, может быть реализована КС с неразделенными полюсами. Аналогичным образом определяются канонические (m', m'') -КС.

Схемы Σ' и Σ'' считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные матрицы из ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

Для КС естественным образом определяются операция удаления вершины вместе с инцидентными ей ребрами, операция удаления ребра, а также операция отождествления двух вершин, которая обычно сопровождается удалением ребер, соединяющих эти вершины. Заметим, что при удалении вершин и ребер все ФАЛ проводимости не увеличиваются, а при отождествлении вершин — не уменьшаются. Действительно, пусть КС $\widehat{\Sigma}$ получается из КС Σ в результате отождествления вершин v_1, v_2 и пусть $g_{u,w}(\widehat{g}_{u,w})$ — ФАЛ проводимости от вершины u к вершине w в КС Σ (соответственно $\widehat{\Sigma}$). Тогда, для произвольных вершин v', v'' схемы Σ получим:

$$\widehat{g}_{v',v''} = g_{v',v''} \vee g_{v',v_1} \cdot g_{v_2,v''} \vee g_{v',v_2} \cdot g_{v_1,v''}, \quad (4.2)$$

и поэтому $\widehat{g}_{v',v''} \geq g_{v',v''}$. Из (4.2) следует, в частности, что для «объединенной» вершины $v = v_1 = v_2$ КС $\widehat{\Sigma}$ справедливо равенство:

$$\widehat{g}_{v',v''} = g_{v',v_1} \vee g_{v'',v_2}. \quad (4.3)$$

Будем называть (m', m'') -КС *приведенной*, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее входы и выходы. При этом КС $\widehat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполюсных вершин и контактов, является эквивалентной Σ приведенной КС такой, что $L(\widehat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$. Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС, не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Две вершины v_1 и v_2 (m', m'') -КС Σ от БП x_1, \dots, x_n называются *эквивалентными*, если для любого входа a' справедливо равенство

$$g_{a',v_1} = g_{a',v_2}, \quad (4.4)$$

где $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ — ФАЛ проводимости от вершины v к вершине u КС Σ . Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}$, которая получается из КС Σ в результате отождествления ее эквивалентных вершин v_1 и v_2 , эквивалентна Σ (ср. с §1), так как в силу (4.2)–(4.4) и рефлексивности ФАЛ проводимости для произвольных входа a' и выхода a'' вытекают равенства:

$$\widehat{g}_{a',a''} = g_{a',a''} \vee g_{a',v_2} \cdot g_{v_2,a''} \vee g_{a',v_1} \cdot g_{v_1,a''} = g_{a',a''}.$$

Будем называть КС Σ *строго приведенной*, если она является приведенной и в Σ нет различных эквивалентных вершин. Очевидно, что любая приведенная КС Σ эк-

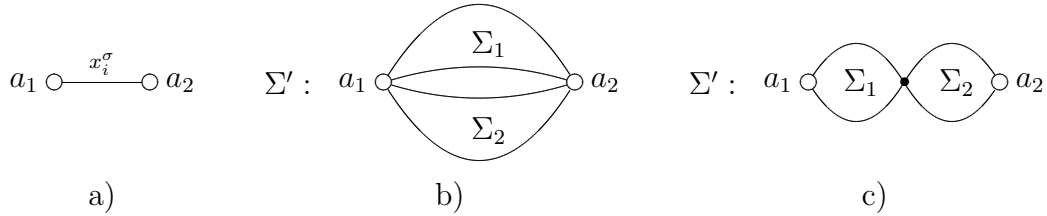


Рис. 5.1: к определению π -схемы

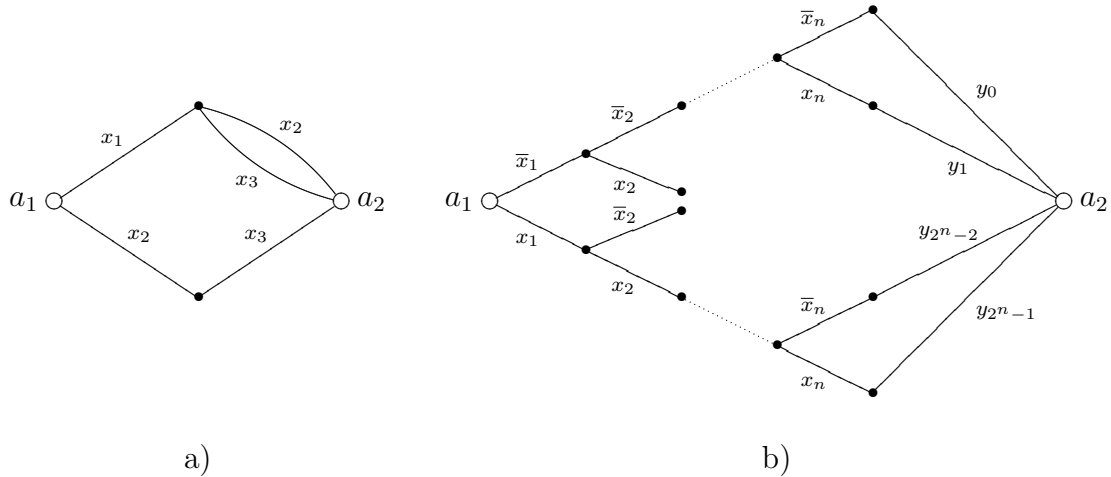
вивалентна строго приведенной КС Σ' , которая получается из нее в результате (многократного) отождествления эквивалентных вершин и для которой $L(\Sigma') \leq L(\Sigma)$.

§5 Некоторые модификации и частные случаи контактных схем. Оценка числа схем различных типов

Понятие КС можно обобщить следующим образом. Граф Σ называется *контактно-вентильной схемой (КВС)*, если его можно получить в результате снятия пометок с части дуг (ориентированных ребер) некоторой КС. Дуги КВС Σ , не имеющие пометок, называются *вентильями*. Считается, что они проводят в направлении своей ориентации при любых значениях управляющих БП схемы Σ . Вентили соответствуют диодам в электронных схемах и командам безусловного перехода в программах. На класс КВС переносятся все понятия, введенные в §4 для КС, и те их свойства, которые не опираются на отсутствие ориентации у контактов. Под сложностью $L(\Sigma)$ КВС Σ понимается, как обычно, число ее дуг и ребер.

Будем рассматривать, далее, КС с разделенными полюсами, относя к ним все двухполюсные КС. Определим сначала т.н. параллельно-последовательные КС или, иначе, π -схемы.

Простейшей π -схемой считается любая (1, 1)-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 5.1а). Если π -схемы Σ_1 и Σ_2 уже определены, то (1, 1)-КС Σ' (Σ''), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 5.1б и 5.1с) тоже является π -схемой. Заметим, что при этом вход (выход) Σ' является результатом отождествления входа (соответственно выхода) Σ_1 с входом (соответственно выходом) Σ_2 , тогда как входом (выходом) Σ'' является вход Σ_1 (соответственно выход Σ_2), а выход Σ_1 отождествляется с входом Σ_2 и становится внутренней вершиной Σ'' . Легко видеть, что π -схема, показанная на рис. 5.1а, реализует ФАЛ x_i^σ , а π -схемы Σ' и Σ'' (см. рис. 5.1б и 5.1с) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где f_1 и f_2 — ФАЛ, реализуемые π -схемами

Рис. 5.2: примеры π -схем

Σ_1 и Σ_2 соответственно.

Лемма 5.1. *Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу F из \mathcal{U}^Φ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(F) = L(\Sigma)$ и обратно.*

Доказательство. Построим формулу F индукцией по строению π -схемы Σ . Если Σ — простейшая π -схема вида x_i^σ , то положим $F = x_i^\sigma$. Если π -схемам Σ_1 и Σ_2 уже сопоставлены формулы F_1 и F_2 с поднятыми отрицаниями, то π -схеме Σ' (Σ''), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения Σ_1 и Σ_2 сопоставим формулу $F' = F_1 \vee F_2$ (соответственно $F'' = F_1 \& F_2$). При этом

$$R(F') = R(F'') = R(F_1) + R(F_2)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R(F') = R(F'') = L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) = L(\Sigma).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы F с поднятыми отрицаниями можно сопоставить ей эквивалентную π -схему Σ такую, что $L(\Sigma) = R(F)$.

Лемма доказана. \square

На рис 5.2а показана π -схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$

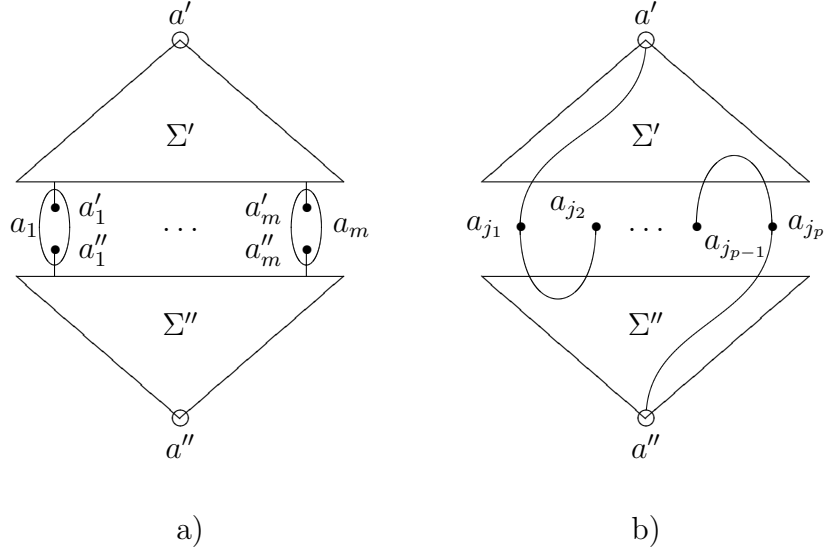


Рис. 5.3: к построению модели ИС на дополняющих МОП-транзисторах

а на рис. 5.2b — π -схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n , — в соответствии с формулой

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}.$$

Рассмотрим теперь следующий класс контактных схем, который является удобной математической моделью интегральных схем на дополняющих МОП-транзисторах (см., например, [4]). Пусть $(2, m)$ -КС вида $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a', a''; a_1, \dots, a_m)$ получается из $(1, m)$ -КС вида $\Sigma'(x_1, \dots, x_n; a'; a'_1, \dots, a'_m)$, которая реализует набор функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, и $(1, m)$ -КС вида $\Sigma''(x_1, \dots, x_n; a''; a''_1, \dots, a''_m)$, которая реализует набор ФАЛ $\bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$, в результате следующего отождествления вершин: $a'_i = a''_i = a_i$, где $i = 1, \dots, m$ (см. рис. 5.3а). Заметим, что на любом наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений БП x_1, \dots, x_n и при любом $j, j = 1, \dots, m$ в КС Σ имеется проводящая цепь либо из a' , если $f_j(\alpha) = 1$, либо из a'' , если $f_j(\alpha) = 0$, в a_j . Заметим также, что ФАЛ проводимости между входами a' и a'' в КС Σ равна 0. Действительно, пусть на наборе $x = \alpha$ в Σ имеется проводящая цепь C из a' в a'' последовательно переходящая из Σ' в Σ'' и обратно в вершинах a_{j_1}, \dots, a_{j_p} (см. рис. 5.3б). Тогда, в силу специфики структуры КС Σ , будут справедливы равенства:

$$f_{j_1}(\alpha) = 1, \quad \bar{f}_{j_1}(\alpha) = \bar{f}_{j_2}(\alpha), \quad f_{j_2}(\alpha) = f_{j_3}(\alpha), \dots$$

$$\dots, \quad f_{j_{p-1}}(\alpha) = f_{j_p}(\alpha), \quad f_{j_p}(\alpha) = 1,$$

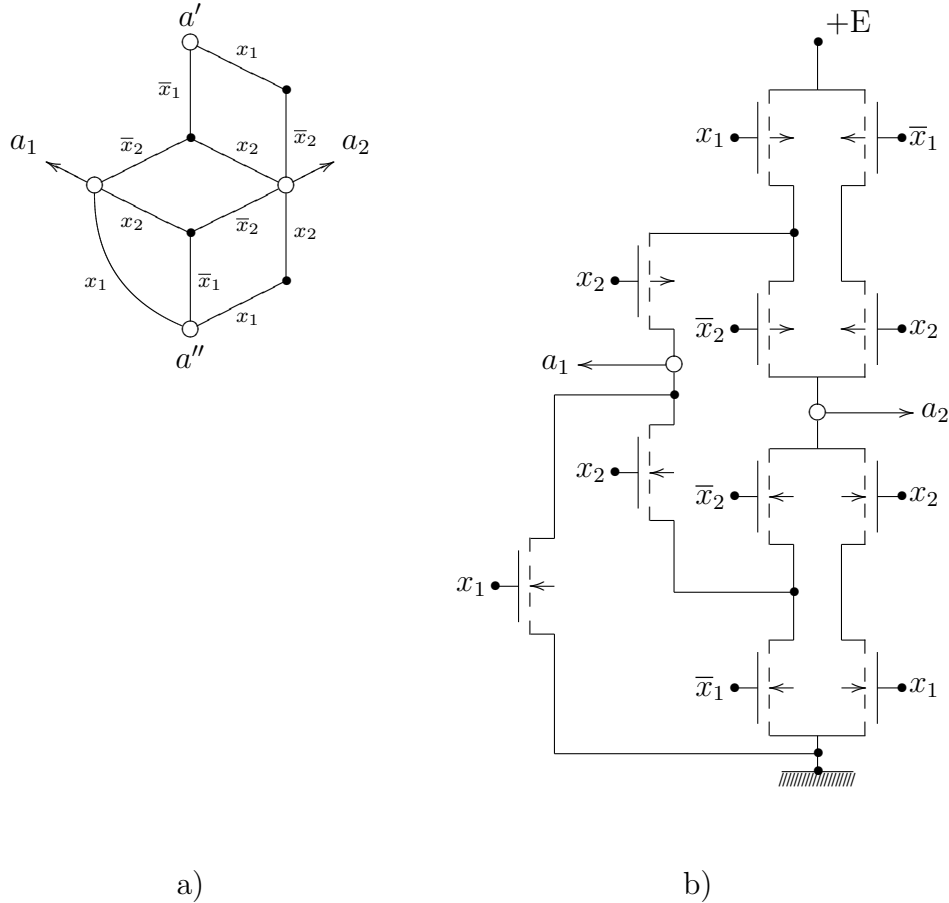


Рис. 5.4: модель интегральной схемы на дополняющих МОП-транзисторах

из которых вытекает, что, с одной стороны,

$$f_{j_1}(\alpha) = f_{j_2}(\alpha) = \dots = f_{j_p}(\alpha) = 1,$$

а, с другой стороны,

$$f_{j_p}(\alpha) = f_{j_{p-1}}(\alpha) = \dots = f_{j_1}(\alpha) = 0.$$

Отмеченные выше особенности КС Σ позволяют использовать ее для построения схемы на дополняющих МОП-транзисторах, реализующей набор ФАЛ F . Для этого достаточно подключить ее вход a' (a'') к источнику высокого (соответственно низкого) потенциала, а каждый контакт вида x_i^σ КС Σ' (Σ'') заменить p -МОП (соответственно n -МОП) транзистором, на затвор которого подана ФАЛ x_i^σ (соот-

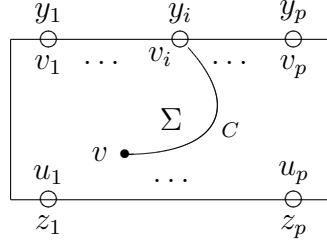


Рис. 5.5: к определению итеративной контактной схемы

ответственно x_i^σ). На рис. 5.4а показана КС Σ указанного вида, а на рис. 5.4б — соответствующая ей схема на дополняющих МОП-транзисторах, реализующая набор ФАЛ $F = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, x_1 \oplus x_2)$.

Следующий класс схем мы будем использовать при описании операции суперпозиции (см. главу 3). Назовем (p, m) -КС Σ *итеративной контактной схемой (ИКС)*, если пометками ее входов являются БП из множества (итеративных) входных БП Y , $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, а пометками выходов — переменные из множества выходных БП $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, то есть

$$\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_m).$$

При этом БП x_1, \dots, x_n считаются *управляющими переменными ИКС Σ* . Пусть в (p, m) -ИКС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_m)$ входные БП набора $y = (y_1, \dots, y_p)$ связаны с вершинами v_1, \dots, v_p , выходные БП набора $z = (z_1, \dots, z_m)$ — с вершинами u_1, \dots, u_m и пусть $g_{u,v}(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — ФАЛ проводимости от вершины u к вершине v в КС Σ . Тогда будем считать, что в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ $\psi_v(x, y)$ вида

$$\psi_v(x, y) = \bigvee_{i=1}^p y_i \cdot g_{v_i, v}(x), \quad (5.1)$$

а КС Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, где $f_j = \psi_{u_j}(x, y)$, $j = 1, \dots, m$. Соотношение (5.1) имеет следующий содержательный смысл: ФАЛ ψ_v обращается в 1 при $x = \alpha$ и $y = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ тогда и только тогда, когда из некоторой входной вершины v_i такой, что $\beta_i = 1$, в v идет проводящая при $x = \alpha$ цепь C (см. рис. 5.5).

Заметим, что в соответствии с (5.1) в каждой входной вершине v_i , $i = 1, \dots, p$, тоже реализуется ФАЛ $\psi_{v_i}(x, y)$ и что $\psi_{v_i}(x, y) \geq y_i$. Заметим также, что две вершины ИКС Σ эквивалентны (см. §4), тогда и только тогда, когда в них реализуются равные ФАЛ, а две ИКС с одним и тем же набором итеративных БП эквивалентны тогда и только тогда, когда они реализуют равные системы ФАЛ.

На рис. 5.6а показана ИКС Σ' от БП $(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_p; z_1)$, которая называется *неоднородной звездой порядка p* , имеет *степень* $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ и реализует ФАЛ

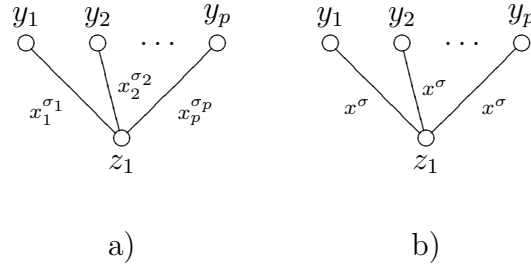
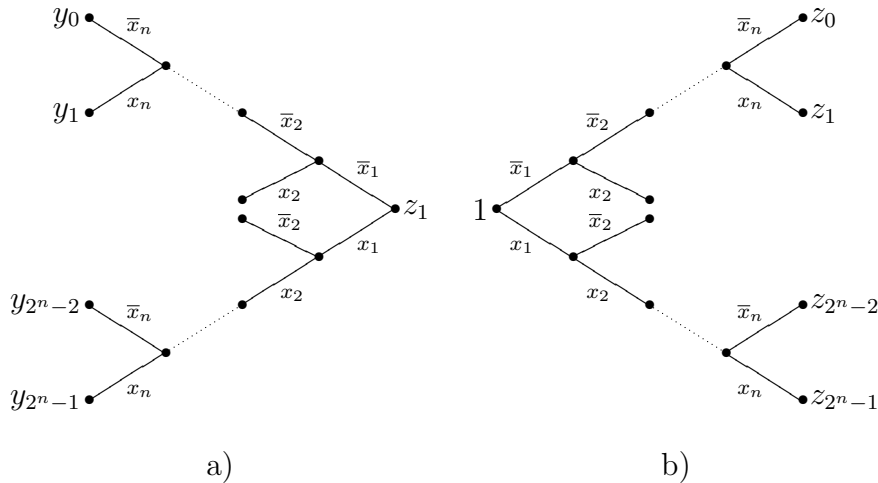
Рис. 5.6: неоднородная и однородная звезды порядка p 

Рис. 5.7: ИКС-мультиплексор и ИКС1-дешифратор на основе контактного дерева

$x_1 y_1 \vee \dots \vee x_p y_p$. На рис. 5.6b изображена итеративная контактная схема Σ'' , которая получается из указанной ИКС Σ' , где $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p = \sigma$, в результате отождествления БП $x_1 = x_p = \dots = x$, называется *однородной звездой порядка p* , имеет *степень σ* и реализует ФАЛ $x^\sigma (y_1 \vee \dots \vee y_p)$. На рис. 5.7а показана $(2^n, 1)$ -ИКС $D(x_1, \dots, x_n; y_0, \dots, y_{2^n-1}; z)$, которая получается из $(1, 2^n)$ -КС, являющейся контактным деревом порядка n (см. рис. 4.4), в результате объявления его листьев итеративными входами, а корня дерева — выходом. Легко видеть, что указанная схема является ИКС-мультиплексором порядка n , то есть реализует ФАЛ $\mu_n(x_1, \dots, x_n; y_0, \dots, y_{2^n-1})$.

Схему Σ' , которая получается из ИКС $\Sigma(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_m)$ в результате замены пометок y_{i_1}, \dots, y_{i_s} , где $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq p$ на пометку 1 будем называть *итеративной контактной схемой с 1-входами* (ИКС1). При этом считается,

что итеративными входными БП Σ' являются БП из набора y' , который получается удалением БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} из набора y_1, \dots, y_p , что вершины, соответствующие БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} в Σ , становятся 1-входами Σ' , и что ФАЛ $\psi'_v(x, y')$, реализуемая в вершине v схемы Σ' , задается формулой, которая получается из правой части (5.1) в результате подстановки константы 1 вместо БП y_{i_1}, \dots, y_{i_s} . Легко видеть, что ИКС является частным случаем ИКС1 и что любая ИКС1 эквивалентна ИКС1, которая получается из нее в результате «склейки» всех 1-входов в один такой вход. Заметим также, что функционирование $(1, m)$ -ИКС1 с 1-входом совпадает с функционированием соответствующей ей $(1, m)$ -КС. Так, на рис. 5.7b показана $(1, 2^n)$ -ИКС1, которая соответствует $(1, 2^n)$ -контактному дереву порядка n и является ИКС1-дешифратором порядка n .

Рассмотрим, в заключение, некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть \mathcal{U}^K , \mathcal{U}^{KBC} , $\mathcal{U}^{\bar{K}}$ и \mathcal{U}^π — множество всех КС из неориентированных контактов, множество всех КВС из неориентированных контактов и вентиляей, множество всех КС и ориентированных контактов и множество всех π -схем соответственно. Если \mathcal{U}^A — один из указанных классов схем, то через $\mathcal{U}^A(L, n)$ будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$ -КС Σ из \mathcal{U}^A от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leq L$. Для любого множества схем \mathcal{U} в соответствии с §1, §3 через $|\mathcal{U}|$ и $\|\mathcal{U}\|$ будем по-прежнему обозначать число попарно не эквивалентных схем в \mathcal{U} соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенства (3.2) будут выполняться.

Из леммы 5.1 и замечания к теореме 3.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.2. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (64n)^L.$$

Лемма 5.3. *При любых натуральных L и n выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (6nL)^L.$$

Доказательство. При $L = 1$ КС Σ из $\mathcal{U}^K(1, n)$ реализует одну из функций алгебры логики $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, 0, 1$ и оценка леммы, очевидно, выполняется, так как

$$2n + 2 \leq 6n.$$

Пусть теперь $L \geq 2$ и пусть Σ — $(1, 1)$ -КС из $\mathcal{U}^K(L, n)$, которая реализует ФАЛ f , $f \neq 0$. Построим эквивалентную Σ приведенную КС $\widehat{\Sigma}$ такую, что $L(\widehat{\Sigma}) \leq L$, которая получается из $\widehat{\Sigma}$ удалением параллельных контактов, то есть параллельных ребер с одинаковыми пометками, причем в случае $f \equiv 1$ в качестве $\widehat{\Sigma}$ возьмем КС из двух параллельно соединенных контактов вида x_1, \bar{x}_1 . Пусть, далее, приведенная КС $\widehat{\Sigma}'$, реализующая ФАЛ f , получается из $\widehat{\Sigma}$ последовательным дублированием

контактов так, что $L(\widehat{\Sigma}') = L$. Будем считать, что вершины $\widehat{\Sigma}'$ упорядочены, начиная с входа a_1 и выхода a_2 . Заметим, что в силу (1.3) из связности $\widehat{\Sigma}'$ следует, что число ее вершин не больше, чем $L + 1$. Следовательно, для задания КС $\widehat{\Sigma}'$ с точностью до изморфизма достаточно выбрать множество из L троек вида (i, j, x_k^σ) , где $1 \leq i < j \leq L + 1$ — номера концевых вершин контакта, а x_k^σ — его пометка. Число таких троек не больше, чем

$$\frac{L(L+1)}{2} \cdot 2n \leq 2nL^2$$

и, следовательно, с учетом неравенства (1.2) из §1 главы 1, число попарно неизоморфных схем $\widehat{\Sigma}'$ в $\mathcal{U}^K(L, n)$ не больше, чем

$$\binom{2nL^2}{L} \leq \frac{(2nL^2)^L}{L!} < (6nL)^L.$$

Учитывая ФАЛ 0 и то, что число попарно неэквивалентных КС Σ рассматриваемого вида не больше, чем число попарно неизоморфных соответствующих им КС $\widehat{\Sigma}'$, получим требуемую оценку.

