Введение.

Напомним определения понятий дискретизации и интерполяции.
Определение. Представление непрерывного (аналогового) сигнала x(t) дискретной последовательностью отсчетов $x(t_k)=x(k\Delta t)$, по которым с заданной точностью можно восстановить исходный непрерывный сигнал , называется **дискретизацией** на равномерной сетке.
Определение. Процесс восстановления дискретизированного сигнала называется **интерполяцией**.

Допустим , у нас есть непрерывное изображение *i(x,y)* . После дискретизации мы получаем дискретное изображение $I(x_k,y_m)$. Затем интерполируем его и переходим к изображению *i'(x,y)*.

Естественно возникает вопрос:

> Как нужно проводить дискретизацию, чтобы не происходила потеря информации?
> Т.е., когда возможно такое восстановление непрерывного изображения *i'(x,y)* по дискретному $I(x_k,y_m)$, чтобы оно совпадало с исходным изображением *i(x,y)*?

Ответ на этот вопрос может быть получен из теоремы Котельникова-Шеннона.

Теорема Котельникова-Шеннона.

Напомним определения пространств L_1 и L_2 и норм в них.

Определение. Пространством $L_1(R)$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций , интегрируемых на множестве *R*.
Определение. Нормой элемента *f* в пространстве $L_1(R)$ называется величина

$$\| f \|_{L_1} = \int_R |f(x)| dx$$

Определение. Пространством $L_2(R)$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций интегрируемых на множестве *R* с квадратом.
$L_2(R)$ – евклидово пространство, скалярное произведение для элементов *f* и *g* в нем вводится как $(f,g)=\int_R f(x)g(x)dx$.
Определение. Нормой элемента *f* в пространстве $L_2(R)$ называется величина

$$\| f \|_{L_2} = \sqrt{\int_R f^2(x)dx}$$

Преобразование Фурье $F(\gamma)$ функции *f(t)* определяется как

$$F(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i t\gamma} dt$$

для всех $\gamma \in R$.

Обозначим через *A(R)* множество преобразований Фурье всех функций *f*, принадлежащих пространству $L_1(R)$.

Теорема. Пусть $f\in L_1(R) \cap A(R)$ или $f \in L_2(R)$. Предположим, даны константы $T,\ \Omega >0$ такие что

$F(\gamma)$ равна 0 вне сегмента $[-\Omega, \Omega]$ (1)

и

$0<2T\Omega \le 1.$ (2)

Тогда

$$f(t)=2T\,\Omega \sum f(nT)\frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)} \quad , \tag{3}$$

причем ряд сходится поточечно на R, если $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{R}) \cap \mathrm{A}(\mathrm{R})$, и ряд сходится равномерно, если $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{R})$.

Т.о., сигнал, описываемый непрерывной функцией времени $f(t)$ с спектром с конечным еносителем, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени $T=1/(2\Omega)$, где Ω - ширина спектра сигнала.

Доказательство:

1) Пусть $f \in \mathrm{L}_1(\mathrm{R}) \cap \mathrm{A}(\mathrm{R})$.

Введем функцию $G(\gamma)$

$$G(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma), если |\gamma| < \Omega, \\ 0, если\, \Omega < |\gamma| \le \dfrac{1}{2T}. \end{cases}$$

Продолжим ее периодически с периодом $1/T$ на R. Тогда можем разложить $G(\gamma)$ в ряд Фурье, имеющий вид

$$G(\gamma) = \sum c_n e^{-\pi i n\gamma(2T)} \,,$$

где

$$c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\gamma) e^{\pi i n\gamma(2T)} d\gamma \;.$$

Из определения функции $G(\gamma)$ и из формулы обращения $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ следует, что $c_n=Tf(nT)$.

$f(t)= \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi \iota \tau\gamma} \delta\gamma$ -<по формуле обращения>

$= \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ -<по определению функции $G(\gamma)$>

$= \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum c_n e^{-2\pi i nT\gamma} e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ -<подставили выражение для ряда Фурье функции $G(\gamma)$>

$= \sum c_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i(t-nT)\gamma} d\gamma$ -<ряды Фурье интегрируемых функций можно интегрировать почленно>

$= \sum c_n \dfrac{\sin(2\pi\Omega(t-nT))}{\pi(t-nT)}$ -<получаем простым интегрированием>

$= 2T\Omega \sum f(nT)\dfrac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)}$ -<т.к. $c_n=Tf(nT)$, умножили и поделили на 2Ω> ,

ч.т.д.

