

## ЛЕКЦИЯ 2

### Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье.

Пусть  $f(x)$  - функция, заданная для всех действительных  $x$  и кусочно-гладкая на каждом конечном интервале  $[-l, l]$ . Тогда на каждом таком отрезке  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

причем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du, (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du, (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u - x) du. \quad (2.1)$$

Пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Тогда имеет место формула (*интегральная формула Фурье*):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) du,$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u - x) du,$$

называют *интегралом Фурье*.

Приведем соображения, поясняющие идею получения этой формулы.

Из (2.1), при  $l \rightarrow \infty$  ( $x$  - фиксировано) получаем:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u - x) du.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью обозначим:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \dots,$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(u) \cos \omega_n(u-x) du,$$

напоминающий интегральную сумму для функции переменного  $\omega$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

составленную для промежутка  $[0, +\infty]$ , что и позволяет ожидать выполнения интегральной формулы Фурье.

### Преобразование Фурье.

Исходя из интегральной формулы Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

и, учитывая, что для нечетной функции  $f(u) \sin \omega(u-x)$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega(u-x) du,$$

можно получить, складывая первую из этих формул со второй, умноженной на  $i$ , что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u-x)} du \quad (\text{Интегральная формула Фурье в комплексной форме}).$$

Если обозначить

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du,$$

то получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (2.2)$$

Эти формулы образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию  $F(\omega)$  называют *преобразованием Фурье* функции  $f(x)$ . Формула (2.2) называется *формулой обращения Фурье*.

Формула

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции  $f(u)$ . Формула обращения дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус-* преобразования Фурье.

Например, считая  $f(u)$  нечетной на  $(-\infty, \infty)$ , получаем пару взаимных *синус-преобразований Фурье*:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du,$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega.$$

### **Интегральные преобразования с ядрами Фурье.**

Рассмотрим вопрос наличия формул обращения для интегральных преобразований, аналогичных полученным выше для преобразования Фурье.

Рассмотрим полупрямую  $(0, \infty)$  и введем

#### **Определение 2.1**

Интегральным преобразованием на полупрямой будем называть интеграл вида

$$I_f(\alpha) = \int_0^{\infty} K(x, \alpha) f(x) dx, \quad (2.3)$$

где  $f(x) \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}$  - некоторый функциональный класс, а  $K(x, \alpha)$  - известная функция, которая называется ядром интегрального преобразования.

Примеры интегральных преобразований:

- При  $K(x, \alpha) = x^{\alpha-1} I_f(\alpha)$  - преобразование Меллина.
- При  $K(x, \alpha) = e^{-\alpha x} I_f(\alpha)$  - преобразование Лапласа.
- При  $K(x, \alpha) = \cos \alpha x I_f(\alpha)$  - косинус-преобразование Фурье.

Выражение (2.3) можно также переписать как

$$I_f = Lf,$$

где  $L$  – линейный интегральный оператор, определяемый правой частью (2.3). Одной из основных задач теории интегральных преобразований состоит в том, чтобы установить функциональные классы  $B$  такие, что для любого  $I_f \in B$  существует единственное решение  $f(x) \in \mathfrak{F}$ . В ряде случаев оказывается, что  $L$  – непрерывно обратимый оператор из  $\mathfrak{F}$  в  $B$ .

Тогда

$$f = L^{-1}I_f.$$

Пусть  $L^{-1}$  также имеет вид интегрального, т.е.

$$f(x) = \int_0^{\infty} H(\alpha, x) I_f(\alpha) d\alpha. \quad (2.4)$$

### Определение 2.2

При выполнении условий

$$H(\alpha, x) = K(\alpha, x)$$

для обратного преобразования (2.4), функция  $K(\alpha, x)$  называется *ядром Фурье*.

Рассмотрим частный случай  $K(x, \alpha) = K(\alpha x) = K(\alpha, x)$ .

### Теорема 2.1

Для того, чтобы функция  $K(x)$  являлась ядром Фурье необходимо, чтобы ее преобразование Меллина

$$\mathbf{K}(s) = \int_0^{\infty} K(x) x^{s-1} dx$$

удовлетворяло равенству

$$\mathbf{K}(s)\mathbf{K}(1-s) = 1.$$

**Доказательство.** Умножим обе части соотношения (2.3) на  $\alpha^{s-1}$  и проинтегрируем от 0 до  $\infty$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(s) &\equiv \int_0^{\infty} I_f(\alpha) \alpha^{s-1} d\alpha = \\ &= \int_0^{\infty} \alpha^{s-1} \int_0^{\infty} K(\alpha x) f(x) dx d\alpha = \int_0^{\infty} f(x) \int_0^{\infty} K(\alpha x) \alpha^{s-1} d\alpha dx. \end{aligned}$$

После замены переменных  $u = \alpha x$  получим

$$\mathbf{I}(s) \equiv \int_0^{\infty} f(x) dx \int_0^{\infty} K(u) u^{s-1} x^{-s} du = \int_0^{\infty} f(x) x^{-s} ds \mathbf{K}(s).$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{I}(s). \quad (2.5)$$

Проделав те же преобразования для формулы (2.4), получим, что

$$\mathbf{I}(1-s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}(s),$$

что, после замены  $s$  на  $(1-s)$  приводит к

$$\mathbf{I}(s)\mathbf{K}(1-s) = \mathbf{F}(1-s).$$

Подстановка получившегося выражения для  $\mathbf{F}(1-s)$  в (2.5) завершает доказательство.

### Взвешенное преобразование Фурье.

За счет очень большой избыточности, кодируя функцию одного действительного переменного двумерной функцией (*взвешенное преобразование Фурье*)

$$Gf(\omega, s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-s)e^{-i\omega x} dx, \quad (2.6)$$

мы можем добиться лучшей локализации по  $x$  получаемой информации о спектре – модуле преобразования Фурье. Такое преобразование также называется *оконным преобразованием Фурье*.

При этом, *оконная функция*  $g(x)$  должна быть нормированной

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1.$$

Она должна иметь либо компактный носитель, содержащий 0, например

$$g(x) = \begin{cases} 1/(2h), & x \in [-h, h] \\ 0, & x \notin [-h, h] \end{cases}$$

либо быть “сосредоточенной с вычислительной точки зрения” в конечной окрестности 0, например Гауссовское окно

$$g(x) := \mathbf{N}_{\sigma,0}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

При этом ширина окна (ширина области локализации по  $x$ ) частотной информации  $Gf(\omega, s)$  в точке  $s$  определяется, соответственно, величинами  $h$  и  $\sigma$ . Эти величины должны согласоваться с характерной частотой сигнала (функции  $f$ ).