Лемма доказана. \square

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что

$$\|U^{\vec{K}}(L, n)\| \leq (12nL)^L, \quad \|U^{KBC}(L, n)\| \leq (12nL)^L.$$

§6 Эквивалентные преобразования схем.

Основные тождества для контактных схем, вывод вспомогательных и обобщенных тождеств

В §3 главы 1 были даны основные определения и введены обозначения, связанные с эквивалентными преобразованиями (ЭП) формул. Распространим эти понятия и обозначения на случай реализации ФАЛ с помощью сетей и, в частности, на класс контактных схем.

Пусть \mathcal{U} — один из введенных выше классов схем. В соответствии с определениями из §2, §3 и §5 эквивалентность схем Σ' и Σ'' из \mathcal{U} имеет место тогда и только тогда, когда Σ' и Σ'' реализуют равные системы (матрицы) ФАЛ. При этом, обычно, предполагается, что соответствующие друг другу полюса (выходы, входы) в Σ' и Σ'' имеют одинаковые пометки, а эквивалентность Σ' и Σ'' записывается в виде тождества

$$t : \Sigma' \sim \Sigma''.$$

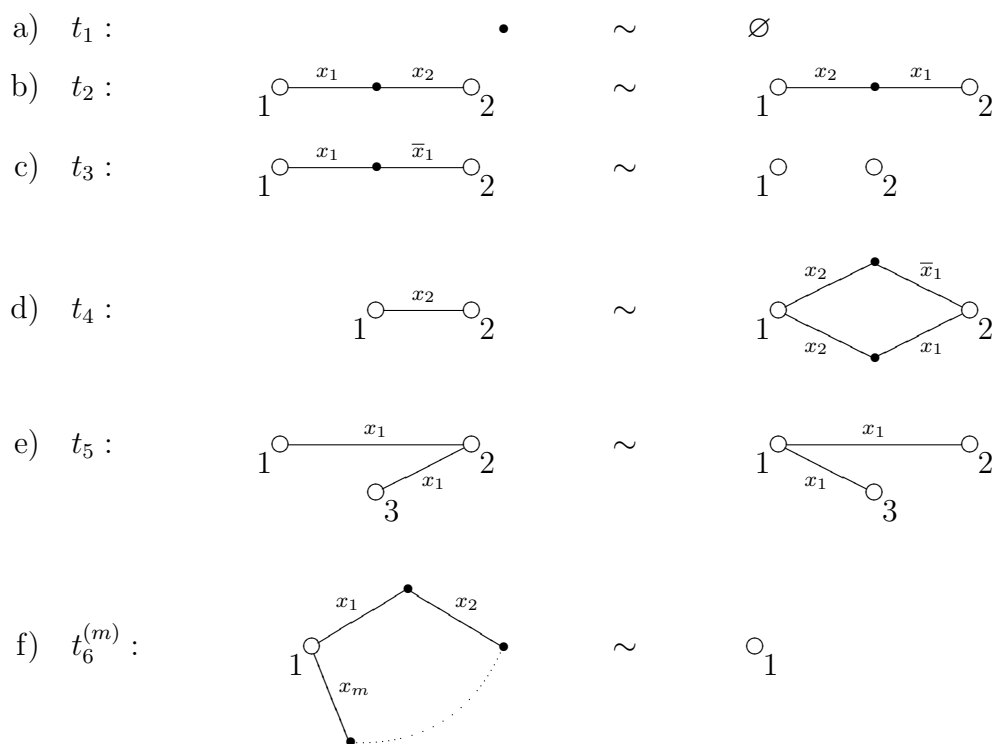


Рис. 6.1: основные тождества для КС

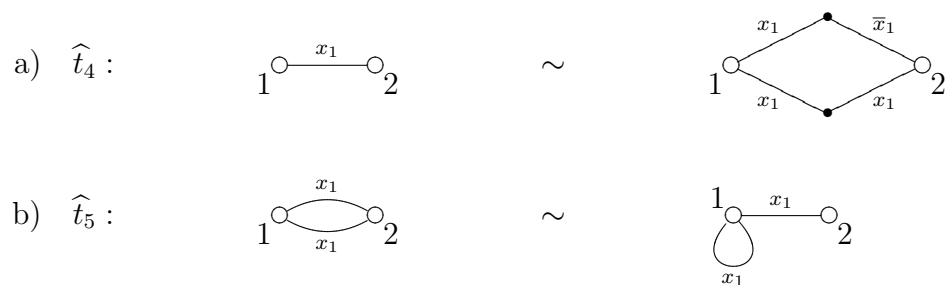


Рис. 6.2: подстановки для основных тождеств

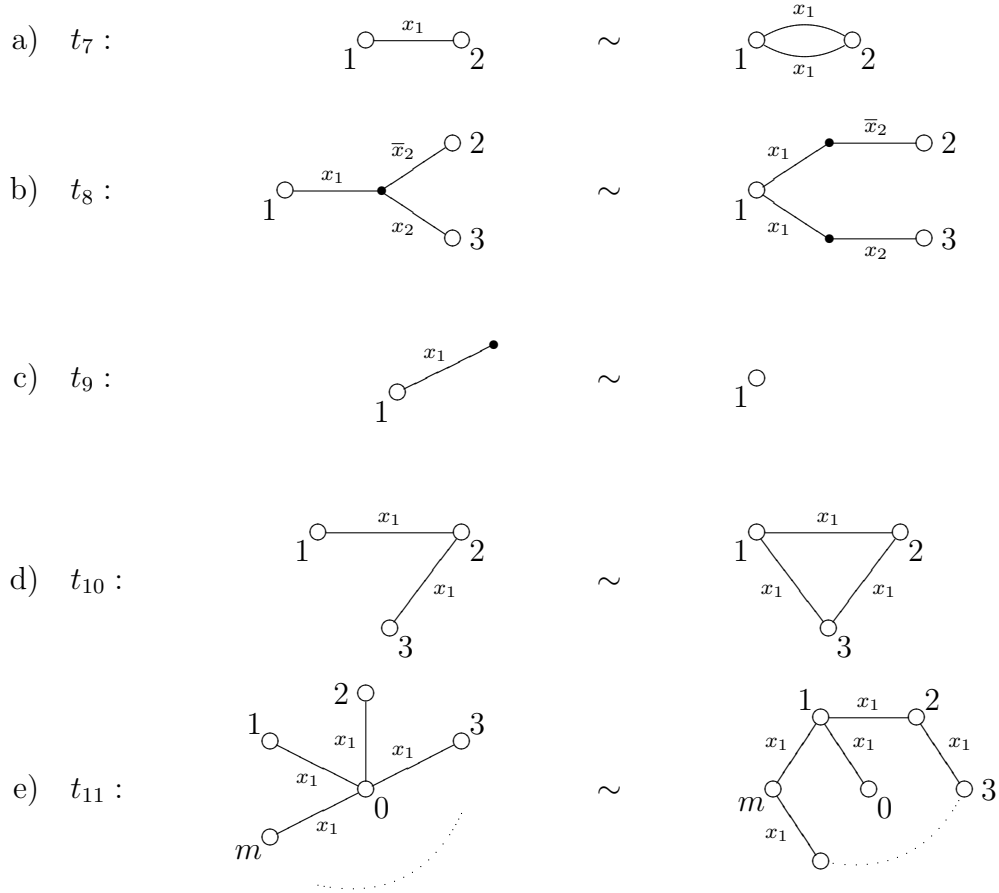


Рис. 6.3: вспомогательные тождества для КС

Для схем из \mathcal{U} , как правило, определяется ряд «простейших» преобразований, сохраняющих эквивалентность схем, которые называются *подстановками*. Тождество

$$\hat{t} : \hat{\Sigma}' \sim \hat{\Sigma}'',$$

которое получается в результате применения одной и той же подстановки к обеим частям тождества $t : \Sigma' \sim \Sigma''$, называется *подстановкой тождества t* . Схема Σ' называется *подсхемой* схемы Σ , если

$$V(\Sigma') \subseteq V(\Sigma), \quad E(\Sigma') \subseteq E(\Sigma)$$

и любая вершина v , $v \in V(\Sigma')$, которая либо относится к множеству входов (выходов) Σ , либо служит конечной (соответственно, начальной) вершиной некоторого

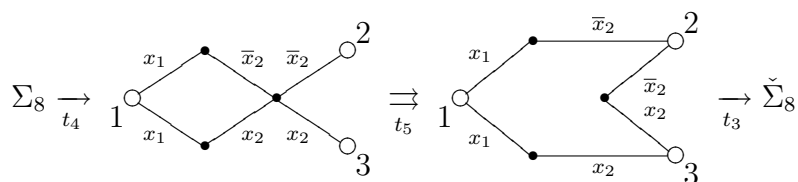


Рис. 6.4: вывод t_8

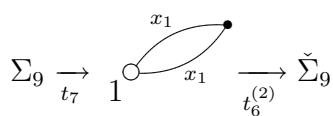


Рис. 6.5: вывод t_9

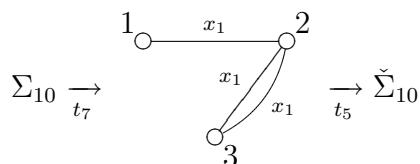


Рис. 6.6: вывод t_{10}

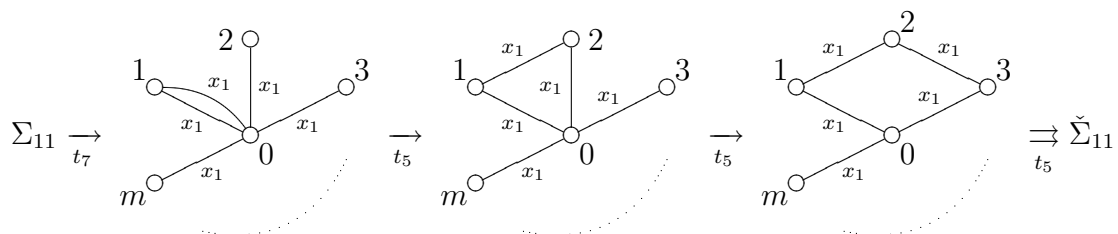


Рис. 6.7: вывод t_{11}

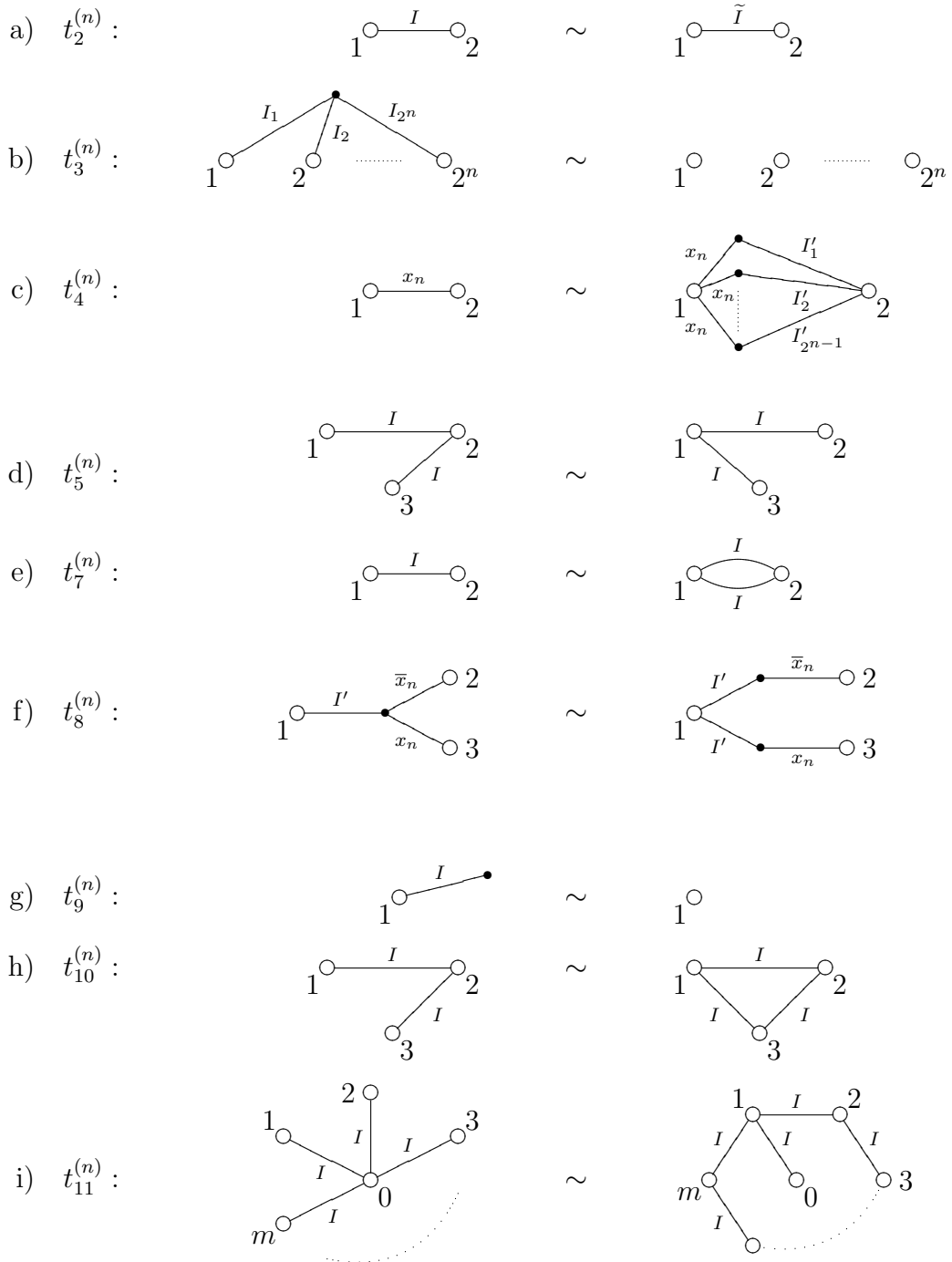


Рис. 6.8: обобщенные тождества порядка n для КС

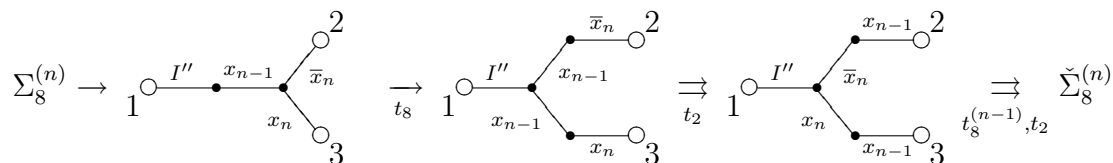


Рис. 6.9: вывод $t_8^{(n)}$

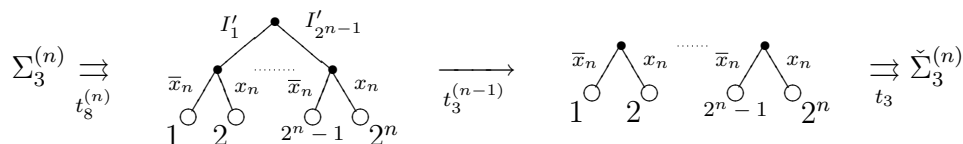


Рис. 6.10: вывод $t_3^{(n)}$

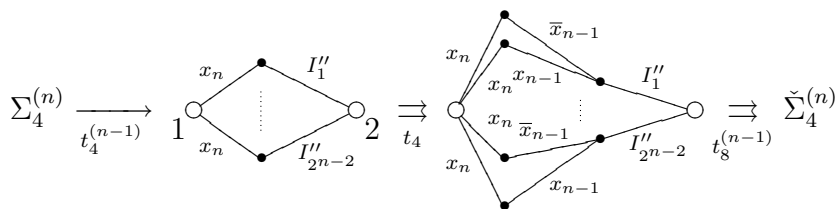


Рис. 6.11: вывод $t_4^{(n)}$

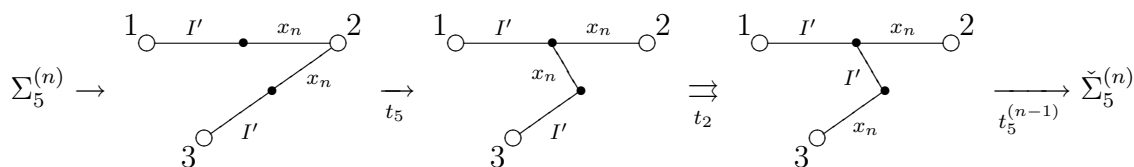


Рис. 6.12: вывод $t_5^{(n)}$

ребра из $E(\Sigma) \setminus E(\Sigma')$, является входом (соответственно, выходом) Σ' . Из определений следует, что для СФЭ и КС с неразделенными полюсами, как и для формул (см. §3 главы 1), имеет место принцип эквивалентной замены. При этом все введенные в §3 главы 1 для случая элементарных преобразований формул понятия (однократная и кратная выводимость, обратимость ЭП, полнота системы тождеств), а также связанные с ними обозначения переносятся на случай ЭП указанных классов схем без изменений (см. стр. 16–17).

Рассмотрим теперь вопросы ЭП для КС из \mathcal{U}^K с неразделенными неповторными полюсами. В соответствии с §4 эквивалентность КС $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ означает, что для любых i и j из отрезка $[1, m]$ ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ' равна ФАЛ проводимости от a_i к a_j в КС Σ'' . На рис. 6.1а–6.1е и 6.1f приведены пары эквивалентных КС, образующие тождества t_1 – t_5 и $t_6^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, соответственно, которые мы будем называть *основными тождествами* для ЭП КС.

Определим подстановку для КС как переименование (с возможным отождествлением и инвертированием) БП, а также переименование (с возможным отождествлением и снятием) полюсов. Заметим, что применяя одну и ту же подстановку к двум эквивалентным КС мы получим эквивалентные КС. Действительно, для переименования БП и переименования без отождествления полюсов это очевидно, а в случае отождествления полюсов эквивалентность получаемых КС вытекает из соотношений (4.2)–(4.3). На рис. 6.2а (6.2б) показана подстановка \hat{t}_4 тождества t_4 (соответственно \hat{t}_5 тождества t_5), связанная с переименованием БП x_2 в x_1 (соответственно полюсов $1 = 3$ в 1).

Рассмотрим примеры элементарных преобразований контактных схем с помощью системы основных тождеств. На рис. 6.3а–6.3е приведены тождества t_7 – t_{11} , которые мы будем называть *вспомогательными*. Заметим, что выводимость $\{t_5, t_6^{(1)}\} \Rightarrow t_7$ доказывается применением тождества $t_6^{(1)}$ к правой части тождества \hat{t}_5 (см. рис. 6.2а) для удаления из нее «висячего» цикла длины 1. Выводимость тождеств t_8 – t_{11} из основных тождеств $\{t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}\}$ показана на рис. 6.4–6.7 соответственно, где Σ_i и $\check{\Sigma}_i$ — левая и правая части тождества t_i , $i \in [8, 11]$. Тождество t_{10} называют иногда тождеством замыкания по транзитивности, а тождество t_{11} — «леммой» о звезде.

Обобщим тождества t_1 – t_{11} на случай КС от БП $X(n)$, где $n \geq 2$. Сопоставим ЭК $K_i^{(n)}$, $i \in [1, 2^n]$, вида $K_i^{(n)} = x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = i - 1$, моделирующую цепочку $I_i^{(n)}$ (см. §4), и пусть

$$\begin{aligned} I_i^{(n)} &= I_i, & i \in [1, 2^n], & & I &= I_{2^n}; \\ I_i^{(n-1)} &= I'_i, & i \in [1, 2^{n-1}], & & I' &= I'_{2^{n-1}}; \\ I_i^{(n-2)} &= I''_i, & i \in [1, 2^{n-2}], & & I'' &= I''_{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Систему тождеств $\tau^{(n)} = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{11}^{(n)}\}$, где $t_1^{(n)} = t_1, t_6^{(n)}$ — соответствующее основное

тождество (см. рис. 6.1f), $t_2^{(n)}$ — система, состоящая из тождеств, показанных на рис. 6.8a, где \tilde{I} — произвольная перестановка цепочки I , а остальные тождества приведены на рис. 6.8b–6.8i, будем называть системой *обобщенных тождеств порядка n* . При этом система $\tau_n = \{t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}\}$ считается системой основных тождеств порядка n , а система всех основных тождеств обозначается через τ_∞ .

Лемма 6.1. *При $n \geq 2$ имеет место выводимость $\tau_n \Rightarrow \tau^{(n)}$.*

Доказательство. Отметим сначала следующие очевидные выводимости:

$$\{t_2\} \Rightarrow t_2^{(n)}, \quad \{t_9\} \Rightarrow t_9^{(n)}.$$

Выводимость $\tau_n \Rightarrow t_i^{(n)}$, $i = 8, 3, 4, 5$ докажем индукцией по n , $n \geq n_i$, где $n_3 = n_5 = 1$ и $n_8 = n_4 = 2$. Базис этой индукции составляет тождество $t_i = t_i^{(n_i)}$, $i = 8, 3, 4, 5$, а обоснование индуктивного перехода дает выводимость правой части $\check{\Sigma}_i^{(n)}$ тождества $t_i^{(n)}$, $n > n_i$, из его левой части $\Sigma_i^{(n)}$, показанная на рис. 6.9–6.12.

Легко видеть, что выводимости

$$\{t_2^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow t_7^{(n)}, \quad \{t_7^{(n)}, t_5^{(n)}\} \Rightarrow \{t_{10}^{(n)}, t_{11}^{(n)}\}$$

при $n \geq 2$ доказываются аналогично тому, как это делалось для случая $n = 1$ (см. рис. 6.6, 6.7).

Лемма доказана. □

§7 Полнота системы основных тождеств и отсутствие конечной полной системы тождеств в классе контактных схем

Докажем сначала полноту системы основных тождеств τ_∞ для ЭП КС. Для этого, как обычно, достаточно доказать, что с помощью ЭП на основе системы τ_∞ произвольную КС из \mathcal{U}^K можно привести к каноническому виду (см. §4).

Любую цепь $I_i^{(n)}$ (см. §6), где $i \in [1, 2^n]$, а также любую цепь, которая получается из $I_i^{(n)}$ перестановкой контактов, будем называть *канонической цепью порядка n* . Заметим, что КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ является канонической КС тогда и только тогда, когда она обладает следующими свойствами:

1. любой контакт $\widehat{\Sigma}$ принадлежит некоторой стандартной цепи порядка n , являющейся подсхемой схемы $\widehat{\Sigma}$, причем полюсами этой подсхемы служат только концевые вершины данной цепи;

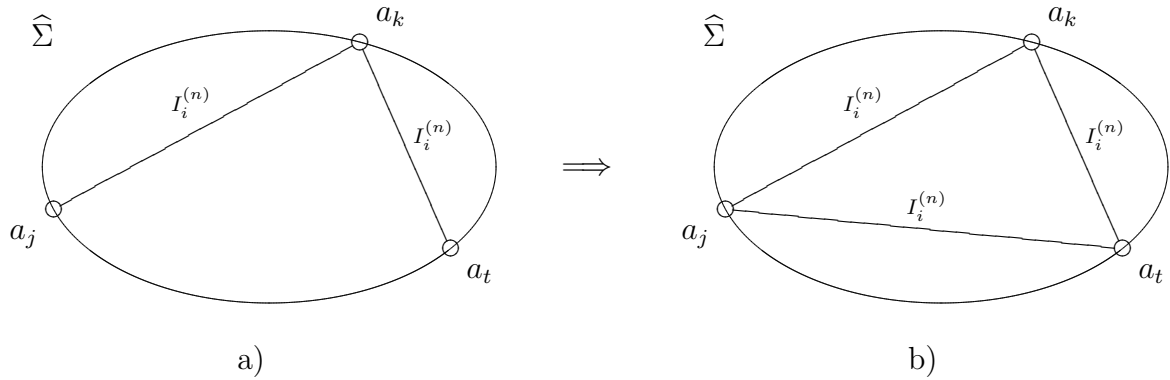


Рис. 7.1: к свойству 4 КС канонического вида

2. любая внутренняя вершина $\widehat{\Sigma}$ является внутренней вершиной некоторой цепи из пункта 1;
3. в КС $\widehat{\Sigma}$ отсутствуют «висячие циклы» (см. тождество $t_6^{(n)}$) и «параллельные» цепи, то есть стандартные цепи порядка n из пункта 1, которые соединяют одни и те же полюса и реализуют равные ЭК;
4. в КС $\widehat{\Sigma}$ нет существенных транзитных проводимостей, то есть наличие цепей вида $I_i^{(n)}$, соединяющих полюс a_j с полюсом a_k и полюс a_k с полюсом a_t (см. рис. 7.1а), влечет наличие цепи такого же вида, соединяющей полюс a_j с полюсом a_t (см. рис. 7.1б).

