

Вопрос 1. Тригонометрические ряды. Ряд Фурье для функции с периодом 2π .

Определение 1. Тригонометрическим рядом $T(x)$ называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где

$$A_0(x) = a_0, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

n -я частичная сумма ряда $T(x)$ имеет вид

$$s_n(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^n A_m(x).$$

Коэффициенты a_n и b_n заданы: первые для $n \geq 0$, вторые для $n \geq 1$. Мы доопределим a_n b_n также для остальных целых значений n , положив $a_{-n} = a_n$ ($n > 0$), $b_0 = 0$, $b_{-n} = -b_n$ ($n > 0$), и обозначим

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n);$$

так что

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Таким образом, мы можем записать частичные суммы ряда $T(x)$ как

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^n \left\{ (c_m + c_{-m}) \cos mx + i(c_m - c_{-m}) \sin mx \right\} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m e^{imx},$$

а сам ряд, как

$$T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Исходный и получившийся ряды называются *действительным* и *комплексным тригонометрическими рядами*, соответственно.

Если тригонометрический ряд имеет суммой функцию $f(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, то

его коэффициенты могут быть просто выражены через $f(x)$. Допустим, например, что ряд сходится равномерно:

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left| \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) - s_n(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Тогда, помножив на $\cos mx$ и на $\sin mx$ или, в комплексном случае, на e^{imx} , проинтегрировав почленно от $-\pi$ до π , используя известные формулы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases},$$

найдем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (*)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

Если f действительно, то a_n и b_n действительны, а c_n и c_{-n} сопряжены. Если f нечетно, то $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если f четно, то $b_n = 0$ и формула для a_n преобразовывается аналогично.

Ряд Фурье для функции периода 2π .

Пусть задана некоторая функция $f(x)$ периода 2π , и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление возможно, то коэффициенты a_n и b_n необходимо получаются с помощью формул (*). Определенные этим способом коэффициенты a_n и b_n называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*. Наиболее часто используемым классом функций, для которых возможно их представление в виде ряда Фурье являются кусочно-гладкие функции.

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем

конечное число разрывов первого рода (*разрывами первого рода функции* $g(x)$ называются точки x_0 , где $g(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} g(x) = g(x_0 + 0)$).

Утверждение 1. Ряд Фурье функции $f(x)$ периода 2π , кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений x , причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва. Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

Вопрос 2. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ - функция, заданная для всех действительных x и кусочно-гладкая на каждом конечном интервале $[-l, l]$. Тогда на каждом таком отрезке $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

причем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du. \quad (**)$$

Пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Тогда имеет место формула (интегральная формула Фурье):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

называют *интегралом Фурье*.

Приведем соображения, поясняющие идею получения этой формулы.

Из (**), при $l \rightarrow \infty$ (x - фиксировано) получаем:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью обозначим:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \dots,$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \omega_n \int_{-l}^l f(u) \cos \omega_n (u-x) du,$$

напоминающий интегральную сумму для функции переменного ω

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega (u-x) du,$$

составленную для промежутка $[0, +\infty]$, что и позволит ожидать выполнения интегральной формулы Фурье.

Преобразование Фурье.

Исходя из интегральной формулы Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega (u-x) du,$$

и, учитывая, что для нечетной функции $f(u) \sin \omega (u-x)$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega (u-x) du,$$

можно получить, складывая первую из этих формул со второй, умноженной на i , что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u-x)} du \quad (\text{Интегральная формула Фурье в комплексной форме}).$$

Если обозначить

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du,$$

то получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (***)$$

Эти формулы образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию $F(\omega)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Формула (***) называется *формулой обращения Фурье*.

Формула

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции $f(u)$. Формула обращения дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус-* преобразования Фурье.

Например, считая $f(u)$ нечетной на $(-\infty, \infty)$, получаем пару взаимных *синус-* преобразований Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du,$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega.$$

Вопрос 3. Теорема Котельникова-Шеннона.

Напомним определения пространств L_1 и L_2 и норм в них.

Определение. Пространством $L_1(\mathbb{R})$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций, интегрируемых на множестве \mathbb{R} .

Определение. Нормой элемента f в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ называется величина

$$\|f\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

Определение. Пространством $L_2(\mathbb{R})$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций интегрируемых на множестве \mathbb{R} с квадратом.

