

Лекция 1

Ряды и преобразования Фурье.

Тригонометрические ряды.

Определение 1. Тригонометрическим рядом $T(x)$ называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где

$$A_0(x) = a_0, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

n -я частичная сумма ряда $T(x)$ имеет вид

$$s_n(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^n A_m(x).$$

Коэффициенты a_n и b_n заданы: первые для $n \geq 0$, вторые для $n \geq 1$. Мы доопределим a_n , b_n также для остальных целых значений n , положив $a_{-n} = a_n$ ($n > 0$), $b_0 = 0$, $b_{-n} = -b_n$ ($n > 0$), и обозначим

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n);$$

так что

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Таким образом, мы можем записать частичные суммы ряда $T(x)$ как

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^n \{(c_m + c_{-m}) \cos mx + i(c_m - c_{-m}) \sin mx\} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m e^{imx} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m \mathbf{e}_m(x),$$

а сам ряд, как

$$T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n(x).$$

Исходный и получившийся ряды называются *действительным* и *комплексным тригонометрическими рядами*, соответственно.

Если тригонометрический ряд имеет суммой функцию $f(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, то его коэффициенты могут быть просто выражены через $f(x)$. Допустим, например, что ряд сходится равномерно:

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Тогда, помножив на $\cos mx$ и на $\sin mx$ или, в комплексном случае, на e^{imx} , проинтегрировав почленно от $-\pi$ до π , используя известные формулы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases},$$

найдем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (*)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

Если f действительно, то a_n и b_n действительны, а c_n и c_{-n} сопряжены. Если f нечетно, то $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если f четно, то $b_n = 0$ и формула для a_n преобразовывается аналогично.

Ряд Фурье для функции периода 2π .

Пусть задана некоторая функция $f(x)$ периода 2π , и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление возможно, то коэффициенты a_n и b_n (c_n) необходимо получают с помощью формул (*). Определенные этим способом коэффициенты a_n и b_n (c_n) называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*.

Наиболее часто используемым классом функций, для которых возможно их представление в виде ряда Фурье являются кусочно-гладкие функции.

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем конечное число разрывов первого рода (*разрывами первого рода функции $g(x)$* называются точки x_0 , где $g(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} g(x) = g(x_0 + 0)$).

Утверждение 1. Ряд Фурье функции $f(x)$ периода 2π , кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений x , причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва. Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

Дискретное преобразование Фурье для функции периода 2π .

Система $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ дискретна - в нее входят только целые "частоты" n . При численных расчетах, естественно, приходится ограничиваться конечными суммами s_N и конечным диапазоном частот $[-N, \dots, N]$. Если же дискретизация производится и по отношению к переменной x , то приходим к *дискретному преобразованию Фурье* (ДПФ). Для него существует эффективный алгоритм расчета, называемый *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ).

ДПФ (БПФ), ставящее в соответствие 2π -периодической функции f ее массив коэффициентов Фурье существенно рассматривает f , как функцию, заданную на всей прямой. При этом, при точной локализации информации о дискретизации функции $f(x)$,

$y_n = f(2\pi n / N), 0 \leq n \leq N$ - экстремумов, пересечений нуля и т.д., информация о коэффициентах c_n нелокальна! Рассматривая коэффициенты c_n невозможно определить локальные характеристики f .

Пример.

Разрывная функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \\ f(x + 2\pi), & \forall x \end{cases}$$

имеет следующее представление в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Коэффициенты $c_n = 1/n$ убывают очень медленно при $n \rightarrow \infty$ и в каждой точке $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ плохая сходимость ряда определяется осцилляциями $\sin(nx)$.

Данный пример иллюстрирует еще одну неприятную особенность ряда и дискретного преобразования Фурье – эффект Гиббса. Так, сходимость в точках разрыва определяется Утверждением 1, но частичные суммы s_N ряда Фурье превосходит максимум функции, равный $\frac{\pi}{2}$, в некоторой точке x_N около нуля приблизительно на 18% !

Такой же эффект возникает и в общем случае при аппроксимации рядом Фурье функции, у которой есть разрывы первого рода.