Лемма 7.1. Для любой КС Σ , где $\Sigma \in \mathcal{U}^K$ и $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, и любой эквивалентной Σ КС $\widehat{\Sigma}(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ канонического вида существует ЭП $\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}$.

Доказательство. Построим ЭП вида

$$\Sigma \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_3 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_4 = \widehat{\Sigma},$$

где КС Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, обладает отмеченными выше свойствами $1, \dots, i$, отличающимися канонические КС. Первой из этих ЭП имеет вид

$$\Sigma \xrightarrow{t_4^{(n)}} \Sigma_1$$

и связано с применением к каждому контакту тождества $t_4^{(n)}$.

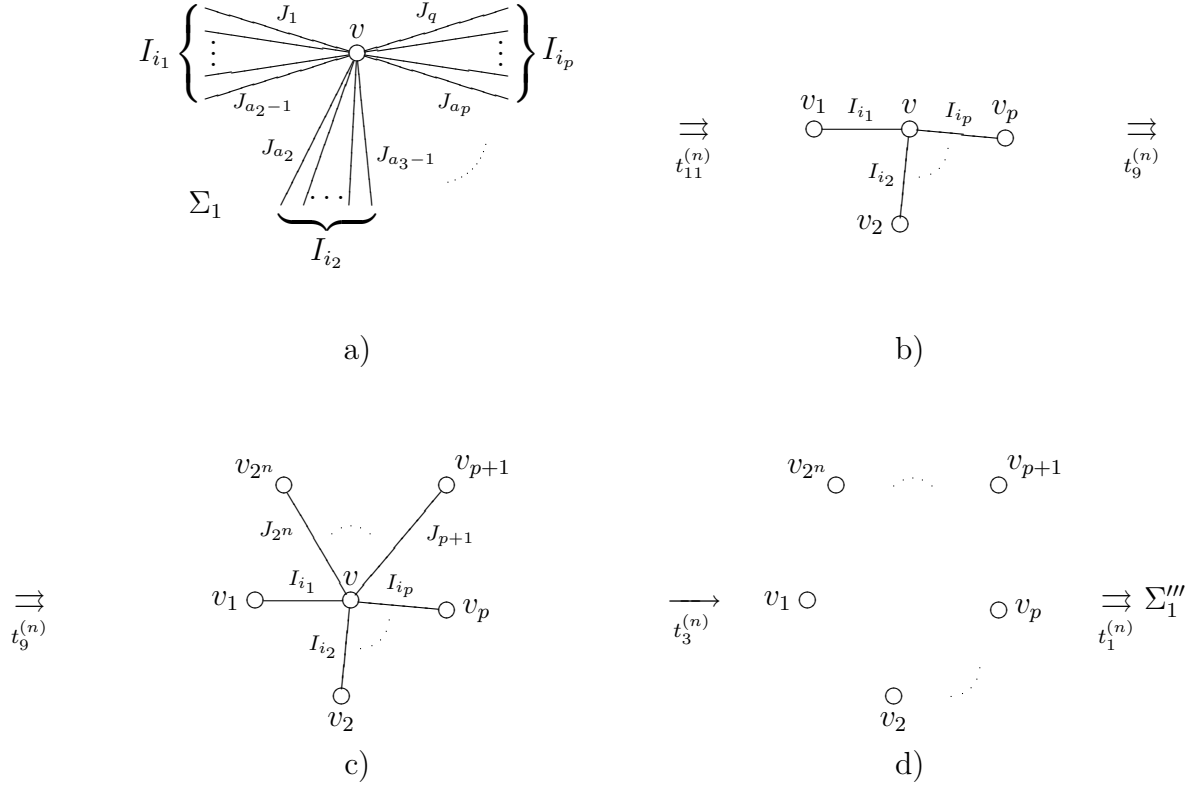


Рис. 7.2: к доказательству леммы 7.1

Существование ЭП

$$\Sigma_1 \xrightarrow{\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}} \Sigma_2 \tag{7.1}$$

докажем индукцией по числу тех внутренних вершин КС Σ_1 , которые не являются внутренними вершинами ее стандартных цепей. Базис индукции составляют схемы Σ_1 , которые не имеют указанных вершин и для которых, следовательно, $\Sigma_2 = \Sigma_1$. Пусть теперь КС Σ_1 имеет хотя бы одну вершину указанного вида и пусть v — одна из таких вершин. Удалим с помощью тождества $t_6^{(n)}$ все присоединенные к v «висячие» циклы и рассмотрим все остальные цепи J_1, \dots, J_q , концевой вершиной которых она является (см. рис. 7.2а). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для некоторых натуральных чисел

$$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} = q + 1$$

и любого j , $j \in [1, p]$, цепи $J_{a_j}, \dots, J_{a_{j+1}-1}$ являются цепями типа $I_{i_j}^{(n)} = I_{i_j}$, где

i_1, \dots, i_p — различные числа отрезка $[1, 2^n]$. Применяя к каждой из этих p групп цепей одного типа тождество $t_{11}^{(n)}$, получим КС Σ'_1 , в которой из вершины v выходит по одной цепи каждого типа I_{i_j} , $j \in [1, p]$ (см. рис. 7.2b). Пусть, далее, КС Σ''_1 получается из КС Σ'_1 присоединением к вершине v с помощью тождества $t_9^{(n)}$ «висячих» цепей J_{p+1}, \dots, J_{2^n} всех отсутствующих среди I_{i_1}, \dots, I_{i_p} типов (см. рис. 7.2c), а КС Σ'''_1 получается из КС Σ''_1 в результате удаления с помощью тождества $t_3^{(n)}$ вершины v вместе со всеми «инцидентными» ей цепями и устранения с помощью тождества t_1 образовавшихся при этом изолированных вершин — концевых вершин цепей J_{p+1}, \dots, J_{2^n} (см. рис. 7.2d). По индуктивному предположению для КС Σ'''_1 существует ЭП вида

$$\Sigma'''_1 \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_2$$

$$\{t_6^{(n)}, t_{11}^{(n)}, t_9^{(n)}, t_3^{(n)}, t_1^{(n)}\}$$

и, следовательно, для КС Σ_1 существует ЭП (7.1).

Переход от КС Σ_2 к КС Σ_3 осуществляется с помощью тождеств $t_6^{(n)}$ и $t_7^{(n)}$, а от КС Σ_2 к КС Σ_3 — с помощью тождеств $t_{10}^{(n)}$.

Лемма доказана. \square

Теорема 7.1. *Для любых двух эквивалентных КС Σ' и Σ'' от БП x_1, \dots, x_n существует ЭП вида $\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{\Sigma}'$ и $\widehat{\Sigma}''$ — канонические КС от БП x_1, \dots, x_n , эквивалентные КС Σ' и Σ'' соответственно. Из определений следует, что $\widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}''$, и поэтому в силу

леммы 7.1 существует ЭП вида

$$\Sigma' \xrightarrow{\tau_n} \widehat{\Sigma}' \xrightarrow{t_2^{(n)}} \widehat{\Sigma}'' \xrightarrow{\tau_n} \Sigma''.$$

Теорема доказана. \square

Следствие 1. *Система τ_n является КПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K от БП x_1, \dots, x_n .*

Следствие 2. *Система τ_∞ является ПСТ для ЭП КС из \mathcal{U}^K .*

Докажем теперь отсутствие КПСТ в классе \mathcal{U}^K . Для КС Σ от БП x_1, \dots, x_n и набора α , $\alpha \in B^n$, определим величину

$$Z(\Sigma, \alpha) = |E(\Sigma(\alpha))| - |V(\Sigma(\alpha))| + c(\Sigma(\alpha)),$$

которая (см. §1) задает цикломатическое число графа $\Sigma(\alpha)$. Положим, далее,

$$Z(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} Z(\Sigma, \alpha).$$

Лемма 7.2. Если $\Sigma'(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[\{t_1-t_5\}]{\tau_k} \Sigma''(x_1, \dots, x_n)$, то $Z(\Sigma') = Z(\Sigma'')$, а если $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\tau_k} \Sigma''$, где $k < n$, то $Z(\Sigma') - Z(\Sigma'')$ делится на 2^{n-k} .

Доказательство. Докажем, что $Z(\Sigma') = Z(\Sigma'')$, если $Z' \xrightarrow[t_i]{} \Sigma''$ для любого i из отрезка $[1, 5]$. Действительно, пусть КС Σ'' получается из КС Σ' заменой ее подсхемы $\widehat{\Sigma}'_i$, которая имеет вид левой части тождества t_i , на соответствующую ей правую часть $\widehat{\Sigma}''_i$ этого тождества. Нетрудно проверить, что для любого i , $i \in [1, 5]$, число циклов графа $\Sigma(\alpha)$ для любого $\alpha \in B^n$ сохранится, и, следовательно, $Z(\Sigma') = Z(\Sigma'')$.

Пусть теперь $\Sigma' \xrightarrow[\tau_k]{\tau_k} \Sigma''$, причем $k < n$. Если КС Σ' содержит в качестве подсхемы цикл из k контактов с одним полюсом, то КС Σ'' содержит вместо него один лишь полюс. Рассмотрим цикломатическое число $\Sigma'(\alpha)$ для различных α , $\alpha \in B^n$. Если цикл указанного вида в КС Σ' содержит контакты, помеченные различными буквами одной и той же БП, то, очевидно, для любого α , $\alpha \in B^n$, $Z(\Sigma') - Z(\Sigma'') = 0$. В противном случае пусть x_{j_1}, \dots, x_{j_m} — все различные БП, встречающиеся среди пометок указанного цикла, причем $m \leq k$. Заметим, что если цикл проводит на наборе α , $\alpha \in B^n$, то он проводит и на всех 2^{n-m} наборах, в которых значения переменных с индексами j_1, \dots, j_m совпадают со значениями соответствующих переменных набора α . Таким образом,

$$Z(\Sigma') - Z(\Sigma'') = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (Z(\Sigma'(\alpha)) - Z(\Sigma''(\alpha))).$$

Отсюда получаем, что $Z(\Sigma') - Z(\Sigma'')$ делится на 2^{n-m} и, следовательно, на 2^{n-k} .

Лемма доказана. \square

Теорема 7.2. В классе \mathcal{U}^K не существует конечной полной системы тождеств.

Доказательство. Проведем доказательство от противного: пусть $\tau = \{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ — КПСТ для ЭП КС \mathcal{U}^K , и пусть n — максимальное число БП, встречающихся в тождествах системы τ . Тогда $\tau_n \Rightarrow \tau$ и τ_n — КПСТ для \mathcal{U}^K . Докажем, что $\tau_n \not\Rightarrow t_6^{(n+1)}$. Для этого рассмотрим тривиальную КС Σ' , состоящую из единственного цикла длины $(n+1)$, содержащего контакты с пометками x_i , $i \in [1, n+1]$ и единственный полюс с пометкой 1. Очевидно, что ей эквивалентна КС Σ'' , содержащая изолированный полюс 1. Если $\tau_n \Rightarrow t_6^{(n+1)}$, то $\Sigma' \Rightarrow \Sigma''$. Согласно данным выше определениям, $Z(\Sigma') = 1$, $Z(\Sigma'') = 0$ и разность $Z(\Sigma') - Z(\Sigma'') = 1$ не делится на 2, что противоречит утверждению леммы 7.2. Таким образом, $t_6^{(n+1)}$ не выводится из τ_n , а значит, и из τ . Отсюда следует, что τ не может являться КПСТ для ЭП КС \mathcal{U}^K .

Теорема доказана. \square

§8 Структурное моделирование и эквивалентные преобразования формул и схем из функциональных элементов в различных базисах

Рассмотрим сначала вопросы структурного моделирования формул в различных базисах. Пусть помимо базиса $B = \{\varphi_i\}_{i=1}^b$ у нас имеется другой конечный полный базис $B' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^{b'}$, и пусть формула $\Phi'_i(x_1, \dots, x_{k'_i})$ из $\mathcal{U}_{B'}$, где $k'_i \geq k_i$, реализует ФАЛ φ_i , $i = 1, \dots, b$. Заметим, что в случае $k'_i > k_i$ БП $x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}$ являются фиктивными БП формулы Φ'_i и будем считать, что в случае, когда φ_i — константа и, следовательно, $k_i = 1$, имеет место равенство $k'_i = 2$, а формула Φ'_i зависит только от БП x_2 . Положим

$$\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b), \quad \Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b),$$

где Π'_i — тождество вида $\varphi_i = \Phi'_i$, $i = 1, \dots, b$, и формулы из Φ' (тождества из Π') будем называть *формулами* (соответственно *тождествами*) *перехода от базиса B к базису B'*.

Для формулы \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, обозначим через $\Pi'(\mathcal{F})$ формулу над базисом B' , которая получается из \mathcal{F} заменой каждой ее подформулы вида $\varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$ формулой $\Phi'_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i})$, то есть является результатом подстановки формулы \mathcal{F}_j вместо БП x_j в формулу Φ'_i (см. §3 главы 1) для всех j , $j = 1, \dots, k_i$. Переход от формулы \mathcal{F} к формуле $\Pi'(\mathcal{F})$ будем называть *структурным моделированием формулы \mathcal{F} в базисе B' на основе формул перехода Φ'* или, иначе, *на основе тождеств перехода Π'* . Заметим, что этот переход является специальным ЭП вида

$$\mathcal{F} \xrightarrow[\Pi']{\Phi'} \Pi'(\mathcal{F})$$

для формул над базисом $B \cup B'$. Отсюда следует, в частности, что в результате указанного структурного моделирования обеих частей тождества t , являющихся формулами из \mathcal{U}_B^Φ , получается тождество t' для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, которое мы будем обозначать через $\Pi'(t)$. Множество формул вида $\Pi'(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\Pi'(\mathfrak{F})$, а множество тождеств вида $\Pi'(t)$, где $t \in \tau$ — тождество над \mathcal{U}_B^Φ , — через $\Pi'(\tau)$.

Переменная, входящая в запись формулы ровно один раз, называется *бесповторной* БП этой формулы. Формула \mathcal{F} называется *бесповторной*, если все существенные БП реализуемой ею ФАЛ являются бесповторными для \mathcal{F} . Заметим, что абсолютная формула является бесповторной, а другие примеры бесповторных формул дают, в частности, формулы $x_1 \cdot \bar{x}_1$ и $x_2(x_1 \vee \bar{x}_1)$. Будем говорить, что базис B допускает *бесповторное моделирование* в базисе B' , если в $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ существуют бесповторные формулы Φ'_1, \dots, Φ'_b , реализующие ФАЛ $\varphi_1, \dots, \varphi_b$ соответственно.

Лемма 8.1. *Если базис \mathcal{B} допускает бесповторное моделирование в базисе \mathcal{B}' , то для любой формулы \mathcal{F} из $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ существует эквивалентная ей формула \mathcal{F}' из $\mathcal{U}_{\mathcal{B}'}^{\Phi}$, такая, что*

$$S(\mathcal{F}') \leq c_1 S(\mathcal{F}), \quad R(\mathcal{F}') \leq c_2 R(\mathcal{F}), \quad D(\mathcal{F}') \leq c_3 D(\mathcal{F}), \quad (8.1)$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы, зависящие только от базисов $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Доказательство. Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система из бесповторных формул перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}' , а Π' — связанная с ней система тождеств перехода, и пусть $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$. Справедливость для \mathcal{F}' неравенств (8.1), где c_1 и c_3 — максимальный размер и максимальная глубина формул Φ'_i соответственно, а c_2 — максимальное отношение k'_i/k_i , $i \in [1, b]$, докажем индукцией по $D(\mathcal{F})$. Действительно, для формул глубины 1 эти неравенства выполняются в силу выбора констант. Пусть, далее, неравенства (8.1) выполняются для любой формулы глубины не больше, чем $(d-1)$, где $d \geq 1$, и пусть формула \mathcal{F} глубины d имеет вид

$$\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}),$$

где $D(\mathcal{F}_j) \leq d-1$ для всех j , $j \in [1, k_i]$. Тогда

$$\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F}) = \Phi'_i(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_{k_i}, x_{k_i+1}, \dots, x_{k'_i}),$$

где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$, $j = 1, \dots, k_i$, и, следовательно,

$$D(\mathcal{F}') \leq D(\Phi'_i) + c_3 \max_{1 \leq j \leq k_i} D(\mathcal{F}_j) \leq c_3 D(\mathcal{F}).$$

Аналогичным образом, но уже с учетом бесповторности формул перехода, доказываются неравенства (8.1) с константами c_1 и c_2 для размера и ранга формулы \mathcal{F}' соответственно.

Лемма доказана. \square

Замечание. Неравенство (8.1) для глубины \mathcal{F}' выполняется с определенной выше константой c_3 для произвольных базисов $\mathcal{B}', \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{B}_+ = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \cdot x_2, 1\}$, а базис \mathcal{B}'' получается из базиса \mathcal{B}_+ заменой функционального элемента, реализующего ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, на ФЭ, реализующий функцию «голосования» $H(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$. Заметим, что базис \mathcal{B}_0 допускает бесповторное моделирование в базисе \mathcal{B}'' . Действительно, формулы $H(x_1, x_2, y \oplus y)$, $H(x_1, x_2, 1)$ и $x \oplus 1$ являются бесповторными формулами над \mathcal{B}'' , которые реализуют ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$ и \bar{x} соответственно. Базис \mathcal{B}_0 допускает бесповторное моделирование и в базисе \mathcal{B}_+ , поскольку бесповторные формулы $x_1 \oplus 1$ и $((x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) \oplus 1)$ над \mathcal{B}_+ реализуют ФАЛ \bar{x}_1 и $x_1 \vee x_2$ соответственно. Оказывается, что базис \mathcal{B}_0 допускает бесповторное моделирование в любом базисе \mathcal{B} . Именно это означает следующее утверждение, которое вытекает, по существу, из полноты системы базисных ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^b$ и из лемм о немонотонной и нелинейной ФАЛ (см. [6]).

Лемма 8.2. *Существуют неповторные формулы \mathcal{F}_\neg , $\mathcal{F}_\&$ и \mathcal{F}_\vee над базисом B , которые реализуют ФАЛ \bar{x}_1 , $x_1 \cdot x_2$ и $x_1 \vee x_2$ соответственно.*

Доказательство. В силу полноты системы ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^b$ можно построить формулы \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_1 от БП y над B , которые реализуют константы 0, 1 и являются неповторными в связи с отсутствием существенных БП. Из полноты следует также, что среди базисных ФАЛ есть немонотонная ФАЛ $\varphi'(x_1, \dots, x_{k'})$ и нелинейная ФАЛ $\varphi''(x_1, \dots, x_{k''})$. В силу леммы о немонотонной ФАЛ найдется набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k'})$ из $B^{k'}$ и число i , $1 \leq i \leq k'$, такие, что

$$\varphi'(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k'}) = \bar{x}_i.$$

Следовательно, формула

$$\mathcal{F}_\neg(x) = \mathcal{F}_\neg(x, y) = \varphi'(\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{i-1}}, x, \mathcal{F}_{\alpha_{i+1}}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{k'}})$$

является неповторной формулой над B , реализующей ФАЛ \bar{x} . Положим:

$$\mathcal{F}_\neg^{(1)}(x, y) = \mathcal{F}_\neg(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_\neg^{(0)}(x, y) = x.$$

Из доказательства леммы о нелинейной ФАЛ следует, что найдется такой набор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k''})$ из $B^{k''}$, натуральные числа i и j , $1 \leq i < j \leq k''$, а также константа γ , $\gamma \in B$, для которых

$$\varphi''(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x_i \oplus \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{j-1}, x_j \oplus \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{k''}) = x_i \cdot x_j \oplus \gamma.$$

Тогда формула $\mathcal{F}_\&$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\&(x_1, x_2, y) = \mathcal{F}_\neg^{(\gamma)} \left(\varphi''(\mathcal{F}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_{i-1}}, \mathcal{F}_\neg^{(\beta_i)}(x_1, y), \mathcal{F}_{\beta_{i+1}}, \dots, \right. \\ \left. \dots, \mathcal{F}_{\beta_{j-1}}, \mathcal{F}_\neg^{(\beta_j)}(x_2, y), \mathcal{F}_{\beta_{j+1}}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_{k''}}), y \right) \end{aligned}$$

является неповторной формулой над B и реализует ФАЛ $x_1 \cdot x_2$. Бесповторная формула $\mathcal{F}_\vee(x_1, x_2, y)$, которая реализует ФАЛ $x_1 \vee x_2$, получается из формулы

$$\mathcal{F}_\neg(\mathcal{F}_\&(\mathcal{F}_\neg(x_1, y), \mathcal{F}_\neg(x_2, y), y), y)$$

«удалением» всех вхождений двух последовательных формул \mathcal{F}_\neg .

Лемма доказана. \square

Заметим, что базис B_+ не допускает неповторного моделирования в базисе B_0 , поскольку ФАЛ $x_1 \oplus x_2$ не может быть реализована в нем неповторной формулой.

Рассмотрим теперь вопросы моделирования ЭП формул в базисе B с помощью ЭП формул базиса B' . Пусть $\Phi' = (\Phi'_1, \dots, \Phi'_b)$ — система формул перехода от базиса

Б к базису B' , а $\Pi' = (\Pi'_1, \dots, \Pi'_b)$ — система тождеств перехода, связанная с Φ' . Заметим, что любое ЭП для формул из \mathcal{U}_B^Φ , имеющее вид

$$\mathcal{F} \underset{\tau}{\rightrightarrows} \widehat{\mathcal{F}}, \quad (8.2)$$

может быть «промоделировано» с помощью ЭП для формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$ вида

$$\mathcal{F}' \underset{\tau'}{\rightrightarrows} \widehat{\mathcal{F}'}, \quad (8.3)$$

где $\mathcal{F}' = \Pi'(\mathcal{F})$, $\widehat{\mathcal{F}'} = \Pi'(\widehat{\mathcal{F}})$ и $\tau' = \Pi'(\tau)$. Действительно, пусть ЭП (8.2) является однократным ЭП на основе тождества t , $t \in \tau$, которое имеет вид

$$t : \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_q) = \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_q),$$

и пусть формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается в результате замены подформулы $\mathfrak{A}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$ формулы \mathcal{F} формулой $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q)$. Тогда тождество $t' = \Pi'(t)$ имеет вид

$$t' : \mathfrak{A}'(x_1, \dots, x_1) = \mathfrak{B}'(x_1, \dots, x_q),$$

где $\mathfrak{A}' = \Pi'(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}' = \Pi'(\mathfrak{B})$, а формула $\widehat{\mathcal{F}'}$ может быть получена из формулы \mathcal{F}' в результате замены ее подформулы $\mathfrak{A}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$, где $\mathcal{F}'_j = \Pi'(\mathcal{F}_j)$ для всех j , $j \in [1, q]$, формулой $\mathfrak{B}'(\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_q)$. Моделирование кратного ЭП вида (8.2) с помощью кратного ЭП вида (8.3) осуществляется путем последовательного моделирования однократных ЭП, составляющих ЭП (8.2).

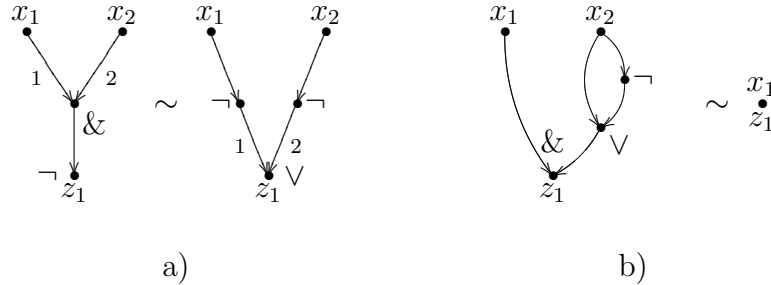
Описанное выше моделирование позволяет выполнять ЭП для тех эквивалентных формул из \mathcal{U}_B^Φ , которые принадлежат множеству $\Pi'(\mathcal{U}_{B'}^\Phi)$, то есть являются «моделями» формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, на основе системы тождеств $\Pi'(\tau)$, являющихся «моделями» тождеств из τ . Для того, чтобы проводить ЭП для произвольных формул из \mathcal{U}_B^Φ , с использованием системы тождеств $\Pi'(\tau)$, выберем какую-либо систему формул перехода $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{b'})$ от базиса B' к базису B и рассмотрим связанную с ней систему тождеств перехода $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_{b'})$. Пусть $\check{\Pi}$ — система тождеств вида $\check{\Pi} = \Pi'(\Pi)$ для ЭП формул из $\mathcal{U}_{B'}^\Phi$, которая получается в результате структурного моделирования правых частей тождеств из Π на основе системы тождеств Π' . Для произвольной формулы \mathcal{F}' , $\mathcal{F}' \in \mathcal{U}_{B'}^\Phi$, положим

$$\check{\Pi}(\mathcal{F}') = \Pi'(\Pi(\mathcal{F}'))$$

и заметим, что

$$\mathcal{F}' \underset{\check{\Pi}}{\rightrightarrows} \check{\mathcal{F}'} = \check{\Pi}(\mathcal{F}'), \quad \check{\mathcal{F}'} \in \Pi'(\mathcal{U}_B^\Phi).$$

В силу сказанного выше отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

Рис. 8.1: тождества $\underline{t_{\&t}^M}$ и $\underline{t_{1,\&t}^{ПК}}$

Теорема 8.1 (теорема перехода). Пусть τ — КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , а Π' и Π — системы тождеств для перехода от базиса B к базису B' и от базиса B' к базису B соответственно. Тогда система тождеств $\{\Pi'(\tau), \Pi(\Pi)\}$ является КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ .

Следствие. Из системы тождеств $\tau^{\text{осн}}$ для ЭП формул из \mathcal{U}^Φ (см. §3 главы 1) указанным в теореме способом можно получить КПСТ для ЭП формул в любом базисе B .

Опираясь на полученные результаты, рассмотрим теперь вопросы ЭП СФЭ. Мы будем использовать введенные в §6 общие понятия и определения, касающиеся ЭП схем, считая подстановкой СФЭ переименование (с возможным отождествлением) ее входных БП и переименование (с возможным дублированием и снятием) ее выходных БП. Напомним, что формулы представляют собой частный случай СФЭ, и для определенности будем считать, что любая формула \mathcal{F} из \mathcal{U}_B^Φ является формулой-словом (см. §2 главы 1), а соответствующую ей формулу-граф (см. §2) будем обозначать через $\underline{\mathcal{F}}$. При этом тождеству $t: \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, где $\mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \mathcal{U}_B^\Phi$, будет соответствовать тождество $\underline{t}: \underline{\mathcal{F}}' \sim \underline{\mathcal{F}}''$, где $\underline{\mathcal{F}}', \underline{\mathcal{F}}'' \in \mathcal{U}_B^C$, являющееся «схемным» аналогом тождества t . Множество СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{U}_B^\Phi$, будем обозначать через $\underline{\mathfrak{F}}$, а систему тождеств вида \underline{t} , где $t \in \tau$, а τ — система тождеств для \mathcal{U}_B^Φ , — через $\underline{\tau}$. Так, на рис. 8.1a и 8.1b приведены тождества $\underline{t_{\&t}^M}$ и $\underline{t_{1,\&t}^{ПК}}$ из системы $\underline{\tau^{\text{осн}}}$ (см. §3 главы 1).

На рис. 8.2a и 8.2b показаны тождество ветвления $t_{\mathcal{E}_i}^B$ и тождество снятия $t_{\mathcal{E}_i}^C$ для функционального элемента \mathcal{E}_i , $i \in [1, b]$, соответственно, а на рис. 8.2c — тождество снятия входа $t_{\text{вх}}^C$. Заметим, что эти тождества не являются аналогами формульных тождеств и положим

$$\tau_B^B = \{t_{\mathcal{E}_i}^B\}_{i=1}^b, \quad \tau_B^C = \{t_{\mathcal{E}_i}^C\}_{i=1}^b \cup \{t_{\text{вх}}^C\}.$$

Очевидно, что с помощью этих тождеств можно избавиться от всех висячих вершин и всех внутренних ветвлений, имеющих в СФЭ. Следовательно, для любой СФЭ

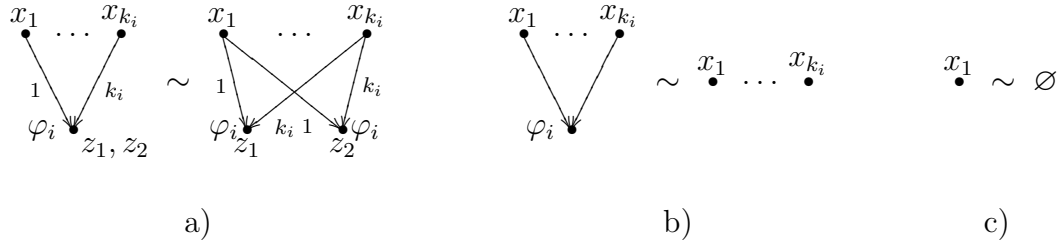


Рис. 8.2: тождества ветвления, снятия ФЭ и снятия входа

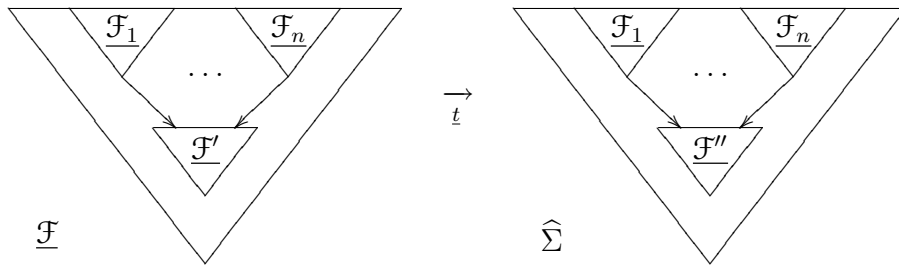


Рис. 8.3: моделирование ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

$\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, существует ЭП вида $\Sigma \xrightarrow[\{\tau^C, \tau^B\}]{} \underline{\mathcal{F}}$, где \mathcal{F} — формула (система формул) из \mathcal{U}_B^Φ .

Пусть, далее, $\mathcal{F} \xrightarrow[t]{} \widehat{\mathcal{F}}$ — однократное ЭП для формул из \mathcal{U}_B^Φ , где тождество t имеет вид

$$t: \mathcal{F}'(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{F}''(x_1, \dots, x_n),$$

а формула $\widehat{\mathcal{F}}$ получается из формулы \mathcal{F} заменой подформулы $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулой $\mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. Сопоставим этому ЭП «моделирующее» его однократное ЭП СФЭ вида $\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow[t]{} \widehat{\Sigma}$ (см. рис. 8.3). Заметим, что в том случае, когда формулы \mathcal{F}' и \mathcal{F}'' являются абсолютными формулами, а БП x_1, \dots, x_n — их существенными БП, СФЭ $\widehat{\Sigma}$ совпадает с СФЭ $\underline{\mathcal{F}}''$. В остальных случаях из подформулы вида $\mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ формулы \mathcal{F} необходимо с помощью тождеств τ_B^B формировать сначала подсхему $\underline{\mathcal{F}}'(\underline{\mathcal{F}}_1, \dots, \underline{\mathcal{F}}_n)$, а затем применить тождество t . При этом в СФЭ $\widehat{\Sigma}$ могут появиться висячие вершины или внутренние «ветвления» и для перехода от $\widehat{\Sigma}$ к $\widehat{\mathcal{F}}$ необходимо провести ЭП вида $\widehat{\Sigma} \xrightarrow[\{\tau^C, \tau^B\}]{} \widehat{\mathcal{F}}$. Следовательно, для любого ЭП вида $\mathcal{F} \xrightarrow[\tau]{} \widehat{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, существует моделирующее его ЭП вида

$$\underline{\mathcal{F}} \xrightarrow[\{\tau_B^B, \tau_B^C\}]{} \widehat{\underline{\mathcal{F}}}.$$

На рис. 8.4 показано ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C , которое моделирует следующее ЭП для формул

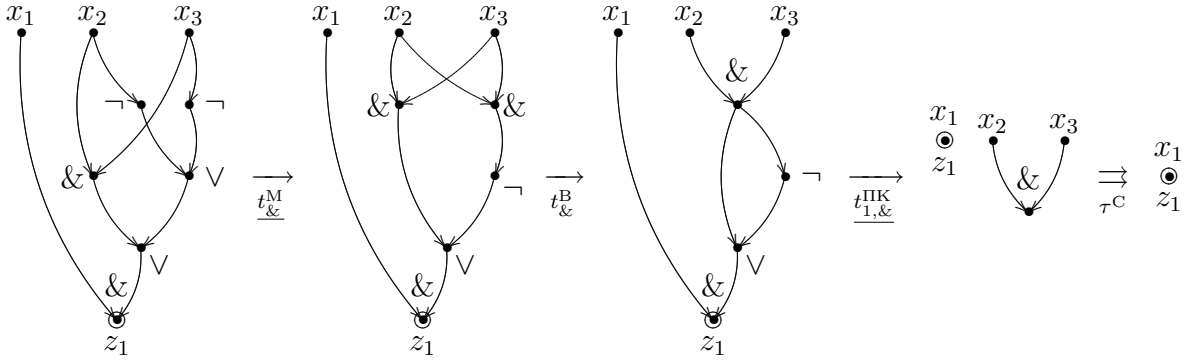


Рис. 8.4: пример моделирования ЭП формул с помощью ЭП СФЭ

из \mathcal{U}^Φ

$$x_1(x_2x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \xrightarrow{t_{\&}^M} x_1(x_2x_3 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}) \xrightarrow{t_{\neg, \&}^{ПК}} x_1.$$

Из описанного выше способа «моделирования» ЭП формул с помощью ЭП СФЭ, а также способа перехода от формул к СФЭ и обратно на основе ЭП с помощью тождеств τ^B , τ^C вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 8.2. Если τ – КПСТ для ЭП формул из \mathcal{U}_B^Φ , то $\{\tau, \tau^C, \tau^B\}$ – КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}_B^C .

Следствие. Система тождеств $\{\tau^{осн}, \tau^C, \tau^B\}$ – КПСТ для ЭП СФЭ из \mathcal{U}^C .

§9 Некоторые виды бинарных программ.

Логические схемы программ Ю. И. Янова

Схема Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, с монотонной нумерацией вершин (см. §1), называется *вычисляющей бинарной программой (ВБП)* над базисом B (см., например, [1]). Пусть схема $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$, и пусть, для определенности, v_i , $i \in [1, p]$, где $p = |V(\Sigma)|$, – вершина с номером i , причем вершины v_1, \dots, v_n имеют пометки x_1, \dots, x_n , а вершины v_{j_1}, \dots, v_{j_m} – пометки z_1, \dots, z_m соответственно. Сопоставим вершине v_i , $i \in [1, p]$, «внутреннюю» БП u_i и будем считать, что v_i выполняет команду с номером i , которая является:

- а) командой ввода $u_i = x_i$, если $i \in [1, n]$;

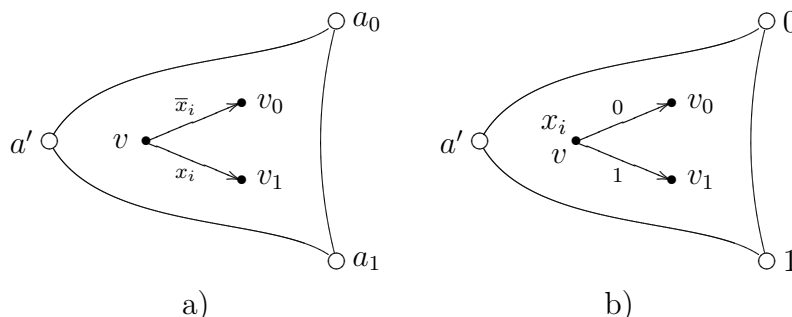


Рис. 9.1: к определению BDD

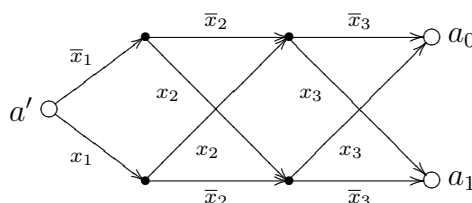


Рис. 9.2: BDD для l_3

- b) вычисляющей командой $u_i = \varphi^{(i)}(u_1^{(i)}, \dots, u_{k^{(i)}}^{(i)})$, где $\varphi^{(i)}$ — ФС от $k^{(i)}$ БП, приписанный вершине v_i в Σ , а $u_j^{(i)}, j = 1, \dots, k^{(i)}$, — БП, сопоставленная начальной вершине дуги с номером j , входящей в v_i , если $i \in (n, p]$.

Кроме того, будем считать, что каждой вершине $v_{j_i}, i \in [1, m]$, соответствует команда с номером $(p + i)$, являющаяся командой вывода $z_i = u_{j_i}$.

Предполагается, что команды ВВП Σ выполняются последовательно в соответствии с их номерами в моменты времени $1, 2, \dots, p + m$ и что значение БП u_i , вычисленное момент времени $i, i \in [n, p]$, занимает отдельную битовую ячейку памяти на отрезке времени $[i, a_i]$, где a_i — максимальный номер команды, в которой встречается u_i . Максимальное число отрезков вида $[i, a_i]$, где $i \in (n, p]$ имеющих непустое пересечение, называется *шириной* ВВП Σ , и определяет минимальное число ячеек памяти, необходимых для работы ВВП Σ . Заметим, что число ФЭ ВВП Σ характеризует время выполнения ее вычисляющих команд на одном процессоре, а максимальная глубина вершин Σ — время выполнения ее вычисляющих команд на параллельных процессорах.

В последние годы активно изучается один специальный класс КС — т.н. двоичные решающие диаграммы (BDD), которые представляют собой, по существу, адресующие бинарные программы (см., например, [2, 8]). Схема Σ с одним входом a' и двумя выходами a_0, a_1 , называется *двоичной решающей диаграммой*, если она состоит из

ориентированных контактов и не имеет (ориентированных) циклов, а из каждой ее вершины v , отличной от выходов, исходят две дуги с противоположными пометками вида x_i, \bar{x}_i (см. рис. 9.1a). При этом вершине $v(a_0, a_1)$, обычно, сопоставляют пометку x_i (соответственно 0, 1), а пометки \bar{x}_i и x_i у исходящих из v ребер заменяют пометками 0 и 1 соответственно (см. рис. 9.1b). Заметим, что BDD Σ указанного вида от БП x_1, \dots, x_n реализует между входом a' и выходом a_1 некоторую ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$, между входом a' и выходом a_0 — ФАЛ $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$, а ФАЛ проводимости между a_0 и a_1 равна 0. В таком случае, обычно, считается что Σ реализует ФАЛ f . Так, например, BDD Σ , показанная на рис. 9.2 (ср. с рис. 4.3с), реализует ФАЛ $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Лемма 9.1. *Число попарно не эквивалентных BDD от переменных x_1, \dots, x_n , которые содержат не более чем q вершин, отличных от выходов, не превосходит $(16n(q+2))^{q+1}$.*

Доказательство. Легко видеть, что любая BDD рассматриваемого вида эквивалентна некоторой BDD Σ от БП x_1, \dots, x_n , которая содержит ровно q вершин, отличных от выходов. Сопоставим BDD Σ граф $\hat{\Sigma}$, получающийся из нее изменением ориентации всех дуг. Заметим, что указанное сопоставление является взаимно однозначным с точностью до изоморфизма, а $\hat{\Sigma}$ — ориентированный ациклический граф с одним стоком и двумя истоками, помеченными символами 0, 1, в котором каждая отличная от истока вершина имеет две входящие дуги и помечена одной из БП x_1, \dots, x_n . Используя рассуждения из доказательства теоремы 3.1, число попарно не изоморфных графов $\hat{\Sigma}$ указанного вида можно оценить сверху числом $(16n(q+2))^{q+1}$.

Лемма доказана. □

Глава 3

Задача синтеза и некоторые методы ее решения

§1 Задача синтеза для основных классов схем и связанные с ней понятия. Поведение функции Шеннона для ДНФ

Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения. При этом будем считать известными все понятия, определения и обозначения из [1, 2].

Рассмотрим сначала формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) над базисом B , $B = \{\varphi_1, \dots, \varphi_b\}$, где φ_i , $i = 1, \dots, b$, — функция алгебры логики (ФАЛ) от булевых переменных (БП) x_1, \dots, x_{k_i} . Предполагается, что ФАЛ φ_i реализуется на выходе функционального элемента (ФЭ) \mathcal{E}_i и, если $k_i \geq 2$, существенно зависит от всех своих БП. Предполагается также, что система базисных ФАЛ $\{\varphi_i\}_{i=1}^b$ полна в P_2 [12]. Будем считать, что каждому функциональному элементу \mathcal{E}_i , $i = 1, \dots, b$, сопоставлены положительные действительные числа L_i и T_i , называемые его «весом» и «задержкой», которые характеризуют сложность и время срабатывания \mathcal{E}_i соответственно. Предполагается, что «вес» и «задержка» любого ФЭ стандартного базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ равны 1.

Пусть \mathcal{U}_B^Φ , \mathcal{U}_B^C — классы формул и СФЭ над базисом B соответственно. Схему C , $C \in \mathcal{U}_B^\Phi$, которая состоит из t последовательно соединенных ФЭ, будем называть *цепью*, а число t — *длиной* этой цепи. Для цепи C длины t , состоящей из ФЭ $\mathcal{E}_{i_1}, \dots, \mathcal{E}_{i_t}$, число $T(C) = T_{i_1} + \dots + T_{i_t}$ будем называть *задержкой* этой цепи. Для каждой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, введем следующие параметры (функционалы сложности):

1. $S(\Sigma)$ ($L(\Sigma)$) — *размер* (соответственно, *сложность*) Σ , то есть число (соответственно, сумма «весов») всех ее ФЭ;

2. $D(\Sigma)$ ($T(\Sigma)$) — *глубина* (соответственно, *задержка*) Σ , то есть максимальная длина (соответственно, задержка) ее цепей;
3. $R(\Sigma)$ — *ранг* Σ , то есть число ребер, выходящих из ее входов.

Заметим, что функционал $S(D)$ является частным случаем функционала L (соответственно, T), когда веса (соответственно, задержки) всех ФЭ базиса B равны 1. Введем также (ср. [2, §1]) «многоходовую» сложность $\tilde{L}(\Sigma)$ (размер $\tilde{S}(\Sigma)$, задержку $\tilde{T}(\Sigma)$), которая равна сумме весов ФЭ Σ типа \mathcal{E}_i , где $k_i \geq 2$ (соответственно, числу таких ФЭ в Σ , максимальной сумме задержек ФЭ указанного вида), лежащих на одной цепи Σ .

Для некоторых типов СФЭ можно рассматривать и другие функционалы сложности. Так, например, для дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) будем рассматривать их *длину*, то есть число элементарных дизъюнкций (ЭК), и тому подобные.

Рассмотрим теперь класс \mathcal{U}^Π — класс проводящих схем (ПС) (иначе — контактно-вентильных схем) с разделенными полюсами (см. [2, §3,4]), а также его подклассы — класс \mathcal{U}^K ($\mathcal{U}^{\vec{K}}$), который состоит из $(1, m)$ -КС, построенных из неориентированных (соответственно, ориентированных) контактов, класс \mathcal{U}^π , состоящий из всех π -схем, и класс \mathcal{U}^{BDD} , состоящий из BDD. Под сложностью $L(\Sigma)$ схемы Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^\Pi$, будем понимать число ее ребер и дуг.

Для удобства будем считать, что в класс \mathcal{U}^π (\mathcal{U}_B^Φ) входят не только отдельные π -схемы (соответственно, формулы), но и составленные из них системы. При этом систему π -схем (формул) вида $\Sigma = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$ будем рассматривать как схему из класса \mathcal{U}^K (соответственно, \mathcal{U}_B^C) с m выходами, которая получается в результате отождествления входов (соответственно, входов с одинаковыми входными БП) у всех схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ и реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$, где f_i — ФАЛ, реализуемая схемой Σ_i , $i = 1, \dots, m$. Для построенной схемы выполняется равенство

$$L(\Sigma) = \sum_{i=1}^m L(\Sigma_i), \quad (1.1)$$

а в случае формул, кроме того, равенство

$$T(\Sigma) = \max_{1 \leq i < m} T(\Sigma_i). \quad (1.2)$$

Заметим, что любой из введенных выше классов схем является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ . Пусть \mathcal{U} — один из этих классов или какой-либо другой полный класс схем, а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса \mathcal{U} , то есть отображение \mathcal{U} во множество действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *неотрицательности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq 0$, $\Sigma \in \mathcal{U}$, а также свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geq \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин (ребер) или отождествления вершин (см. [2, §4], [2, §3]). Все

введенные выше функционалы сложности этими свойствами обладают. Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе \mathcal{U} как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из \mathcal{U} , которые реализуют F . При этом схема Σ , принадлежащая классу \mathcal{U} , которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе \mathcal{U} относительно функционала Ψ . Величину $\Psi(F)$ в том случае, когда функционал Ψ совпадает с введенным выше функционалом $L(S, D, T, R, \text{ и т. д.})$ будем называть *сложностью* (соответственно, *размером*, *глубиной*, *задержкой*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ F* . Обозначим через $P_2(n)$, $n = 1, 2, \dots$, множество всех ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n , то есть ФАЛ, отображающих единичный n -мерный куб B^n , где $B = \{0, 1\}$, в B , и пусть $P_2^m(n) = \underbrace{P_2(n) \times \dots \times P_2(n)}_m$ — множество всех систем из m ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n .

Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая обычно называется функцией Шеннона для класса \mathcal{U} относительно функционала сложности Ψ . В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида \mathcal{U}_B^A (\mathcal{U}^A) будем обозначать через $\Psi_B^A(F)$ (соответственно, $\Psi^A(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi_B^A(n)$ (соответственно, $\Psi^A(n)$). Следуя [1, 2], в обозначениях классов \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}_B^Φ , а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс B вида B_0 будем опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем \mathcal{U}' и \mathcal{U}'' соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leq \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_B^C(F) \leq \Psi_B^\Phi(F), \quad \Psi^K(F) \leq \Psi^\pi(F),$$

и т. д. Для любой СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, которая реализует систему ФАЛ F , существует эквивалентная формула (система формул) \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_B^\Phi$, которая получается из Σ с помощью эквивалентных преобразований на основе тождества «поднятия» ветвлений к входам (см. [3, §4]). Следовательно,

$$T(\Sigma) = T(\mathcal{F}), \quad T_B^C(F) = T_B^\Phi(F),$$

и поэтому положим

$$\begin{aligned} T_B(F) &= T_B^C(F) = T_B^\Phi(F), \\ D_B(F) &= D_B^C(F) = D_B^\Phi(F), \end{aligned}$$

а также введем функции Шеннона

$$\begin{aligned} T_B(n) &= T_B^C(n) = T_B^\Phi(n), \\ D_B(n) &= D_B^C(n) = D_B^\Phi(n), \end{aligned}$$

При этом в силу (1.2) для системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ справедливо равенство

$$T_B(F) = \max_{1 \leq i \leq m} T_B(f_i).$$

Заметим, что с учетом (1.1) для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} L(f_i) \leq L(F) \leq \sum_{i=1}^m L(f_i).$$

В случае базиса B_0 , как уже отмечалось выше, для СФЭ Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^C$, имеют место равенства

$$L(\Sigma) = S(\Sigma), \quad T(\Sigma) = D(\Sigma),$$

и поэтому

$$L^C(F) = S^C(F), \quad L^\Phi(F) = S^\Phi(F), \quad T(F) = D(F)$$

для любой системы ФАЛ F .

Схему Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}^K$, будем называть *ориентируемой*, если в результате придания некоторой ориентации каждому из контактов Σ из нее можно получить КС $\vec{\Sigma}$, $\vec{\Sigma} \in \mathcal{U}^{\vec{K}}$, реализующую те же самые ФАЛ. Заметим, что любая π -схема является ориентируемой КС, и поэтому

$$L^\pi(F) \geq L^{\vec{K}}(F)$$

для любой системы ФАЛ F .

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе ФАЛ F реализующей ее схемы Σ , которая принадлежит заданному классу и является минимальной относительно заданного функционала сложности. Частными случаями этой задачи являются задачи, связанные с оценками сложности той или иной системы ФАЛ или функции Шеннона. Как следует из [1, §4], [2, §3] и монотонности функционала сложности, минимальную схему в классах \mathcal{U}_B^C , \mathcal{U}^Π , \mathcal{U}^K , $\mathcal{U}^{\vec{K}}$ всегда можно найти среди приведенных схем или, более того, среди строго приведенных схем.

Обозначим через $\mathcal{U}^{\text{ДНФ}}$ класс всех ДНФ и рассмотрим, в заключение, поведение функции Шеннона для некоторых функционалов сложности в этом классе. Для ДНФ \mathfrak{A} через $R(\mathfrak{A})$ будем по-прежнему обозначать ее ранг, а через $\lambda(\mathfrak{A})$ — длину ДНФ \mathfrak{A} . Далее, в соответствии с общими правилами, через $R^{\text{ДНФ}}(f)$ и $\lambda^{\text{ДНФ}}(f) = \lambda(f)$ будут обозначаться ранг и длина ДНФ ФАЛ f , а через $R^{\text{ДНФ}}(n)$ и $\lambda(n)$ — соответствующие функции Шеннона в классе $\mathcal{U}^{\text{ДНФ}}$.