$L_2(\mathbb{R})$ – евклидово пространство, скалярное произведение для элементов f и g в нем вводится как $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$.

Определение. Нормой элемента f в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ называется величина

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx}$$

Преобразование Фурье $F(\gamma)$ функции $f(t)$ определяется как

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \gamma} dt$$

для всех $\gamma \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $A(\mathbb{R})$ множество преобразований Фурье всех функций f , принадлежащих пространству $L_1(\mathbb{R})$.

Теорема. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ или $f \in L_2(\mathbb{R})$. Предположим, даны константы $T, \Omega > 0$ такие что

$$F(\gamma) \text{ равна } 0 \text{ вне сегмента } [-\Omega, \Omega] \quad (1)$$

и

$$0 < 2T\Omega \leq 1. \quad (2)$$

Тогда

$$f(t) = 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t - nT)]}{2\pi\Omega(t - nT)}, \quad (3)$$

причем ряд сходится поточечно на \mathbb{R} , если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$, и ряд сходится равномерно, если $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Т.о., сигнал, описываемый непрерывной функцией времени $f(t)$ с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени $T = 1/(2\Omega)$, где Ω – ширина спектра сигнала.

Доказательство:

1) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$.

Введем функцию $G(\gamma)$

$$G(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma), & \text{если } |\gamma| < \Omega, \\ 0, & \text{если } \Omega < |\gamma| \leq \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Продолжим ее периодически с периодом $1/T$ на \mathbb{R} . Тогда можем разложить $G(\gamma)$ в ряд Фурье, имеющий вид

$$G(\gamma) = \sum_n c_n e^{-\pi i n \gamma (2T)},$$

где

$$c_n = T \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{\pi i n \gamma (2T)} d\gamma.$$

Из определения функции $G(\gamma)$ и из формулы обращения $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma$ следует, что $c_n = T f(nT)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{-<по формуле обращения>} \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{-<по определению функции } G(\gamma)\text{>} \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_n c_n e^{-2\pi i n T \gamma} e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{-<подставили выражение для ряда Фурье функции } G(\gamma)\text{>} \\ &= \sum_n c_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i (t-nT)\gamma} d\gamma \quad \text{-<ряды Фурье интегрируемых функций можно интегрировать почленно>} \\ &= \sum_n c_n \frac{\sin(2\pi \Omega (t-nT))}{\pi (t-nT)} \quad \text{-<получаем простым интегрированием>} \\ &= 2T \Omega \sum_n f(nT) \frac{\sin[2\pi \Omega (t-nT)]}{2\pi \Omega (t-nT)} \quad \text{-<т.к. } c_n = T f(nT)\text{, умножили и поделили на } 2\Omega\text{> ,} \end{aligned}$$

ч.т.д.

2) Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$.

В пространстве L_2 теорема доказывается аналогично. Так же вводим функцию $G(\gamma)$, периодически продолжаем ее на \mathbb{R} и раскладываем в ряд Фурье.

Заметим, что по определению преобразования Фурье в L_2

$$\|f(t) - \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma\|_{L_2} = 0. \quad (5)$$

Пусть $S_n(\gamma)$ - n -я частичная сумма ряда Фурье функции $G(\gamma)$.

Введем функцию $\chi_{\Omega}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in [-\Omega, \Omega] \\ 0, & \gamma \notin [-\Omega, \Omega] \end{cases}$.

Тогда,

$$\begin{aligned} &\| \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma - \int_{-\Omega}^{\Omega} S_n(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \|_{L_2} \\ &= \| \int \chi_{\Omega}(\gamma) (G(\gamma) - S_n(\gamma)) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \|_{L_2} \quad \text{-<по определению } \chi_{\Omega}(\gamma)\text{>} \\ &= \| \chi_{\Omega}(\gamma) (G(\gamma) - S_n(\gamma)) \|_{L_2} \quad \text{-< по теореме Планшереля } \|f(t)\|_{L_2} = \|F(\gamma)\|_{L_2} \text{ >} \end{aligned}$$

$$= \|G(\gamma) - S_n(\gamma)\|_{L_2[-\Omega, \Omega]} \cdot \quad (6)$$

Так как S_n -я частичная сумма ряда Фурье G , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G(\gamma) - S_n(\gamma)\|_{L_2[-\Omega, \Omega]} = 0$$

Используя это соотношение, (5) и (6), а также неравенство Гельдера и определение коэффициентов c_n , получаем требуемое в теореме равенство.