2) Пусть $f \in L_2(R)$.
В пространстве L_2 теорема доказывается аналогично. Так же вводим функцию $G(\gamma)$, периодически продолжаем ее на R и раскладываем в ряд Фурье.
Заметим, что по определению преобразования Фурье в L_2

$$\| f(t) - \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}d\gamma \|_{L_2} = 0 . \qquad (5)$$

Пусть $S_n(\gamma)$ - n-я частичная сумма ряда Фурье функции $G(\gamma)$.

Введем функцию $\chi_\Omega(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in [-\Omega,\Omega] \\ 0, & \gamma \notin [-\Omega,\Omega] \end{cases}$.

Тогда ,

$$\| \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}d\gamma - \int_{-\Omega}^{\Omega} S_n(\gamma)e^{2\pi i t\gamma}d\gamma \|_{L_2}$$

$= \| \int \chi_\Omega(\gamma)(G(\gamma)-S_n(\gamma))e^{2\pi i t\gamma}d\gamma \|_{L_2}$ -<по определению $\chi_\Omega(\gamma)$>

$= \| \chi_\Omega(\gamma)(G(\gamma)-S_n(\gamma)) \|_{L_2}$ -< по теореме Планшереля $\| f(t) \|_{L_2} = \| F(\gamma) \|_{L_2}$ >

$$= \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega,\Omega]} . \qquad (6)$$

Так как S_n - n-я частичная сумма ряда Фурье G, то

$$\lim \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega,\Omega]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Используя это соотношение, (5) и (6), а также неравенство Гельдера и определение коэффициентов c_n, получаем требуемое в теореме равенство.

Теорема доказана.

Замечания к теореме Котельникова-Шеннона .

<u>Замечание 1</u>. Основой доказательств теоремы в пространствах L_1 и L_2 является возможность перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

<u>Замечание 2</u>. Исследуем вопрос о том, можно ли ослабить условие (2) теоремы.
Приведенный ниже пример показывает, что этого сделать нельзя.

Допустим, константы $T,\ \Omega > 0$ удовлетворяют неравенству $2T\Omega > 1$.

Возьмем функцию $f(t) = \dfrac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \in L_2(R)$.

Ясно, что преобразование Фурье этой функции $F(\gamma) = T\chi_{\left(\frac{1}{2T}\right)}(\gamma)$.

Следовательно, условие (1) выполнено.

Так как $f(nT)=\begin{cases} 0, \text{\textit{если} } n \neq 0 \\ 1, \text{\textit{если} } n = 0 \end{cases}$, то правая часть формулы (3) $g(t)= 2T\Omega\dfrac{\sin 2\pi\Omega t}{2\pi\Omega t}$.

Функции *f* и *g* не равны, так как обе непрерывны на *R* и *f(0)=1*, а $g(0)=2T\Omega>1$.
Т.е. правая часть не равна левой части, что противоречит условию, следовательно предположение о том, что $2T\ \Omega>1$ не верно.

Замечание 3. В формуле (3) константу *T* обычно называют периодом дискретизации, последовательность $\{f(nT) : n\in Z\}$ –последовательностью дискретизированных значений. Частота 2Ω называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации.

$T\equiv\dfrac{1}{2\Omega}$ - максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми импульсами.

Замечание 4. На практике восстановленная функция $f_0(t)$, как правило, не совпадает точно передаваемой функцией *f(t)*. Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции *f(t)* обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени и, следовательно, имеют неограниченные строго спектры. Выбор интервалов отсчетов $T>0$ означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами $\omega>\Omega_{\max}=\pi/T$ не передаются и не могут быть восстановлены.
Если $2T\Omega>1$, то исходная функция не может быть восстановлена. Возникающий при этом эффект называется алиасингом - *aliasing* (переводится также как *наложение*).