Теорема 1.1. Для любого натурального n имеют место равенства

$$R^{\text{ДНФ}}(n) = n2^{n-1}, \quad \lambda(n) = 2^{n-1}, \quad (1.3)$$

причем для некоторой неотрицательной последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, стремящейся к 0 при n стремящемся к бесконечности, и для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства

$$R^{\text{ДНФ}}(n) \leq (1 + \varepsilon(n)) \frac{3}{8} n 2^n, \quad \lambda(f) \leq (1 + \varepsilon(n)) \frac{3}{8} 2^n. \quad (1.4)$$

Доказательство. Нижние оценки (1.3) достигаются на линейной ФАЛ $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$, которая имеет единственную ДНФ от своих существенных БП — совершенную ДНФ, и для которой поэтому

$$R^{\text{ДНФ}}(\ell_n) = n2^{n-1}, \quad \lambda(\ell_n) = 2^{n-1}.$$

С другой стороны, разлагая произвольную ФАЛ из $P_2(n)$ по БП x_n , получим:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdots x_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n). \quad (1.5)$$

Поскольку $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n)$ совпадает с одной из ФАЛ $\{x_n, \bar{x}_n, 0, 1\}$, то, подставив соответствующую ФАЛ от БП x_n вместо $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x_n)$ в каждое слагаемое правой части (1.5) и применив тождества $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x = x \vee 0$, мы получим ДНФ \mathfrak{A}_f , длина которой не больше, чем 2^{n-1} , а ранг не больше, чем $n2^{n-1}$. Следовательно, равенства (1.3) доказаны.

Заметим, что длина ДНФ \mathfrak{A}_f равна числу пар, составленных из тех соседних по БП x_n наборов куба B^n , на которых ФАЛ f одновременно в 0 не обращается. Следовательно, число ФАЛ f , удовлетворяющих неравенству $\lambda(\mathfrak{A}_f) \leq \lambda$, равно сумме

$$\sum_{i=0}^{\lambda} \binom{2^{n-1}}{i} 3^i = 2^{2^n} \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{2^{n-1}}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n-1}-i},$$

которая при

$$\lambda = \frac{3}{8} (2^n + n2^{\frac{n}{2}})$$

не меньше, чем (см., например, [1]) $2^{2^n} (1 - \delta(n))$, где $\delta(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности. Таким образом, при

$$\varepsilon(n) = n2^{-\frac{n}{2}}$$

доля тех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, для которых не выполнены неравенства (1.4), не больше, чем $\delta(n)$, и, следовательно, стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности.

Теорема доказана. \square

§2 Простейшие методы синтеза схем. Реализация некоторых функций

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма (см. §4 главы 1), который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для получения верхних оценок сложности ФАЛ можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ в классах \mathcal{U}^Φ (см. §8 главы 2) и \mathcal{U}^π (см. §5 главы 2). На основе этого моделирования с учетом результатов §3 главы 2 доказывается следующее утверждение (ср. с леммой 4.1 из [1, §4]).

Лемма 2.1. *Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ существует формула \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ , которые реализуют f , и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}) \leq 2n \cdot |N_f|, \quad (2.1)$$

$$T(\mathcal{F}) \leq \lceil \log n \rceil + \lceil \log |N_f| \rceil + 1, \quad (2.2)$$

$$L(\Sigma) \leq n |N_f|.$$

Следствие 1.

$$L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1},$$

$$T(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 1,$$

$$L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n.$$

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:

- линейной ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$, где

$$\ell_n = \ell_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n;$$

- мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n , то есть ФАЛ вида

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} \cdot y_{\nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n))};$$

- дешифратора Q_n (дизъюнктивного дешифратора J_n) порядка n , то есть системы из всех ЭК (соответственно, ЭД) ранга n от БП x_1, \dots, x_n , где ЭК $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$ (соответственно ЭД $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$) имеют номер $\nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) + 1$;

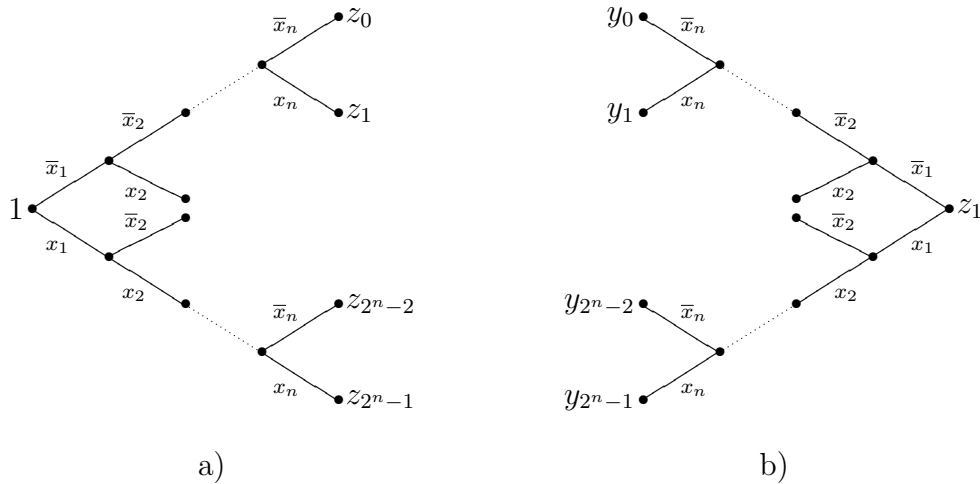


Рис. 2.1: контактный дешифратор и итеративный контактный мультиплексор

4. универсальной системы $\vec{P}_2(n)$ порядка n , состоящей из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Следуя [1], будем называть также (схемным) мультиплексором, дизъюнктивным мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополосником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ. На рис. 2.1а приведено контактное дерево (КД) порядка n от БП $x = (x_1, \dots, x_n)$, которое представляет собой $(1, 2^n)$ -КС, реализующую на выходе z_i , $0 \leq i \leq 2^n - 1$, ЭК $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = i$, и является, следовательно, контактным дешифратором порядка n . На рис. 2.1б показано итеративное контактное дерево (ИКД) порядка n от (управляющих) БП $x = (x_1, \dots, x_n)$ и входных итеративных переменных $y = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$, которое представляет собой $(2^n, 1)$ -ИКС, реализующую ФАЛ $\mu_n(x, y)$, и является, следовательно, итеративным контактным мультиплексором порядка n .

Пример контактного мультиплексора порядка n дает π -схема от БП x и y , приведенная на рис. 2.2, входом которой является вход содержащегося в ней КД порядка n от БП x , и которая получается в результате соединения выхода z_i , $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, этого КД с выходом схемы. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 2.1 и 2.2, равна $2^{n+1} - 2$ и $3 \cdot 2^n - 2$ соответственно, причем число контактов с отрицаниями БП набора x в каждой из них равно $2^n - 1$. Напомним, что в [1, §5] были приведены оценки для сложности и глубины дешифратора и мультиплексора в классе СФЭ, которые мы дополним следующими оценками.

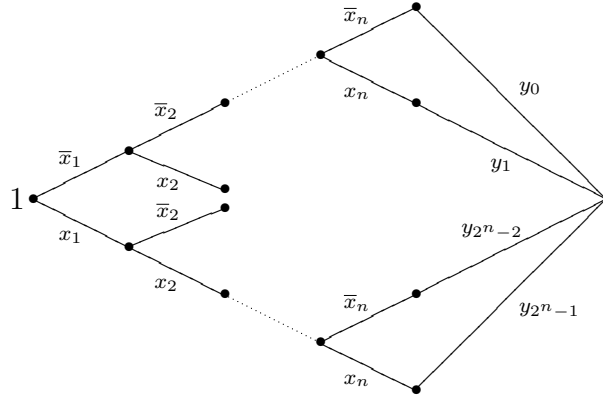


Рис. 2.2: контактный мультиплексор

Лемма 2.2. Для любого n , $n = 1, 2, \dots$, существует неповторная по переменным y_0, \dots, y_{2^n-1} формула \widehat{F}_n , $\widehat{F}_n \in \mathcal{U}^\Phi$, которая реализует ФАЛ μ_n со сложностью

$$L(\widehat{F}_n) \leq 2^{n+2} - 2. \quad (2.3)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что искомая формула \widehat{F}_n получается в результате моделирования π -схемы, показанной на рис. 2.2, в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. [2, §4]).

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. Для любого натурального n существует неповторная по переменным y_0, \dots, y_{2^n-1} формула \check{F}_n , $\check{F}_n \in \mathcal{U}^\Phi$, с поднятыми отрицаниями, которая реализует ФАЛ μ_n , и для которой

$$L(\check{F}_n) \leq 2^{n+1} (2 + \lceil \log n \rceil), \quad (2.4)$$

$$D(\check{F}_n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2, \quad (2.5)$$

причем глубина $D(\check{F}_n, y_i)$ формулы \check{F}_n по любой ВП y_i , $i = 0, \dots, 2^n - 1$, удовлетворяет неравенству

$$D(\check{F}_n, y_i) \leq n + 2. \quad (2.6)$$

Доказательство. Искомая формула \check{F}_n имеет вид

$$\check{F}_n = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-t}) \in B^{n-t}} x_1^{\sigma_1} \cdots x_{n-t}^{\sigma_{n-t}} \left(\bigvee_{(\sigma_{n-t+1}, \dots, \sigma_n) \in B^t} x_{n-t+1}^{\sigma_{n-t+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} y_{\nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n))} \right),$$

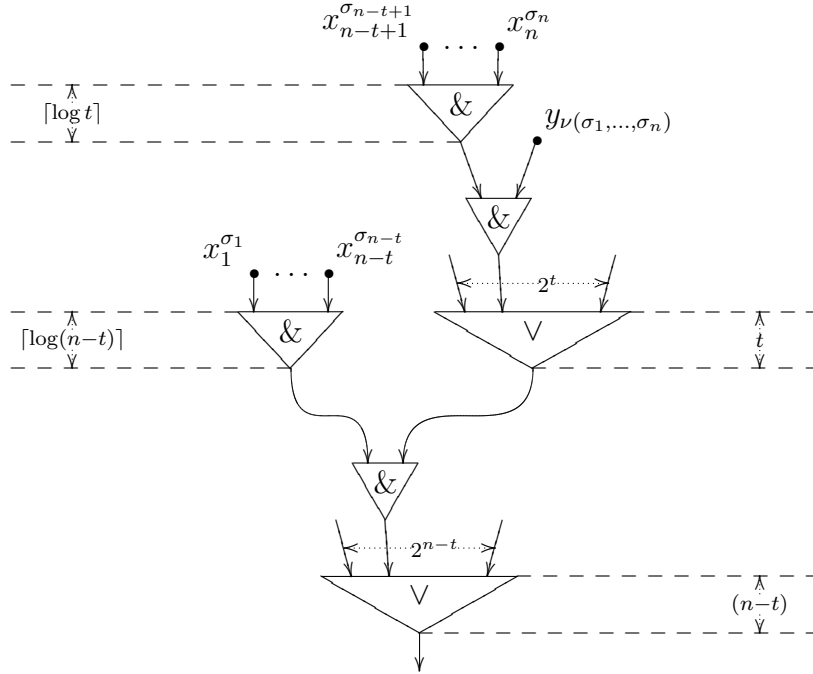


Рис. 2.3: к доказательству леммы 2.3

где $1 \leq t \leq n$, а каждая конъюнкция букв $x_1^{\sigma_1} \cdots x_{n-t}^{\sigma_{n-t}}$ или $x_{n-t+1}^{\sigma_{n-t+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$ и связанная с этими ЭК «внешняя» дизъюнкция реализованы с помощью деревьев минимальной глубины, построенных из соответствующих ФЭ (см. рис. 2.3). Заметим, что \check{F}_n бесповторна по БП y_0, \dots, y_{2^n-1} , и что

$$\begin{aligned} R(\check{F}_n) &= (n-t)2^{n-t} + (t+1)2^n, \\ D(\check{F}_n) &\leq (n-t) + 2 + \max\{\lceil \log(n-t) \rceil, t + \lceil \log t \rceil + 1\}, \\ D(\check{F}_n, y_i) &\leq n + 2. \end{aligned}$$

Следовательно, при

$$t = \lceil \log n \rceil - 1$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} L(\check{F}_n) &\leq 2R(\check{F}_n) \leq 2^{n+2} + \lceil \log n \rceil 2^{n+1}, \\ D(\check{F}_n) &\leq n + \lceil \log n \rceil + 2, \\ D(\check{F}_n, y_i) &\leq n + 2, \end{aligned}$$

из которых вытекает (2.4)–(2.6).

Лемма доказана. □

Следующее утверждение доказывается путем моделирования совершенной ДНФ на базе КД порядка n , реализующего систему ФАЛ Q_n (см. рис. 2.1а).

Лемма 2.4. *Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существует π -схема Σ и формула \mathcal{F} , $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f , и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\Sigma) \leq 2^n + |N_f| - 2, \quad L(\mathcal{F}) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Доказательство. В качестве Σ можно взять π -схему, которая получается из КД от БП x_1, \dots, x_n , реализующего систему ФАЛ Q_n , в результате удаления тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f , и отождествления остальных выходов КД (см. [2, §3]). Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma) \leq 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Формула \mathcal{F} получается в результате моделирования построенной π -схемы Σ в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. [2, §4]), и поэтому

$$R(\mathcal{F}) = L(\Sigma), \quad L(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F}) + \|I(\Sigma)\| - 1,$$

где $\|I(\Sigma)\|$ — число размыкающих контактов в схеме Σ . Следовательно,

$$L(\mathcal{F}) \leq L(\Sigma) + 2^n - 2 \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.

Лемма доказана. □

Замечание. Существует π -схема и формула из \mathcal{U}^Φ сложности 2, которые реализуют ФАЛ 0.

Следствие.

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2, \quad (2.7)$$

$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4. \quad (2.8)$$

§3 Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов

Приведенные в §2 простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π -схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов [10, 9] является достаточно простым и в то же

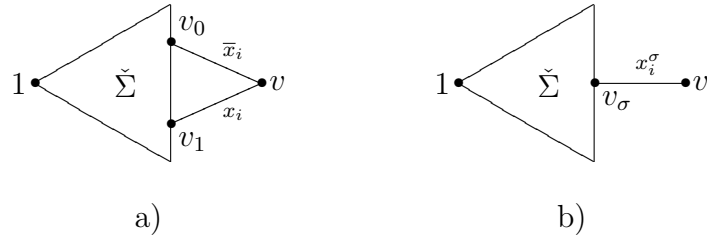


Рис. 3.1: к определению метода каскадов для КС

время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Для построения соответствующей контактной схемы используется операция присоединения одного или двух противоположных контактов, которая заключается в следующем. Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \check{m})$ -КС $\check{\Sigma}$ в результате добавления новой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\check{\Sigma}$ контактами \bar{x}_i и x_i соответственно (см. рис. 3.1a). Тогда в вершинах v_0 и v_1 КС Σ реализуются те же самые ФАЛ g_0 и g_1 , что и в КС $\check{\Sigma}$, а в вершине v — ФАЛ g вида

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1. \quad (3.1)$$

Действительно, любая цепь контактной схемы Σ , идущая из ее входа в вершину v , проходит либо через вершину v_1 , либо через вершину v_0 , и, кроме того, в КС Σ нет таких проводящих цепей, которые соединяют вершины подсхемы $\check{\Sigma}$ КС Σ и отсутствуют в КС $\check{\Sigma}$. Следовательно, в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ g , а в каждой вершине ее подсхемы $\check{\Sigma}$ — та же самая ФАЛ, что и в соответствующей вершине «отдельной» КС $\check{\Sigma}$.

Аналогичные рассуждения будут справедливы и тогда, когда вершина v КС Σ связана с КС $\check{\Sigma}$ только одним контактом вида x_i^σ , $\sigma \in \{0, 1\}$, соединяющим ее с вершиной v_σ (см. рис. 3.1b). В этом случае в вершине v КС Σ реализуется ФАЛ

$$g = x_i^\sigma g_\sigma. \quad (3.2)$$

Переход от СФЭ \check{U} , $\check{U} \in \mathcal{U}^C$, которая реализует в выходных вершинах v_0 и v_1 ФАЛ g_0 и g_1 соответственно, к СФЭ U , $U \in \mathcal{U}^C$, которая реализует ФАЛ g , удовлетворяющую (3.1) ((3.2)), показан на рис. 3.2a (соответственно 3.2b). Заметим, что рассмотренные выше операции являются частными случаями корректной суперпозиции схем (см. §4 и [2, §5]).

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \dots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$ -КС Σ_F , $\Sigma_F \in \mathcal{U}^K$, и СФЭ

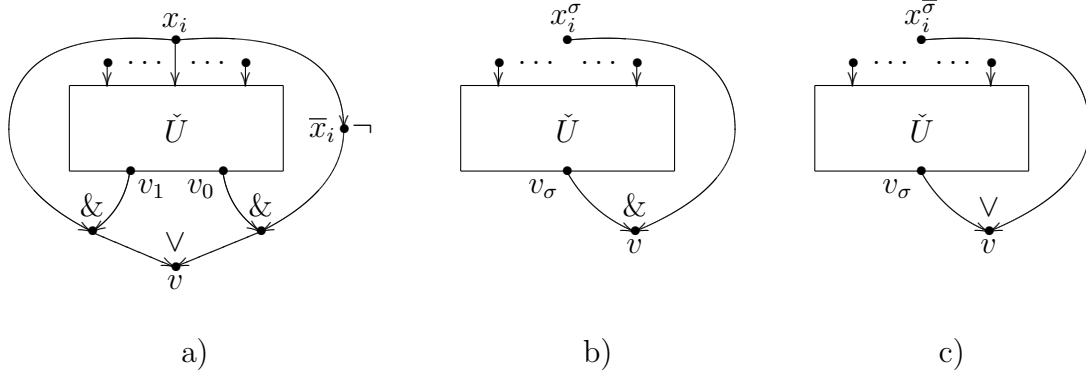


Рис. 3.2: к определению метода каскадов для СФЭ

$U_F, U_{\bar{F}} \in \mathcal{U}^C$, которые реализуют F . Будем считать, что все ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m системы F различны, отличны от констант, и для каждой БП $x_i, 1 \leq i \leq n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i .

Разложим ФАЛ f_1, f_2, \dots, f_m сначала по БП x_1 , потом по БП x_2 , и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и \hat{G}_i , состоящих из ФАЛ от БП x_i, x_{i+1}, \dots, x_n , где $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

1. G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \dots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq j \leq m, (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;

2. \hat{G}_i состоит из всех различных функций $g, g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i .

Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \dots, f_m\}, \quad \hat{G}_n \subseteq \{x_n, \bar{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\hat{G}_1, \dots, \hat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются. Положим, далее,

$$\check{G}_i = \bigcup_{j=i}^n \hat{G}_j, \quad \check{m}_i = |\check{G}_i| + 1,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, и пусть

$$\hat{G}_{n+1} = \check{G}_{n+1} = \emptyset, \quad \check{m}_{n+1} = 1.$$

Заметим, что любую ФАЛ $g, g \in \hat{G}_i$, где $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде (3.1), где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \dots, x_n)$, и, следовательно, $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех $\sigma, \sigma \in B$.

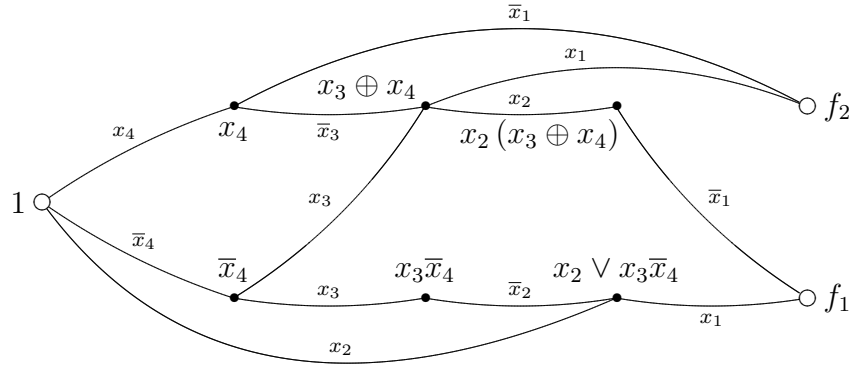


Рис. 3.3: КС для F , построенная методом каскадов, с помеченными вершинами

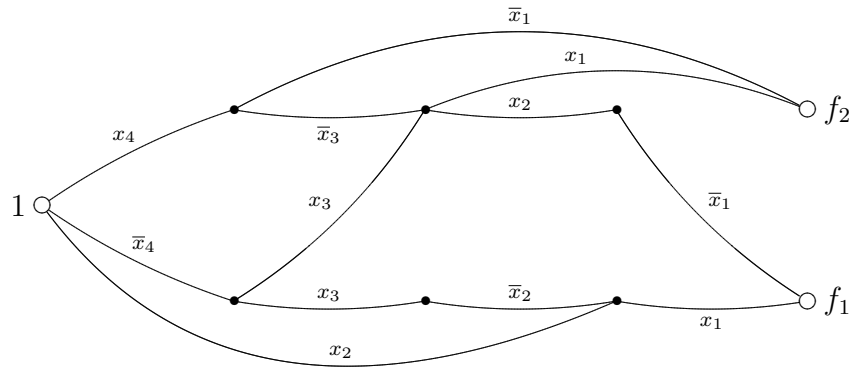


Рис. 3.4: КС для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов

Если при этом для некоторого σ , $\sigma \in B$, ФАЛ g_σ равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение (3.2), где $g_\sigma \in \check{G}_{i+1} \cup \{1\}$.

Пусть $(1, 1)$ -КС $\check{\Sigma}_{n+1}$ представляет собой изолированный вход, который одновременно является выходом, и реализует ФАЛ константу 1. Пусть, далее, для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, уже построена $(1, \check{m}_{i+1})$ -КС $\check{\Sigma}_{i+1}$, реализующая систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$. Построим тогда $(1, \check{m}_i)$ -КС $\check{\Sigma}_i$, которая реализует систему ФАЛ $\check{G}_i \cup \{1\}$ следующим образом:

1. КС $\check{\Sigma}_i$ содержит КС $\check{\Sigma}_{i+1}$ в качестве подсхемы, на выходах которой (они одновременно являются выходами $\check{\Sigma}_i$) реализуются ФАЛ из множества $\check{G}_{i+1} \cup \{1\}$;
2. Каждая ФАЛ g , $g \in \hat{G}_i$, реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе v КС $\check{\Sigma}_i$, который при $\alpha = 0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α подсхемы $\check{\Sigma}_{i+1}$, где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ так, как это показано на рис. 3.1a (соответственно рис. 3.1b).

Таким образом, построенная указанным выше способом КС $\check{\Sigma}_1$ реализует систему

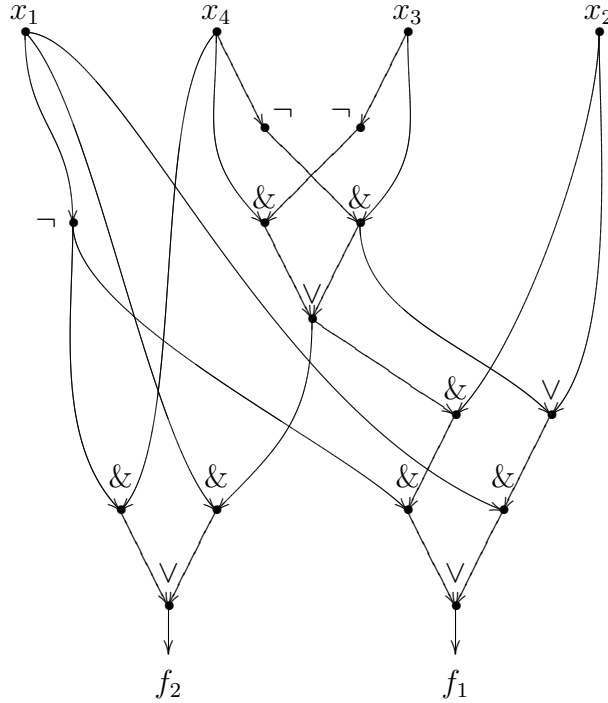


Рис. 3.5: СФЭ для системы ФАЛ F , построенная методом каскадов

ФАЛ $\check{G}_1 \cup \{1\}$, и для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_1$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от f_1, \dots, f_m . При этом константа 1 всегда реализуется КС $\check{\Sigma}_1$, а константа 0 может быть реализована в изолированной вершине, и поэтому их включение в систему ФАЛ F не влияет на построение КС Σ_F и ее сложность. Заметим также, что если при построении КС Σ_F все контакты ориентировать по направлению от вершины v_α к вершине v (см. второй этап построения КС $\check{\Sigma}_i$), мы получим ориентированную ациклическую $(1, m)$ -КС $\vec{\Sigma}_F$, которая реализует систему ФАЛ F .

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F , с той лишь разницей, что:

1. СФЭ \check{U}_n реализует систему ФАЛ I , состоящую из БП x_1, \dots, x_n , а также ФАЛ вида \bar{x}_i , $1 \leq i \leq n$, которые встречаются в КС Σ_F ;
2. для всех i , $i = (n - 1), \dots, 1$, при переходе от СФЭ \check{U}_{i+1} , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_{i+1} \cup I$, к СФЭ \check{U}_i , реализующей систему ФАЛ $\check{G}_i \cup I$, разложение (3.1), где $g \in \check{G}_i$ и $g_0, g_1 \in \check{G}_{i+1}$, реализуется так, как показано на рис. 3.2а, а разложение (3.2), применяемое в случае $g_\sigma = 0$ (разложение $g = x_i^\sigma \vee g_\sigma x_i^\sigma = x_i^\sigma \vee g_\sigma$ в случае $g_\sigma = 1$), — так, как показано на рис. 3.2б (соответственно, 3.2с).

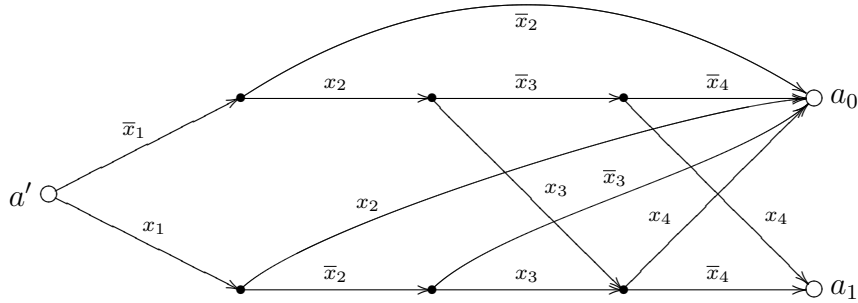


Рис. 3.6: BDD для f_1 , построенный методом каскадов

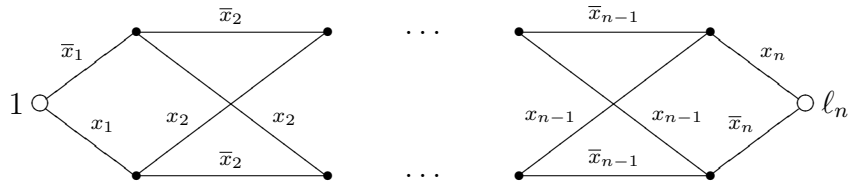


Рис. 3.7: схема Кардо для линейной функции ℓ_n

Как и в случае КС, СФЭ U_F , реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ \check{U}_1 в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F .

Заметим, что КС Σ_F является строго приведенной схемой (см. §2 главы 1), и что СФЭ U_F отличается от Σ_F отсутствием вершины 1, а также наличием дополнительных вершин, в которых реализуются ФАЛ из множества $I \setminus \{x_n, \bar{x}_n\}$ и ФАЛ вида $x_i^\sigma g_\sigma$, которые встречаются в разложениях вида (3.1) для ФАЛ из \hat{G}_i по всем i , $i = 1, \dots, n - 1$. Заметим также, что СФЭ U_F квазимоделирует (см. [2, §4]) КС $\vec{\Sigma}_F$ и может быть получена из нее на основе леммы 4.2 из [2, §4] с последующим применением тождеств

$$\bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y, \quad x \vee \bar{x}y = x \vee y.$$

В дальнейшем будем, как правило, считать, что СФЭ, построенная по методу каскадов для системы ФАЛ F , является строго приведенной и получается из СФЭ U_F в результате применения операции удаления одной из двух эквивалентных вершин СФЭ (см. [1, §4]), среди которых хотя бы одна должна быть дополнительной вершиной СФЭ U_F .

Пусть теперь Σ_f — (1, 1)-КС, построенная по методу каскадов для функции алгебры логики f , $f \in P_2(n)$, a_1 и a' — вход и выход Σ_f соответственно, а a_0 — дополнительная изолированная вершина. Рассмотрим (1, 2)-КС $\tilde{\Sigma}_f$ с входом a' и выходами

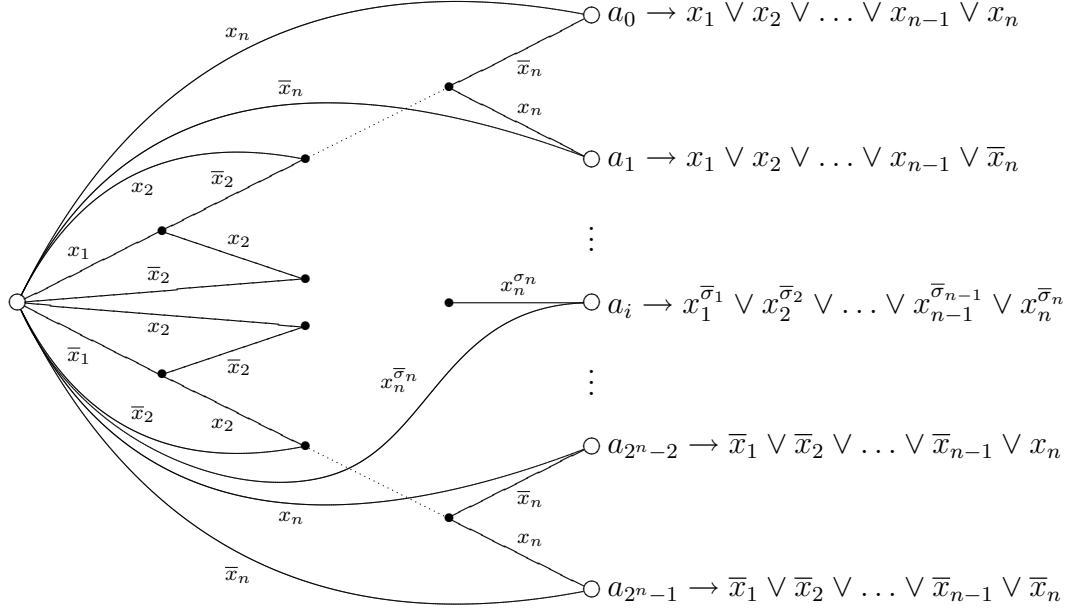


Рис. 3.8: дизъюнктивное контактное дерево

a_0, a_1 , которая строится аналогично Σ_f с той лишь разницей, что контакты ориентированы от вершины v к вершине v_α (см. второй этап построения КС $\check{\Sigma}_i$), и что при их проведении используется только разложение (3.1), а в случае, когда $g_\sigma = 0$, контакт x_i^σ идет из вершины v в вершину a_0 . Нетрудно убедиться в том, что КС $\check{\Sigma}_f$ является BDD (см. [2, §4]) и реализует ФАЛ f .

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \bar{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \bar{x}_4), \\
 f_2 &= x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \bar{x}_1 x_4.
 \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
 \widehat{G}_1 &= G_1 = \{f_1, f_2\}; \\
 \widehat{G}_2 &= \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \bar{x}_4\}, & G_2 &= \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\}; \\
 \widehat{G}_3 &= \{x_3 \oplus x_4, x_3 \bar{x}_4\}, & G_3 &= \widehat{G}_3 \cup \{x_4\}; \\
 \widehat{G}_4 &= \{x_4, \bar{x}_4\}.
 \end{aligned}$$

На рис. 3.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\check{\Sigma}_1$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.4 — соответствующая ей КС Σ_F , на рис. 3.5 — строго приведенная СФЭ U_F , а на рис. 3.6 — BDD, реализующая ФАЛ f_1 .

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ ℓ_n , где $n \geq 2$, является известная схема Кардо [11], показанная на рис. 3.7. Заметим, что эта КС имеет сложность $4n - 4$ и (см. §11) является минимальной. При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$ -КС, реализующей систему функций алгебры логики $Q_n (J_n)$, мы получим контактное дерево (соответственно дизъюнктивное контактное дерево) порядка n , показанное на рис. 3.4 из работы [2] (соответственно на рис. 3.8, где $i = \nu((\sigma_1, \dots, \sigma_n))$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$).

Как будет показано в §10, КД (дизъюнктивное КД) не является минимальным контактным дешифратором (соответственно дизъюнктивным дешифратором). В то же время из §10 следует, что КД является минимальной КС в классе так называемых разделительных схем. Применяя метод каскадов к универсальной системе ФАЛ $\vec{P}_2(n)$, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для любого n , $n = 1, 2, \dots$, существует универсальный контактный многополюсник порядка n , имеющий сложность не более, чем $2 \cdot 2^{2^n}$.*

Из результатов §10 следует, что построенный таким образом универсальный контактный многополюсник является асимптотически оптимальным по сложности.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из строгой приведенности СФЭ, построенной по методу каскадов.

Лемма 3.2. *Схема из класса \mathcal{U}^C , построенная по методу каскадов для системы из всех ФАЛ множества $P_2(n)$, отличных от констант, имеет сложность $2^{2^n} - n - 2$.*

Следствие (ср. с теоремой 5.4 из [1]). *В классе \mathcal{U}^C существует универсальный многополюсник порядка n , имеющий сложность $2^{2^n} - n$.*

§4 Операция суперпозиции схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона.

Метод Шеннона

Напомним сначала основные понятия, связанные с операцией суперпозиции схем, которая рассматривалась в [2, §5]. Тот факт, что схема Σ является суперпозицией схем Σ'' и Σ' , то есть получается в результате присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' , будем записывать в виде равенства $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$. При этом считается, что присоединение входа Σ'' , которому соответствует входная БП x'' , являющаяся пометкой вершины v'' , к выходу Σ' , которому соответствует выходная БП z' , являющаяся пометкой вершины v' , приводит к «склеивке» v' и v'' в одну вершину v схемы Σ , которая сохраняет все инцидентности и пометки v' , v'' , за исключением пометок x'' , z' . Иначе говоря, входами (выходами) схемы Σ , $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$, считаются все входы Σ' (соответственно выходы Σ'' и так называемые *свободные входы*

(соответственно *выходы*) суперпозиции Σ'' (Σ'), то есть те входы Σ'' (соответственно выходы Σ' , которые не участвуют в присоединениях. Изолированная входная вершина схемы Σ , которая является (не является) выходом Σ , называется *тождественной* (соответственно *фиктивной*) вершиной этой схемы. Схема, состоящая только из тождественных (тождественных и фиктивных) вершин считается *тождественной* (соответственно *тождественно-фиктивной*) схемой. Частными случаями операции суперпозиции вида $\Sigma = \Sigma''$ (Σ') являются операции:

1. объединения непересекающихся схем Σ'' , Σ' , когда все входы Σ'' и выходы Σ' являются свободными входами и выходами суперпозиции соответственно;
2. переименования (с возможным отождествлением) входов схемы Σ'' , когда схема Σ' является тождественной схемой;
3. переименования (с возможным дублированием и снятием) выходов схемы Σ' , когда схема Σ'' является тождественно-фиктивной;
4. стыковки, когда различные входы Σ'' присоединяют к различным выходным вершинам Σ' , причем у схемы Σ'' нет свободных входов суперпозиции.

Стыковка называется *полной*, если у нее нет свободных выходов. Заметим, что (однократная) операция суперпозиции общего вида $\Sigma = \Sigma''$ (Σ') всегда может быть сведена к последовательному выполнению операций переименования входов Σ'' , переименования выходов Σ' , объединения каждой из полученных схем с некоторой тождественной схемой и полной стыковки объединенных схем. Заметим также, что схема $\Sigma = \Sigma''$ (Σ') состоит из подсхем $\hat{\Sigma}'$ и $\hat{\Sigma}''$, где подсхема $\hat{\Sigma}'$ ($\hat{\Sigma}''$) изоморфна схеме Σ' (соответственно получается из схемы Σ'' в результате отождествления входов) и называется *внутренней* (соответственно *внешней*) *подсхемой* данной суперпозиции.

Будем говорить, что схема Σ является результатом *корректной* суперпозиции вида $\Sigma = \Sigma''$ (Σ'), если в любой ее вершине, которая соответствует выходу внутренней (внешней) подсхемы рассматриваемой суперпозиции, реализуется та же самая ФАЛ, что и в схеме Σ' (соответственно ФАЛ, получающаяся при подстановке ФАЛ, реализованных схемой Σ' , вместо входных БП ФАЛ, реализованных схемой Σ'' , так, как это предписывает суперпозиция). Заметим, что операции переименования входов без отождествления, переименования выходов с возможным дублированием и снятием, а также операция объединения всегда корректны. Из определений следует, что в классе СФЭ операция суперпозиции общего вида также всегда корректна, и что формула вида \mathcal{F}'' (\mathcal{F}') является формулой, если неповторные входы формулы \mathcal{F}'' , и только они, присоединяются к тем выходам системы формул \mathcal{F}' , которые не являются входами \mathcal{F}' (см. [2, §1,5]).

Обратимся теперь к особенностям операции суперпозиции для КС. Будем рассматривать корректность операции суперпозиции КС и ИКС вида $\Sigma = \Sigma''$ (Σ') не

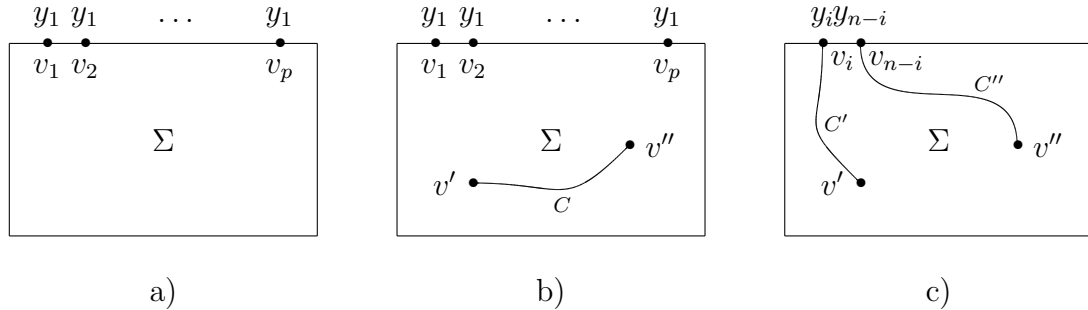


Рис. 4.1: к доказательству леммы 4.1

только «в целом», но и отдельно для каждого набора значений управляющих БП $x = (x_1, \dots, x_n)$. При этом указанная операция суперпозиции является, очевидно, корректной, если она корректна для каждого набора β значений БП x .

Заметим сначала, что (см. [2, §5]) в классе КС даже отождествление входов может не быть корректной операцией суперпозиции. С другой стороны, операции присоединения одного или двух противоположных контактов, которые использовались при построении КС по методу каскадов (см. рис. 3.1), являются примерами корректных операций суперпозиции. Контактную (итеративно-контактную) схему от управляющих БП $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть *разделительной по выходам* (соответственно *по входам*) на наборе β , $\beta \in V^n$, если при $x = \beta$ ФАЛ проводимости между любыми ее различными выходами (соответственно входами) равна 0. При этом схема считается *разделительной по выходам (входам)*, если она является разделительной по выходам (соответственно по входам) на любом наборе β , $\beta \in V^n$. Примером разделительной по выходам $(1, 2^n)$ -КС служит контактное дерево от БП $x = (x_1, \dots, x_n)$ (см. рис. 2.1a), а соответствующее ему итеративное контактное дерево (см. рис. 2.1b) с 2^n входами и 1 выходом является разделительной по входам ИКС. В дальнейшем, если это ясно из контекста, мы не будем уточнять, какая группа полюсов (входы или выходы) имеется ввиду, когда речь идет о разделительности схемы. Заметим, что в каждой входной вершине разделительной ИКС реализуется ФАЛ, равная входной БП, приписанной этой вершине.

Лемма 4.1. *Операция отождествления входов является корректной операцией суперпозиции в классе разделительных ИКС и не выводит схему из этого класса.*

Доказательство. Пусть ИКС $\widehat{\Sigma}$ получается из ИКС Σ от управляющих переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и входных итеративных переменных $y = (y_1, \dots, y_p)$, где БП y_i связана (см. рис. 4.1a) с вершиной v_i , $i = 1, \dots, p$, в результате отождествления БП $\widehat{y} = y_1 = y_2$ и соответствующего отождествления вершин $v = v_1 = v_2$ в ИКС $\widehat{\Sigma}$. Пусть, далее, $g_{u,w}(x)$ ($\widehat{g}_{u,w}(x)$) — ФАЛ проводимости от вершины u к вершине w

ИКС Σ (соответственно $\widehat{\Sigma}$). Тогда для произвольных вершин v', v'' схемы $\widehat{\Sigma}$ получим:

$$\widehat{g}_{v',v''} = g_{v',v''} \vee g_{v',v_1} \cdot g_{v_1,v''} \vee g_{v',v_2} \cdot g_{v_2,v''}. \quad (4.1)$$

Действительно, любая проводящая при $x = \beta$ цепь \widehat{C} , которая соединяет вершины v' и v'' в ИКС $\widehat{\Sigma}$, либо является цепью ИКС Σ , если она не проходит через вершину v (см. рис. 4.1b), либо состоит из цепей C' и C'' ИКС Σ таких, что C' соединяет вершину v' с вершиной v_i , $1 \leq i \leq 2$, а C'' — вершину v_{3-i} с вершиной v'' (см. рис. 4.1c) в остальных случаях. Из (4.1) следует, в частности, что

$$\widehat{g}_{v',v''} = g_{v_1,v''} \vee g_{v_2,v''}, \quad (4.2)$$

и что $\widehat{g}_{v',v''} = 0$, если v' и v'' — различные входы $\widehat{\Sigma}$. Таким образом, $\widehat{\Sigma}$ — раздельная ИКС, которая в силу (4.2) реализует в вершине v'' ФАЛ $\widehat{f}(x, \widehat{y}, y_3, \dots, y_p)$ вида

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x, \widehat{y}, y_3, \dots, y_p) &= \widehat{y} \widehat{g}_{v',v''} \vee y_3 \widehat{g}_{v_3,v''} \vee \dots \vee y_p \widehat{g}_{v_p,v''} \\ &= \widehat{y} (g_{v_1,v''} \vee g_{v_2,v''}) \vee y_3 g_{v_3,v''} \vee \dots \vee y_p g_{v_p,v''} = f(x, \widehat{y}, \widehat{y}, y_3, \dots, y_p), \end{aligned}$$

где $f(x, y)$ — ФАЛ, реализуемая в вершине v'' ИКС Σ .

Следовательно, корректность операции отождествления входов в классе раздельных ИКС доказана, поскольку общий случай такого отождествления легко сводится к последовательному выполнению рассмотренных выше попарных отождествлений. \square

Следующее утверждение представляет по сути модификацию известной леммы Шеннона (см. [9, §3], [2, §5]).

Лемма 4.2. *Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — раздельная ИКС, корректна.*

Доказательство. Пусть Σ' — $(1, m)$ -КС от управляющих БП $x = (x_1, \dots, x_n)$, реализующая на своих выходах z_1, \dots, z_m ФАЛ $f'_1(x), \dots, f'_m(x)$ соответственно, а Σ'' — $(p, 1)$ -ИКС от управляющих БП x , итеративных входных БП $y = (y_1, \dots, y_p)$, и с выходной БП z'' , причем БП $z''(y_i, i = 1, \dots, p)$ связана с вершиной v'' (соответственно v_i), а между произвольными вершинами u, w в Σ'' реализуется ФАЛ проводимости $g_{u,w}(x)$.

Пусть, кроме того, $p \leq m$, и суперпозиция $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ является стыковкой, при которой (см. рис. 4.2a) вход y_i присоединяется к выходу z_i , $i = 1, \dots, p$. Из определений и доказанной выше корректности операции отождествления входов в классе раздельных ИКС следует, что эти предположения не ограничивают общности

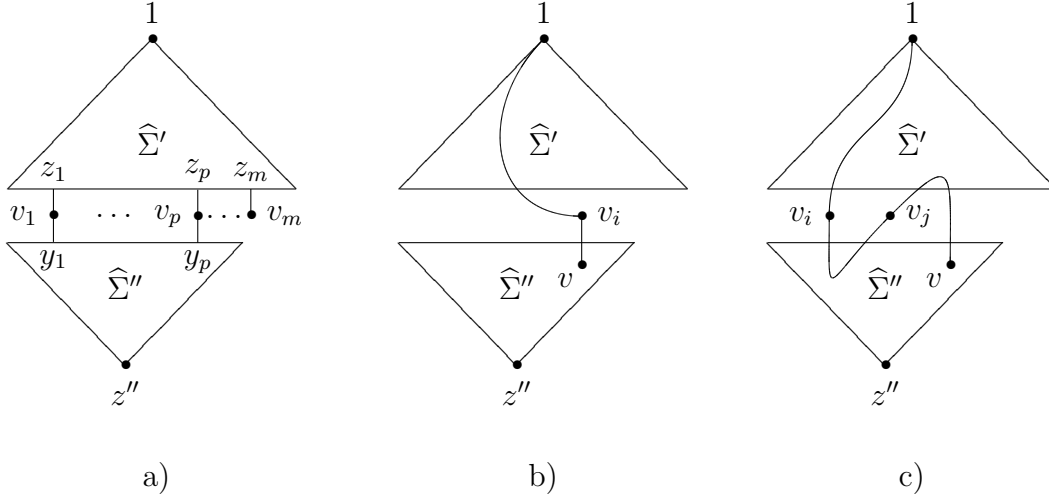


Рис. 4.2: к доказательству леммы 4.2

рассуждений. Выберем произвольную вершину v во внешней подсхеме $\widehat{\Sigma}''$ суперпозиции $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ и положим

$$f_v(x) = f'_1 \cdot g_{v_1, v} \vee \dots \vee f'_p \cdot g_{v_p, v}.$$

Заметим, что $f_v(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда в схеме Σ имеется проводящая при $x = \beta$ цепь C , которая идет из входа Σ в вершину v и проходит только через один из выходов z_i внутренней подсхемы $\widehat{\Sigma}''$ рассматриваемой суперпозиции (см. рис. 4.2b). В силу разделительности ИКС Σ'' любая цепь C , которая идет из входа Σ к вершине v и проходит при этом через два различных выхода z_i, z_j подсхемы $\widehat{\Sigma}''$, не может проводить при $x = \beta$ (см. рис. 4.2c). Следовательно, в вершине v ИКС Σ реализуется ФАЛ $f_v(x)$, которая при $v = v''$ совпадает с ФАЛ

$$f'_1 \cdot g_{v', v''} \vee \dots \vee f'_p \cdot g_{v_p, v''} = f''(x, f'_1, \dots, f'_p),$$

где

$$f''(x, y) = y_1 g_{v_1, v''} \vee \dots \vee y_p g_{v_p, v''}$$

— ФАЛ, реализуемая ИКС Σ'' , а при $v = v_i$, $i = 1, \dots, p$, совпадает с ФАЛ f'_i . Нетрудно убедиться в том, что в вершине подсхемы $\widehat{\Sigma}'$ с пометкой z_j , $j = p+1, \dots, m$, в схеме Σ по-прежнему реализуется ФАЛ f_j .

Лемма доказана. □

Замечание. Суперпозиция $\Sigma = \Sigma'' (\Sigma')$ корректна на наборе β значений управляющих БП x , если схема Σ'' является разделительной на наборе β .

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ (см. [12, §?], [1, §7]), который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ (см. §5).

Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q , $1 \leq q \leq n$, и построении схемы Σ_f , реализующей произвольную ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ на основе разложения:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \quad (4.3)$$

где

$$x' = (x_1, \dots, x_q), \quad x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n),$$

а функция

$$f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$$

при всех σ'' , $\sigma'' \in B^{n-q}$. При этом схема Σ_f представляет собой корректную суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор порядка $(n - q)$ от адресных БП x'' , информационные входы $y_0, \dots, y_{2^{n-q}}$ которого при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (4.3).

Полагая

$$q = \lfloor \log(n - 2 \log n) \rfloor,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ) Σ_f , где Σ'' — итеративное КД порядка $(n - q)$ (соответственно, формула $\hat{\mathcal{F}}_{n-q}$ из леммы 2.2), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно 3.2). Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L(\Sigma_f) \leq 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^K$, и

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leq \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:*

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

§5 Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим ряд нижних оценок для введенных в §1 функций Шеннона. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном [13], который основан на том, что число ФАЛ от БП x_1, \dots, x_n не может быть меньше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n .

Для конечного (с точностью до изоморфизма) множества схем \mathcal{M} через $|\mathcal{M}|$ будем обозначать число попарно не эквивалентных схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{M}$. Пусть \mathcal{U} — один из рассмотренных в §1 классов схем, L — введенный там функционал сложности для «взвешенного» числа элементов, а $L(n)$ — функция Шеннона для класса \mathcal{U} относительно L . Пусть, далее, $Q(n)$ — некоторое множество ФАЛ из $P_2(n)$, $n = 1, 2, \dots$, и пусть

$$L(Q(n)) = \max_{f \in Q(n)} L(f).$$

При этом последовательность $Q = Q(1), Q(2), \dots, Q(n), \dots$ будем называть *классом* ФАЛ, а функцию $L(Q(n))$ — *функцией Шеннона* (для класса схем \mathcal{U} относительно функционала сложности L), *связанной с классом ФАЛ* Q . Заметим, что

$$L(Q(n)) \leq L(n) = L(P_2(n)).$$

Обозначим через $\mathcal{U}(L, n)$ множество тех схем Σ , $\Sigma \in \mathcal{U}$ которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$, и для которых $L(\Sigma) \leq L$. Следующее «мощностное» неравенство вытекает непосредственно из определений:

$$|\mathcal{U}(L(Q(n)), n)| \geq |Q(n)|. \quad (5.1)$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона $L(Q(n))$ на основе известной верхней оценки величины $|\mathcal{U}(L, n)|$. Заметим, что мощностные неравенства, аналогичные (5.1), имеют место и для других функционалов сложности. В частности, для функции Шеннона $T(Q(n))$, связанной с реализацией ФАЛ из класса Q в классе схем \mathcal{U} вида \mathcal{U}_B^C или \mathcal{U}_B^Φ относительно функционала сложности T , справедливо неравенство

$$|\mathcal{U}\langle T(Q(n)), n \rangle| \geq |Q(n)|, \quad (5.2)$$

Для множеств $\mathcal{U}(L, n)$, $\mathcal{U}\langle T, n \rangle$, связанных с различными классами схем \mathcal{U} вида \mathcal{U}^A и \mathcal{U}_B^A , в соответствии с правилами, введенными в §1, будем использовать обозначения $\mathcal{U}^A(L, n)$, $\mathcal{U}^A\langle T, n \rangle$ и $\mathcal{U}_B^A(L, n)$, $\mathcal{U}_B^A\langle T, n \rangle$ соответственно.

Из результатов [1, §7, лемма 7.2] и [2, §2–4, леммы 2.1, 3.1, 4.1] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.1. Для каждого натурального n справедливы неравенства:

$$|\mathcal{U}^C(L, n)| \leq (32(L+n))^{L+1}, \quad (5.3)$$

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (64n)^{L+1}, \quad (5.4)$$

$$|\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (6nL)^L, \quad (5.5)$$

$$|\mathcal{U}^{\vec{K}}(L, n)| \leq (12nL)^L, \quad (5.6)$$

$$|\mathcal{U}^{\text{BDD}}(L, n)| \leq (8n(L+4))^{\frac{L}{2}+1}, \quad (5.7)$$

$$|\mathcal{U}^\Phi(T, n)| \leq (64n)^{2^T}. \quad (5.8)$$

Лемма 5.2. Для $\gamma \in \{0, 1\}$ и положительных действительных чисел a, α, y, q , таких, что

$$(ay^\gamma)^{\alpha y} \geq q, \quad (5.9)$$

в случае $\gamma = 1$ и $\frac{a}{\alpha} \log q > 2$ выполняется неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log \left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)} \left(1 + \frac{\log \log \left(\frac{a}{\alpha} \log q\right)}{\log \left(\frac{ae}{\alpha} \log q\right)}\right), \quad (5.10)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а в случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ — неравенство

$$y \geq \frac{\log q}{\alpha \log a}. \quad (5.11)$$

Доказательство. В случае $\gamma = 0$ и $a > 1$ неравенство (5.11) получается в результате логарифмирования (5.9) и деления обеих частей полученного неравенства на $\alpha \log a$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \alpha = a = 1$ и $\log q > 2$. В этом случае (5.10) следует из того, что левая часть (5.9) монотонно возрастает по y , и для

$$y' = (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\log \log \log q}{\log(e \log q)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y' \log y' &= (1 + \varepsilon) \frac{\log q}{\log \log q} (\log \log q - \log \log \log q + \log e \ln(1 + \varepsilon)) \\ &\leq \log q (1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\log \log \log q}{\log \log q} + \frac{\varepsilon \log e}{\log \log q}\right) \\ &= \log q (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon) = \log q (1 - \varepsilon^2) \leq \log q. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае $\gamma = 1, \alpha > 0, a > 0$ неравенство (5.9) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{\alpha y} \geq q^{\frac{a}{\alpha}},$$

и поэтому неравенство (5.10) получается из неравенства $y \geq y'$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $\frac{a}{\alpha} \log q$, если выполнено условие $\frac{a}{\alpha} \log q > 2$.

Лемма доказана. \square

Теорема 5.1. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства*

$$L^C(f) \geq (1 + \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.12)$$

$$L^\Phi(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{\log n}, \quad (5.13)$$

$$L^K(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.14)$$

$$L^{\vec{K}}(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^n}{n}, \quad (5.15)$$

$$L^{\text{BDD}}(f) \geq (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^{n+1}}{n}, \quad (5.16)$$

$$T(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon(n). \quad (5.17)$$

Доказательство. Пусть \mathcal{U} — один из рассматриваемых в лемме класс схем с функционалом сложности L , а $Q(n)$, $n = 1, 2, \dots$, — такое множество ФАЛ, что

$$Q(n) \subseteq P_2(n), \quad |Q(n)| = \left\lceil \frac{2^{2^n}}{n} \right\rceil,$$

и для любых ФАЛ g, f , где $g \in Q(n)$, $f \in P_2(n) \setminus Q(n)$, выполняется неравенство $L(g) \leq L(f)$. Заметим, что при этом множество ФАЛ $P_2(n) \setminus Q(n)$ содержит почти все ФАЛ из $P_2(n)$, и что для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n) \setminus Q(n)$, справедливо неравенство

$$L(f) \geq L(Q(n)). \quad (5.18)$$

Связанные с классом \mathcal{U} неравенства (5.12)–(5.16) для произвольной функции алгебры логики f , $f \in P_2(n) \setminus Q(n)$, выводятся из соответствующих классу \mathcal{U} неравенств (5.3)–(5.7) на основе (5.18) и мощностной нижней оценки (5.1) для введенного класса ФАЛ $Q(n)$ с использованием леммы 5.2, где $q = |Q(n)|$, и

- 1) $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $a = 32$, $y = L + n$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^C$;
- 2) $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, $a = 64n$, $y = L + 1$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\Phi$;
- 3) $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $a = 6n$, $y = L$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^K$;
- 4) $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $a = 12n$, $y = L$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\vec{K}}$;
- 5) $\gamma = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 8n$, $y = L + 4$, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\text{BDD}}$.

Действительно, подставляя указанные значения в (5.10) и (5.11), получим

$$L(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\alpha (n + \log \frac{a}{\alpha})} \left(1 + \frac{\log (\log (2^n - \log n) + \log \frac{a}{\alpha})}{n + \log \frac{a}{\alpha} + \log e} \right),$$

если $\gamma = 1$, и

$$L(f) \geq \frac{2^n - \log n}{\alpha \log a}$$

в остальных случаях. Следовательно, неравенство (5.12)((5.13), (5.14), (5.15), (5.16)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon(n) = \frac{\log n - 6}{n}$ (соответственно $\varepsilon(n) = \frac{7}{\log n}$, $\varepsilon(n) = \frac{3}{n}$, $\varepsilon(n) = \frac{4}{n}$, $\varepsilon(n) = \frac{6}{n}$).

Для доказательства неравенства (5.17) аналогичным образом вводится функциональный класс $Q(n)$, состоящий из $\left\lfloor \frac{2^{2^n}}{n} \right\rfloor$ функций алгебры логики множества $P_2(n)$ с наименьшей задержкой, а затем на основе (5.8) с использованием леммы 5.2, где $q = |Q(n)|$, $y = 2^T$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, и $a = 64n$, устанавливается справедливость (5.17) при $\varepsilon(n) = \frac{12}{\log n}$.

Теорема доказана. \square

Следствие.

$$\begin{aligned} L^C(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, & L^\Phi(n) &\gtrsim \frac{2^n}{\log n}, & L^K(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, \\ L^{\vec{K}}(n) &\gtrsim \frac{2^n}{n}, & L^{\text{BDD}}(n) &\gtrsim \frac{2^{n+1}}{n}, & T(n) &\geq n - \log \log n - o(1). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь аналогичные нижние оценки для СФЭ и формул в произвольном базисе B . Следующее утверждение доказывается на основе леммы 3.2 и теоремы 3.2 из §3 главы 2 и мощностных неравенств (5.1), (5.2) аналогично тому, как доказывалась теорема 5.1.

Теорема 5.2. *Для некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon(n)$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $\varepsilon(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности, для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства*

$$L_B^C(f) \geq \rho_B \frac{2^n}{n} (1 + \varepsilon(n)), \quad (5.19)$$

$$L_B^\Phi(f) \geq \rho_B \frac{2^n}{\log n} (1 - \varepsilon(n)), \quad (5.20)$$

$$T_B(f) \geq \tau_B (n - \log \log n - \varepsilon(n)). \quad (5.21)$$

Следствие.

$$L_B^C(n) \gtrsim \rho_B \frac{2^n}{n}, \quad L_B^\Phi(n) \gtrsim \rho_B \frac{2^n}{\log n}, \quad T_B(n) \geq \tau_B (n - \log \log n - o(1)).$$

§6 Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса \mathcal{U}^C , который был предложен О.Б. Лупановым [1] и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона $L^C(n)$. Этот метод, как и метод Шеннона (см. §4), основан на представлении реализуемой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в виде (4.3) и построении искомой СФЭ Σ_f , реализующей ФАЛ f , как суперпозиции схем вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$. При этом схема Σ'' по-прежнему является мультиплексором порядка $(n - q)$ от адресных БП $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, а схема Σ' реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$. Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ берется не с выхода универсального многополюсника от БП x' , а реализуется на выходе Σ' как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества G , $G \subseteq P_2(q)$, реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы Σ' .

Множество ФАЛ G , $G \subseteq P_2(m)$, называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка m и ранга p* , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p,$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Упорядоченную систему (набор) $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$, состоящую из непустых множеств, будем называть *покрытием* множества π , $\pi = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_p$. При этом множество π_i , $i = 1, \dots, p$, считается *i -й компонентой* покрытия Π , а число p — его *рангом*. Покрытие, состоящее из непересекающихся множеств, называется *разбиением*.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m , и пусть для всех i , $i = 1, \dots, p$, ФАЛ $\chi_i(x_1, \dots, x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i , а $G^{(i)}$ — множество всех тех ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i . Заметим, что множество ФАЛ G вида

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка m и ранга p . Действительно, любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p, \quad (6.1)$$

где $g_i = \chi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех i , $i = 1, \dots, p$. Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, равна 2^{s_i} , где $s_i = |\pi_i|$, и что множество

		x_1	x_2	\dots	x_{m-1}	x_m	\widehat{g}_1	\widehat{g}_2	\dots	\widehat{g}_{2^s}	\widehat{g}_{2^s+1}	\dots	$\widehat{g}_{2^{s+1}-1}$	\dots	$\widehat{g}_{(p-2)2^s+1}$	\dots	$\widehat{g}_{(p-1)2^s}$	$\widehat{g}_{(p-1)2^s+1}$	\dots	\widehat{g}_λ			
π_1	{	0	0	\dots	0	0	0	1	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
		0	0	\dots	0	1	0	0	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
				\dots			\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
				\dots			0	0	\dots	1	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
π_2	{			\dots			0	0	\dots	0	1	\dots	1	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	1	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
				\dots			\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	1	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0
		\dots		\dots		\dots	\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		\dots		
π_{p-1}	{			\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	1	\dots	1	0	\dots	0	0	\dots	0
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	1	0	\dots	0	0	\dots	0
				\dots			\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	1	0	\dots	0	0	\dots	0
π_p	{			\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	1	\dots	1	1	\dots	1
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	0	\dots	1	1	\dots	1
				\dots			\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
				\dots			0	0	\dots	0	0	\dots	0	\dots	0	\dots	0	0	\dots	0	0	\dots	0

Рис. 6.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

$G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \leq i < j \leq p$. Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^p |G^{(i)}| - (p-1) \leq \sum_{i=1}^p 2^{s_i} \leq p2^s, \tag{6.2}$$

где

$$s = \max_{1 \leq i \leq p} s_i.$$

В дальнейшем, на протяжении §6–§8, будем считать, что для произвольного разбиения $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ куба B^m , где $p \geq m$, от БП (x_1, \dots, x_m) номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j , если $i < j$. Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полюсами* куба B^m . Кроме того, будем предполагать, что для

$$s \leq 2^m, \quad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil \tag{6.3}$$

выполнены соотношения

$$s_1 = s_2 = \dots = s_{p-1} = s, \quad s_p = 2^m - (p-1)s \leq s. \quad (6.4)$$

С этим разбиением будем связывать введенные выше обозначения G , λ и $G^{(i)}$, χ_i , s_i , где $i = 1, \dots, p$, а через \vec{G} будем обозначать набор $(\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_\lambda)$ из $P_2^\lambda(q)$, который состоит из всех различных ФАЛ множества G , упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений (см. рис. 6.1).

Заметим, что значения параметров s и m , которые однозначно определяют все введенные выше величины, будут выбираться в каждом параграфе по-своему.

Теорема 6.1. *Для функции Шеннона $L^C(n)$ выполнено неравенство*

$$L^C(n) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (6.5)$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию алгебры логики f , $f \in P_2(n)$, и построим СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, которая реализует f и удовлетворяет (6.5). Пусть $m = q$, и пусть $x' = (x_1, \dots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$, и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q} . Пусть, далее, Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' и информационных БП $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$, который построен в соответствии с леммой 2.2 и реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', y)$. Обозначим через Σ_G СФЭ, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} и представляет собой объединение схем, построенной для каждой из них в соответствии с леммой 2.4. Заметим, что в силу (2.3), (2.8) и (6.2) выполнены неравенства

$$L(\Sigma'') \leq 4 \cdot 2^{n-q}, \quad L(\Sigma_G) \leq 3p2^{s+q}. \quad (6.6)$$

Схема Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов как ФАЛ $g(x')$ вида (6.1) с помощью СФЭ из $(p-1)$ ФЭ \vee , входы которой присоединены к соответствующим выходам Σ_G . Искомая СФЭ Σ_f имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (4.3). Для нее в силу (6.6) будут выполняться неравенства

$$L(\Sigma_f) \leq 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q},$$

и, следовательно, при

$$s = \lceil n - 5 \log n \rceil, \quad q = \lceil 2 \log n \rceil$$

в соответствии с (6.3) будет справедливо соотношение

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n - 5 \log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right), \quad (6.7)$$

из которого вытекает (6.5).

Теорема доказана. □

Следствие. Из (6.5) и (5.12) (см. также следствие из теоремы 5.1) вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. При разложении ФАЛ из G по БП x_q получится не более, чем $2p2^{\frac{s+1}{2}}$, различных ФАЛ из $P_2(q-1)$, каждую из которых можно реализовать по методу каскадов (см. §3) со сложностью не больше, чем $3 \cdot 2^{q-1}$. Следовательно, сложность СФЭ, реализующей систему ФАЛ \vec{G} по методу каскадов при их разложении по БП x_q, x_{q-1}, \dots, x_1 , не больше, чем

$$3p \cdot 2^s + O(p2^{q+\frac{s}{2}}).$$

Используя эту схему вместо СФЭ Σ_G и выбирая значения параметров так, что

$$s = \lceil n - 3 \log n \rceil, \quad q = \lceil 2 \log n \rceil,$$

можно получить СФЭ $\check{\Sigma}_f$, которая реализует f со сложностью

$$L(\check{\Sigma}_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{3 \log n + O(1)}{n} \right).$$

§7 Регулярные сдвиговые разбиения единичного куба и связанные с ними разложения функций

Построенное в §6 для синтеза СФЭ ДУМ G будем использовать и далее (см. §8), хотя прямая реализация представления (6.1) в других классах схем не всегда возможна. Так, при синтезе КС (формул) часть ФАЛ (соответственно все ФАЛ) множества G должны быть «промоделированы» переменными или их отрицаниями. Для реализации такого моделирования в данном параграфе строятся специальные разбиения единичного куба, а затем рассматриваются связанные с ними разложения ФАЛ.

Множество δ , $\delta \subseteq B^q$, называется m -регулярным множеством наборов куба B^q , если $m < q$, $|\delta| = 2^m$, и все префиксы¹ длины m наборов из δ различны. Заметим, что m -регулярному множеству δ , $\delta \subseteq B^q$, можно взаимнооднозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Так, строки таблицы, показанной на рис. 6.1, образуют m -регулярное множество $\hat{\delta}$ наборов куба $B^{m+\lambda}$, которое соответствует системе ФАЛ \vec{G} , а строки таблицы, показанной на

¹Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его *префиксом* (соответственно, *суффиксом*).

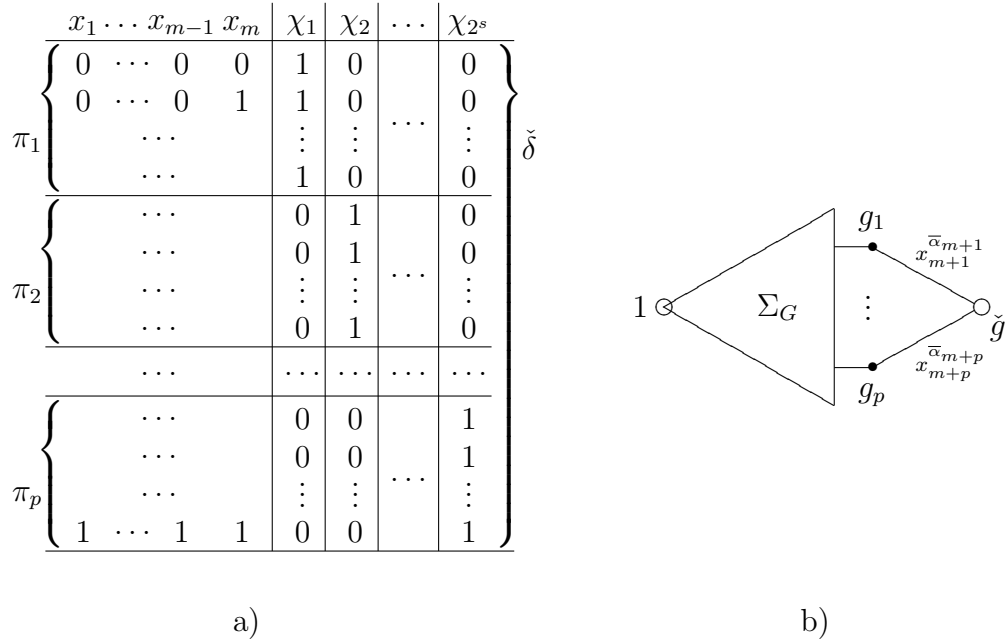


Рис. 7.1: m -регулярное множество и связанная с ним суперпозиция

рис. 7.1а, — m -регулярное множество наборов $\check{\delta}, \check{\delta} \subseteq B^{m+p}$, соответствующее системе ФАЛ $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_p)$. Заметим также, что любая ФАЛ $g, g \in P_2(q)$, совпадает на m -регулярном множестве наборов $\delta, \delta \subseteq B^m$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП x_{m+1}, \dots, x_q . При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q .

Для наборов $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ через $\beta \oplus \alpha$ будем обозначать набор вида $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \dots, \beta_q \oplus \alpha_q)$. Для множества $\delta, \delta \subseteq B^q$, и набора $\alpha, \alpha \in B^q$, определим множество $\delta \oplus \alpha$ как множество различных наборов вида $\beta \oplus \alpha$, где $\beta \in \delta$, то есть множество, получающееся из множества δ сдвигом (параллельным переносом) на набор α . Заметим, что для m -регулярного множества $\delta, \delta \subseteq B^q$, и любого набора $\alpha, \alpha \in B^q$, множество $\delta \oplus \alpha$ также является m -регулярным. Если при этом $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$, то есть

$$\alpha = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma \right),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{q-m})$, и $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$, а множество наборов δ соответствует системе ФАЛ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{q-m})$, то множество наборов $\delta \oplus \alpha$ будет соответствовать системе ФАЛ $(\psi_1 \oplus \gamma_1, \dots, \psi_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$, получающейся из системы ψ инвертированием некоторых ФАЛ.

В частности, для определенного выше множества $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta} \subseteq B^{m+\lambda}$, из свойств ДУМ G и m -регулярности $\widehat{\delta}$ следует, что любая ФАЛ из $P_2(m+\lambda)$ совпадает на любом множестве $\widehat{\delta} \oplus \alpha$, где $\alpha \in B^{m+\lambda}$ и $\nu(\alpha) < 2^\lambda$, с некоторой ЭД ранга p от БП x_{m+1}, \dots, x_q .

Аналогичным образом, любая ФАЛ g , $g \in P_2(m+p)$, на любом множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$, где

$$\alpha = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+p} \right),$$

совпадает с ФАЛ вида

$$\check{g} = x_{m+1}^{\overline{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \dots \vee x_{m+p}^{\overline{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \quad (7.1)$$

где $g_i = g\chi_i \in G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$. При этом ФАЛ \check{g} может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида $x_{m+1}^{\overline{\alpha}_{m+1}}, \dots, x_{m+p}^{\overline{\alpha}_{m+p}}$ к выходам $(1, \lambda)$ -КС Σ_G , реализующей систему ФАЛ \vec{G} , так, как это показано на рис. 7.1b. Заметим, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$ в силу разделительности присоединяемой $(p, 1)$ -ИКС на этом множестве.

Лемма 7.1. *Для любого m -регулярного множества наборов δ , $\delta \subseteq B^q$, система множеств $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$, где $\delta_i = \delta \oplus \alpha$ и $\nu(\alpha) = i-1$ при всех i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, образует разбиение куба B^q .*

Доказательство. Докажем сначала, что Δ — покрытие куба B^q . Для этого возьмем произвольный набор из B^q вида (β, γ) , где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, а по нему найдем во множестве δ набор вида $(\beta, \widehat{\gamma})$, который имеется в δ в силу m -регулярности этого множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \widehat{\gamma}) \oplus \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \widehat{\gamma} \oplus \gamma \right) = (\beta, \widehat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$. Таким образом, система Δ образует покрытие куба B^q .

С другой стороны, из m -регулярности δ следует m -регулярность любого из множеств δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система Δ образует разбиение куба B^q .

Лемма доказана. □

Замечание. Если $q \geq m + at$, и множество δ соответствует системе ФАЛ

$$\left(\underbrace{\psi, \dots, \psi}_a \right),$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_t) \in P_2^t(q)$, то число тех компонент разбиения Δ , на которых каждая ФАЛ системы ψ совпадает с некоторой БП куба B^q , не меньше, чем

$$\left(1 - \frac{t}{2^a}\right) 2^{q-m}.$$

Действительно, для любого фиксированного j , $1 \leq j \leq t$, доля тех компонент δ_i , $1 \leq i \leq 2^{q-m}$, разбиения Δ , на которых ФАЛ ψ_j не совпадает ни с одной из БП куба B^q , не больше, чем $\frac{1}{2^a}$. Следовательно, доля тех компонент разбиения Δ , на которых хотя бы одна из ФАЛ системы ψ не совпадает ни с одной из БП куба B^q , не больше, чем $\frac{t}{2^a}$.

В §8 мы будем выбирать параметр m так, что

$$m < q \leq n, \quad (7.2)$$

и будем рассматривать разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x' = (x_1, \dots, x_q)$, построенное по лемме 7.1 для некоторого m -регулярного множества наборов $\delta = \delta_0$. При этом для произвольной ФАЛ $f(x)$ из $P_2(n)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, вместо разложения f по БП набора $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$ (см. (4.3)) будем рассматривать ее представление в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi'_i(x') f_{\sigma'',i}(x') \right) \\ &= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi'_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma'',i}(x') \right) = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} f_i, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\chi'_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, $f_{\sigma'',i}(x')$ — произвольная ФАЛ, совпадающая на δ_i с ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$, и

$$f_i(x', x'') = \chi'_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} f_{\sigma''}(x') \right). \quad (7.4)$$

§8 Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем и формул в базисе $\&, \vee, \neg$.

Для синтеза КС (формул) будем использовать представления (7.3)–(7.4), где $q = m + \lambda$ (соответственно $q = m + p$), а разбиение Δ куба B^q построено по лемме 7.1 для определенного выше множества наборов δ (соответственно $\widehat{\delta}$), и, следовательно, ФАЛ $f_{\sigma'',i}(x')$ представляет собой ФАЛ $\check{g}_{\sigma'',i}$ вида (7.1) (соответственно ЭД $J_{\sigma'',i}$ от БП x_{m+1}, \dots, x_q).

Теорема 8.1. *Для функции Шеннона $L^K(n)$ выполнено неравенство*

$$L^K(n) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad (8.1)$$

Доказательство. Для произвольной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, построим $(1,1)$ -КС Σ_f , которая реализует f со сложностью, удовлетворяющей (8.1). Пусть $q = m + p$, $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ — описанное выше разбиение куба B^q , а Σ_G — $(1,\lambda)$ -КС, которая реализует систему ФАЛ \vec{G} по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 2.4 и оценку (2.7)). Для каждого i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, построим $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i , которая содержит КС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma'',i}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, из разложений (7.4) как ФАЛ $\check{g}_{\sigma'',i}$ вида (7.1) в соответствии с рис. 7.1b. Заметим, что при этом

$$L(\Sigma_G) \leq \lambda 2^{m+1}, \quad (8.2)$$

$$L(\Sigma'_i) \leq L(\Sigma_G) + p 2^{n-q}. \quad (8.3)$$

Пусть, далее, КС Σ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, реализует ФАЛ f_i (см. (7.4)) в результате корректной суперпозиции, показанной на рис. 8.1а, где $\check{\Sigma}_i$ — $(1,1)$ -КС, реализующая ФАЛ χ'_i по ее совершенной ДНФ, а входы $y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1}$ итеративного КД Σ'' от управляющих БП набора x'' присоединены к выходам Σ'_i в соответствии с (7.4). Заметим, что при этом

$$L(\Sigma_i) \leq L(\Sigma'_i) + 2^{n-q+1} + q 2^m. \quad (8.4)$$

Пусть, наконец, Σ_f — $(1,1)$ -КС, которая получается в результате параллельного соединения схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2^{q-m}}$, которая реализует f в соответствии с (7.3), и для которой в силу (8.2)–(8.4) будет выполнено неравенство

$$L(\Sigma_f) \leq ((p+2) 2^{n-q} + (\lambda+q) 2^{m+1}) 2^{q-m}. \quad (8.5)$$

Из этого неравенства при $q = m + p$ и

$$m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor, \quad s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil$$

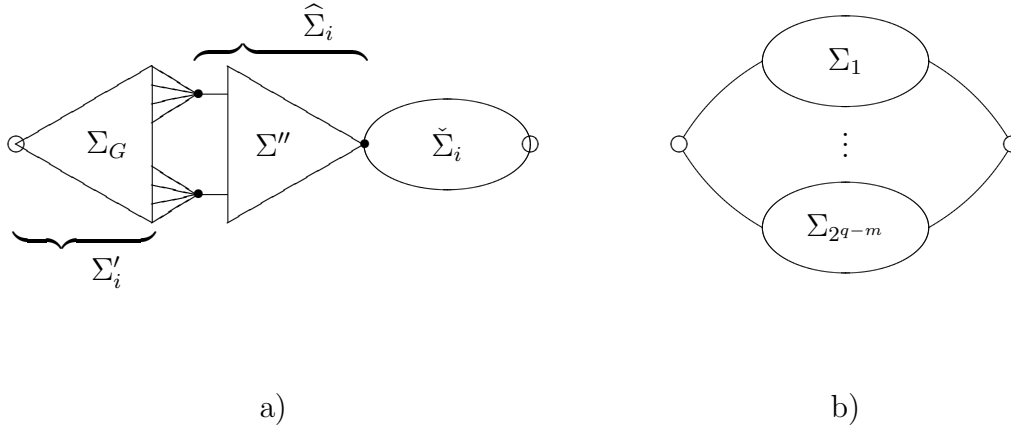


Рис. 8.1: к доказательству теоремы 8.1

в силу (6.2), (6.3) вытекает неравенство (8.1) для сложности Σ_f , так как

$$(p+2)2^{n-m} \leq \frac{2^n}{s} + 32^{n-m} = \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right),$$

$$\begin{aligned} (\lambda+q)2^{q+1} &= (p2^s + m + p)2^{m+p+1} \leq ((2^s + 1)p + m)2^{m+p+1} \\ &\leq \left(\frac{2^{m+s+2}}{s} + m \right) 2^{m+p+1} \leq \frac{2^{2m+s+p+4}}{s} \leq \frac{32}{s} 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. В $(1, p2^{n-q})$ -КС $\widehat{\Sigma}_i$, $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, которая получается из КС Σ_i в результате удаления подсхемы Σ_G и разъединения всех присоединенных к ее выходам концевых вершин звезд (см. рис. 8.1a), система ФАЛ проводимости от входа $\widehat{\Sigma}_i$, совпадающего с выходом Σ_i , к выходам $\widehat{\Sigma}_i$ — концевым вершинам звезд, — состоит из всех ФАЛ вида $\chi'_i x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$. Следовательно, при $s = 1$ и $m = \lfloor \frac{1}{2} \log n \rfloor$ схема Σ_n , которая получается в результате отождествления входов у всех указанных выше схем $\widehat{\Sigma}_i$, $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, реализует систему ФАЛ Q_n со сложностью

$$L(\Sigma_n) \leq 2^n + 2^{n-m+1} + q2^{m+p} = 2^n \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Замечание 2. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$(\lambda p + \lambda 2^{m+1} + 2^{n-q+1} + q2^m) 2^p = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 7.1b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем Σ_G схем Σ'_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$, а любой из остальных контактов КС Σ_f считать отдельной звездой.

Замечание 3. При построении КС $\vec{\Sigma}_f$, $\vec{\Sigma}_f \in \mathcal{U}^{\vec{K}}$, которая реализует ФАЛ f указанным выше способом, вместо звезды, показанной на рис. 7.1b, необходимо использовать звезду из соответствующих ориентированных контактов вида $x_{m+1}^{\sigma_{i,1}}, \dots, x_{m+p}^{\sigma_{i,m+p}}$, которая является разделительной $(p, 1)$ -ИКС и обеспечивает корректность операции суперпозиции. Следовательно, используя для всех КС Σ'_i одну и ту же подсхему Σ_G , при

$$m = \lfloor 2 \log n \rfloor - 1, \quad s = \lceil n - 5 \log n \rceil$$

получим

$$L^{\vec{K}}(n) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

Аналогичная оценка справедлива и в классе контактно-вентильных схем.

Следствие.

$$L^K(n) \sim L^{\vec{K}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 8.2. Для функции Шеннона $L^\Phi(n)$ выполнено неравенство

$$L^\Phi(n) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{4 \log \log n + o(1)}{\log n} \right). \quad (8.6)$$

Доказательство. Для произвольной ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, построим формулу \mathcal{F}_f , которая реализует f и удовлетворяет (8.6).

Пусть $q = m + \lambda$, а $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ — разбиение куба B^q , построенное по лемме 7.1 для описанного выше множества наборов $\hat{\delta}$. Рассмотрим π -схему Σ_f , которая реализует f и строится аналогично КС Σ_f из доказательства теоремы 8.1 с той лишь разницей, что $(1, 2^{n-q})$ -КС Σ'_i реализует каждую ЭД $J_{\sigma'',i}$, $\sigma'' \in B^{n-q}$, с помощью пучка из p параллельных контактов от БП x_{m+1}, \dots, x_q . При этом, очевидно, для сложности π -схемы Σ_f неравенство (8.5) будет справедливо при $\lambda = 0$. Искомая формула \mathcal{F}_f получается из формулы с поднятыми отрицаниями, моделирующей π -схему Σ_f , заменой каждой ЭД $J_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \bar{x}_{j_{t+1}} \vee \dots \vee \bar{x}_{j_p}$, где $t \leq p$, формулой $\hat{J}_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_t} \vee \overline{x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p}}$.

Заметим, что в формуле \mathcal{F}_f на каждую подформулу $\widehat{J}_{\sigma'',i}$ приходится не более одного ФЭ \neg , а число остальных ФЭ \neg не больше, чем число размыкающих контактов во всех подсхемах вида $\check{\Sigma}_i$ и Σ'' (см. рис. 8.1) π -схемы Σ_f , которое равно половине суммарной сложности этих схем. Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L(\Sigma_f) + 2^{n-m} + q2^q. \quad (8.7)$$

Выбирая значения параметров m и s так, что

$$m = \lfloor 3 \log \log n \rfloor, \quad s = \lfloor \log n - 4 \log \log n \rfloor,$$

получим

$$p \leq \frac{2^m}{s} + 1, \quad \lambda \leq p2^s \leq \frac{2^{m+s+1}}{s} \lesssim \frac{2n}{\log^2 n}, \quad q = m + \lambda \lesssim \frac{2n}{\log^2 n},$$

и, следовательно, в силу (8.5), (8.7) выполняется неравенство

$$L(\Sigma_f) \leq L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - 4 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^3 n}\right),$$

из которого для сложности формулы \mathcal{F}_f вытекает (8.6).

Теорема доказана. □

Следствие 1.

$$L^\Phi(n) \sim L^\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

Замечание. Построим формулу $\check{\mathcal{F}}_f$ аналогично формуле \mathcal{F}_f , моделируя параллельное соединение схем Σ_i , $i = 1, \dots, 2^{q-m}$ (см. рис. 8.1b), с помощью дерева глубины $(q - m)$ из ФЭ \vee , а каждую КС $\check{\Sigma}_i$ (см. рис. 8.1a) — совершенной ДНФ ФАЛ χ'_i из леммы 2.1, и используя вместо формул, моделирующих ИКД Σ'' (см. рис. 8.1a и лемму 2.2), формулы $\check{\mathcal{F}}_{n-q}$ из леммы 2.3. При этом, учитывая то, что глубина формул $\widehat{J}_{\sigma'',i}$ не больше, чем $\lceil \log p \rceil + 1$, в силу (2.1), (2.2) и (2.4)–(2.6) получим

$$L(\check{\mathcal{F}}_f) \leq \frac{2^n}{\log n - 4 \log \log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right),$$

$$D(\check{\mathcal{F}}_f) \leq n - \log \log n + 3 + o(1).$$

Следствие 2.

$$D(n) = n - \log \log n \pm O(1).$$

§9 Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов и формул в произвольном базисе

Обобщим понятие ДУМ ФАЛ следующим образом. Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_p)$ — существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенно зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G , $G \in P_2(m)$, называется φ -универсальным множеством (φ -УМ) порядка m , если любая ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \varphi(g_1, \dots, g_p), \quad (9.1)$$

где $g_i \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$. Заметим, что в случае $\varphi(y_1, \dots, y_p) = y_1 \vee \dots \vee y_p$ понятие φ -УМ совпадает с введенным в §6 понятие ДУМ ранга p . Так же, как и в §6, будем строить φ -УМ порядка m на основе разбиения $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ единичного куба B^m . Для каждого i , $i = 1, \dots, p$, в силу существенной зависимости ФАЛ φ от БП y_i найдется набор двоичных констант $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$ такой, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, y_i, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}. \quad (9.2)$$

Обозначим через $G^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, множество всех тех ФАЛ из $P_2(m)$, которые при любом j , $1 \leq j \leq p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_j , и пусть

$$G = G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (9.1) имеет место для любой функции g , $g \in P_2(m)$, если g_i , $i = 1, \dots, p$, — ФАЛ из $G^{(i)}$, совпадающая на δ_i с ФАЛ $g \oplus \alpha_{i,i}$. Действительно, для любого i , $i = 1, \dots, p$, и любого набора α , $\alpha \in \delta_i$, в силу (9.2) получим:

$$\varphi(g_1(\alpha), \dots, g_p(\alpha)) = \varphi(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,i-1}, g(\alpha) \oplus \alpha_{i,i}, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,p}) = g(\alpha).$$

Следовательно, множество G является φ -УМ порядка m .

Найдем среди ФЭ базиса B , $B = \{\varepsilon_i\}_{i=1}^b$, элемент ε_j , на котором достигается приведенный вес $\rho_j = \rho_B$ (см. §5), то есть

$$\rho_j = \frac{L_j}{k_j - 1} = \min_{k_i \geq 2} \rho_i = \rho_B. \quad (9.3)$$

Пусть, далее, m, s, t, p — натуральные числа, такие, что

$$p = t(k_j - 1) + 1, \quad (9.4)$$

$$k_j \leq \frac{2^m}{s} \leq p < \frac{2^m}{s} + (k_j - 1), \quad (9.5)$$

а $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — такое разбиение куба B^m на последовательные отрезки (см. §6), что

$$|\pi_i| = s_i \leq s \quad (9.6)$$

для всех i , $i = 1, \dots, p$ (ср. с (6.4)). Рассмотрим абсолютную формулу \mathcal{F} , построенную из t ФЭ ε_j , которая с учетом (9.4) и в соответствии с леммой 1.1 из [2, §1] имеет p входов и реализует существенную ФАЛ $\varphi(y_1, \dots, y_p)$. Построим φ -УМ G порядка m на основе разбиения Π . Пусть $\vec{G} = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_\lambda)$ — система, состоящая из всех различных ФАЛ множества G , для которой в силу (9.6) по-прежнему выполняется неравенство (см. §6)

$$\lambda \leq p2^s. \quad (9.7)$$

Теорема 9.1. Для функции Шеннона $L_B^C(n)$ выполняется неравенство

$$L_B^C(n) \leq \rho_B \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right). \quad (9.8)$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию f , $f \in P_2(n)$, и построим схему Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}_B^C$, которая реализует f со сложностью, удовлетворяющей (9.8). Искомая СФЭ Σ_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 6.1, с той лишь разницей, что:

1. G — указанное выше φ -УМ порядка m от БП x' ;
2. в схемах Σ'' и Σ_G вместо ФЭ $\&$, \vee , \neg используются моделирующие их СФЭ из \mathcal{U}_B^C (см. [2, §1]);
3. схема Σ' реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на выходе формулы \mathcal{F} , входы которой присоединены к выходам схемы Σ_G в соответствии с представлением

$$f_{\sigma''}(x') = \varphi(g_{\sigma'',1}, \dots, g_{\sigma'',p})$$

(см. (9.1)), где $g_{\sigma'',i} \in G$ при всех i , $i = 1, \dots, p$.

Сложность построенной СФЭ Σ_f с учетом (9.7) и по аналогии с (6.7) будет удовлетворять неравенству

$$L(\Sigma_f) \leq L_j t 2^{n-m} + O(2^{n-m} + p2^{s+m}),$$

из которого при тех же значениях параметров s, m , что и в §6, в силу (9.3)–(9.5) следует (9.8).

Теорема доказана. □

Следствие.

$$L_B^C \sim \rho_B \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 9.2. Для функции Шеннона $L_{\mathbb{B}}^{\Phi}(n)$ выполняется неравенство

$$L_{\mathbb{B}}^{\Phi}(n) \leq \rho_{\mathbb{B}} \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{\log \log n + O(1)}{\log n} \right). \quad (9.9)$$

Доказательство. Возьмем произвольную ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, и построим формулу \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}$, которая реализует f со сложностью, удовлетворяющей (9.9). Искомая формула \mathcal{F}_f строится аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 8.2, с той лишь разницей, что:

1. разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q , где $q = m + \lambda a$, выбирается для указанной выше системы ФАЛ \vec{G} на основе следствия из теоремы 8.2;
2. каждая ФАЛ $f_{\sigma'', i}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{q-m}$, представляет собой ФАЛ вида $\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$, где $m+1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq q$, если на компоненте δ_i любая ФАЛ из \vec{G} совпадает с некоторой БП (см. следствие из теоремы 8.2), и ФАЛ вида $\varphi(x_{j_1}^{\sigma''}, \dots, x_{j_p}^{\sigma''})$ в остальных случаях;
3. вместо ФЭ $\&$, \vee , \neg используются моделирующие их неповторные формулы базиса \mathbb{B} (см. [2, §1]), а каждая ФАЛ $f_{\sigma'', i}(x')$ (см. §2) реализуется с помощью построенной выше формулы \mathcal{F} .

Сложность построенной формулы \mathcal{F}_f с учетом следствия из теоремы 8.2 и по аналогии с (8.6) будет удовлетворять неравенству

$$L(\mathcal{F}_f) \leq L_j t 2^{n-m} + O\left(2^{n-m} \left(1 + \frac{t\lambda}{2^a}\right)\right),$$

из которого при тех же значениях параметров s, m и a следует (9.9).

Теорема доказана. □

§10 Некоторые соотношения между параметрами подобных формул

Будем, как правило, рассматривать формулы из \mathcal{U}^{Φ} , то есть формулы над базисом $\mathbb{B}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. С помощью тождеств

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, \quad \bar{\bar{x}}_1 = x_1$$

любую формулу из \mathcal{U}^{Φ} можно преобразовать к эквивалентной ей формуле \mathcal{F}' с поднятыми отрицаниями такой, что:

$$D(\mathcal{F}') \leq D(\mathcal{F}), \quad R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}), \quad \tilde{D}(\mathcal{F}') = \tilde{D}(\mathcal{F}), \quad \tilde{L}(\mathcal{F}') = \tilde{L}(\mathcal{F}).$$

Для произвольной формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями определим ее *альтернирование* $\text{Alt}(\mathcal{F})$ как максимальное по всем цепям соответствующего дерева D число изменений типов двуместных ФЭ при прохождении цепи от листа к корню D . Так, для элементарной конъюнкции (ЭК) K и элементарной дизъюнкции (ЭД) J , где

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}, \quad J = x_{j_1}^{\tau_1} \vee \dots \vee x_{j_p}^{\tau_p},$$

имеют место равенства

$$\text{Alt}(K) = \text{Alt}(J) = 0.$$

Для отличных от ЭК и ЭД дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) \mathcal{A} и конъюнктивной нормальной формы \mathcal{J} , где $\mathcal{A} = K_1 \vee \dots \vee K_s$ и $\mathcal{J} = J_1 \cdots J_q$, а K_1, \dots, K_s и J_1, \dots, J_q — различные ЭК и ЭД, справедливы равенства:

$$\text{Alt}(\mathcal{A}) = \text{Alt}(\mathcal{J}) = 1.$$

Формулы, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств коммутативности и ассоциативности:

$$x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1, \quad x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3, \quad (10.1)$$

где $\circ \in \{\&, \vee\}$, называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы эквивалентны, получаются друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и что подобные формулы могут отличаться только глубиной.

Лемма 10.1. Пусть абсолютная формула \mathcal{F} реализует ФАЛ вида $x_1 \circ \dots \circ x_t$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, и пусть для целых неотрицательных чисел d, d_1, \dots, d_t выполнено неравенство $2^{d_1} + \dots + 2^{d_t} \leq 2^d$. Тогда существует подобная \mathcal{F} формула $\hat{\mathcal{F}}$, глубина которой по входу x_i , $i = 1, \dots, t$, не больше, чем $d - d_i$.

Доказательство. Перестановкой и переименованием БП (аргументов) в формуле \mathcal{F} можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства:

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_t$$

Пусть теперь \mathcal{F}' — абсолютная формула над $\{\circ\}$ от БП x_1, \dots, x_{2^d} , которой соответствует полное двоичное d -ярусное дерево, а формула \mathcal{F}'' получается из \mathcal{F}' удалением последних $(2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t})$ вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны. Первые 2^{d_1} вхождений БП в \mathcal{F}'' составляют подформулу \mathcal{F}_1 , которой соответствует полное двоичное d_1 -ярусное дерево, содержащее 2^{d_1} вхождений БП в \mathcal{F}'' , следующие 2^{d_2} вхождений БП в \mathcal{F}'' — подформулу \mathcal{F}_2 , которой соответствует полное двоичное d_2 -ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних 2^{d_t} вхождений БП в

\mathcal{F}'' , составляющих подформулу \mathcal{F}_t , которой соответствует полное двоичное d_t -ярусное дерево. Обозначим через $\tilde{\mathcal{F}}$ формулу, которая получается из \mathcal{F}'' заменой подформулы \mathcal{F}_i на БП x_i , $i = 1, \dots, t$. Заметим, что $\tilde{\mathcal{F}}$ подобна \mathcal{F} и что ее глубина по БП x_i не больше чем $d - d_i$, то есть $\tilde{\mathcal{F}}$ является искомой формулой.

Лемма доказана. \square

Следствие. Для абсолютной формулы \mathcal{F}' , реализующей ФАЛ вида $x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_t^{\sigma_t}$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$, то есть для ЭК или ЭД существует подобная формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \left\lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}') \right\rceil. \quad (10.2)$$

Действительно, искомая формула $\check{\mathcal{F}}$ получается подстановкой $x_i^{\sigma_i}$ вместо x_i в формулу \mathcal{F} , которая строится по доказанной лемме для целых неотрицательных чисел:

$$d = \left\lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}') \right\rceil, \quad d_i = \log(1 + \bar{\sigma}_i),$$

где $i = 1, \dots, t$, так как

$$2^d \geq \tilde{R}(\mathcal{F}') = \sum_{i=1}^t \tilde{R}(x_i^{\sigma_i}) = \sum_{i=1}^t 2^{d_i}.$$

Лемма 10.2. Для любой формулы \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \left\lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}) \right\rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}). \quad (10.3)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по альтернированию формулы \mathcal{F} . Пусть $\text{Alt}(\mathcal{F}) = 0$ и формула \mathcal{F} реализует ФАЛ вида $x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_t^{\sigma_t}$, где $\circ \in \{\&, \vee\}$. Искомая формула $\check{\mathcal{F}}$ в этом случае строится в соответствии со следствием из леммы 10.1 и удовлетворяет неравенству (10.3) в силу (10.2).

Пусть (10.3) справедливо для любой формулы \mathcal{F}' такой, что $\text{Alt}(\mathcal{F}') \leq (a - 1)$, где $a \geq 1$, и пусть формула \mathcal{F} с поднятыми отрицаниями имеет альтернирование a . Представим формулу \mathcal{F} в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t),$$

где $t \geq 2$, абсолютная формула $\Phi(y_1, \dots, y_t)$ реализует при некотором \circ , $\circ \in \{\&, \vee\}$, ФАЛ вида $y_1 \circ \dots \circ y_t$, а подформулы $\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t\}$ формулы \mathcal{F} имеют альтернирование не больше, чем $(a - 1)$. Положим

$$d = \left\lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}) \right\rceil + 1 \quad \text{и} \quad d_i = \left\lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}_i) \right\rceil,$$

где $i = 1, \dots, t$, и затем для каждой формулы \mathcal{F}_i построим по индуктивному предположению подобную ей формулу $\check{\mathcal{F}}_i$ такую, что

$$D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + (a - 1).$$

Так как при этом

$$2^d \geq 2\tilde{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^t 2\tilde{R}(\mathcal{F}_i) \geq \sum_{i=1}^t 2^{d_i},$$

то построим по лемме 10.1 подобную формуле Φ формулу $\check{\Phi}$, которая имеет по БП y_i , $i = 1, \dots, t$, глубину не больше, чем $d - d_i$. Следовательно, формула

$$\check{\mathcal{F}} = \widehat{\Phi}(\check{\mathcal{F}}_1, \dots, \check{\mathcal{F}}_t),$$

подобна формуле \mathcal{F} , имеет глубину не больше, чем

$$d + (a - 1) = \lceil \log \tilde{R}(\mathcal{F}) \rceil + a$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (10.3).

Лемма доказана. \square

Следствие. Для любой ДНФ или КНФ \mathcal{A} существует подобная ей формула $\check{\mathcal{A}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{A}}) \leq \lceil \log \tilde{R}(\mathcal{A}) \rceil + 1.$$

Введенное выше понятие подобных формул без изменений переносится на любой базис, содержащий произвольный набор одноместных ФАЛ вместе с каким-либо набором двуместных ФАЛ из множества $\{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$, то есть множества двуместных ФАЛ, для которых выполнены тождества (10.1). Для указанных базисов аналогично базису $\{\&, \vee, \neg\}$ вводится понятие формулы с поднятыми одноместными ФС, а затем определяется альтернирование таких формул. Заметим, что при этом будут справедливы леммы 10.1 и 10.2. В частности, для полинома Жегалкина \mathcal{P} в силу того, что $\text{Alt}(\mathcal{P}) = 1$, будет справедливо следствие из леммы 10.2, где расширенный ранг (сумма ранга и числа одноходовых ФС) $\tilde{R}(\mathcal{P})$ полинома \mathcal{P} равен $R(\mathcal{P})$, если \mathcal{P} не содержит 1 в качестве свободного члена и равен $R(\mathcal{P}') + 2$, если $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \oplus 1$, а \mathcal{P}' — полином без свободного члена.

§11

Литература

[1]

[2]

[3]

[4]

[5]

[6]

[8]

[9]

[10]

[11]

[12]

[13]