Теорема доказана.

Вопрос 4. Невозможность ослабления условий теоремы Котельникова-Шеннона, понятие алиасинга.

Замечания к теореме Котельникова-Шеннона .

Замечание 1. Основой доказательств теоремы в пространствах L_1 и L_2 является возможность перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

Замечание 2. Исследуем вопрос о том, можно ли ослабить условие (2) теоремы. Приведенный ниже пример показывает, что этого сделать нельзя.

Допустим, константы $T, \Omega > 0$ удовлетворяют неравенству $2T\Omega > 1$.

Возьмем функцию $f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \in L_2(\mathbb{R})$.

Ясно, что преобразование Фурье этой функции $F(\gamma) = T \chi_{\left(\frac{1}{2T}\right)}(\gamma)$.

Следовательно, условие (1) выполнено.

Так как $f(nT) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 0 \\ 1, & \text{если } n = 0 \end{cases}$, то правая часть формулы (3) $g(t) = 2T\Omega \frac{\sin 2\pi\Omega t}{2\pi\Omega t}$.

Функции f и g не равны, так как обе непрерывны на \mathbb{R} и $f(0)=1$, а $g(0)=2T\Omega > 1$. Т.е. правая часть не равна левой части, что противоречит условию, следовательно предположение о том, что $2T\Omega > 1$ не верно.

Итак, мы доказали, что, если функция f разложима в ряд Котельникова (3) и спектр ее равен нулю вне отрезка $[-\Omega, \Omega]$, выполняется соотношение $0 < 2T\Omega \leq 1$.

Замечание 3. В формуле (3) константу T обычно называют периодом дискретизации, последовательность $\{f(nT) : n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательностью дискретизированных значений. Частота 2Ω называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации.

$T \equiv \frac{1}{2\Omega}$ - максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми импульсами.

Замечание 4. На практике восстановленная функция $f_0(t)$, как правило, не совпадает точно передаваемой функцией $f(t)$. Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции $f(t)$ обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени и, следовательно, имеют неограниченные строго спектры. Выбор интервалов отсчетов $T > 0$ означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами $\omega > \Omega_{\max} = \pi/T$ не передаются и не могут быть восстановлены.

Если $2T\Omega > 1$, то исходная функция не может быть восстановлена, возникающий эффект называется aliasing.

Вопрос 5. *Свёртка и корреляционная функция. Применение корреляционной функции для сравнения изображений.*

Определение. Взаимной корреляцией (далее просто корреляцией) назовём оператор

$$f \otimes g = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x + u, y + v)dudv$$

Нормализованный оператор взаимной корреляции

$$\frac{f \otimes g}{\sqrt{\int \int f^2 \int \int g^2}} \leq 1$$

Следствие из неравенства Шварца ($(\int f g)^2 \leq \int f^2 \int g^2$)

$$\frac{f \otimes g}{\sqrt{\int \int f^2} \sqrt{\int \int g^2}} \begin{cases} = 1, & \text{в точках } (x, y), \text{ для которых } f=cg \\ < 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применение корреляции для сравнения изображений. Предположим, что область, где $f > 0$ мала по сравнению с областью $g > 0$. Можно рассматривать f как шаблон (часто говорят *фильтр*). Нормализованная взаимная корреляция f и g в точке (x, y) будет равна 1 только в случае совпадения с точностью до множителя областей f и g .

Определение. Свёрткой назовём оператор

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x - u, y - v)dudv$$

Это равенство может быть переписано как

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u, -v)g(x + u, y + v)dudv$$

Очевидно что свёртка $f(x, y), g(x, y)$ эквивалентна корреляции $f(-x, -y), g(x, y)$, а корреляции $f(x, y), g(x, y)$ эквивалентна свёртке $f(-x, -y), g(x, y)$. Для чётной $f(x, y)$ операторы свёртки и корреляции эквивалентны. Полезные формулы:

1. $f \otimes g = g \otimes f$
2. $f * g = g * f$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f(x, y) * g(x, y) = f(-x, -y) \otimes g(x, y)$

Теорема. (О свёртке) Пусть $f \in L^1(R)$ и $h \in L^1(R)$. Функция $g = h * f$ принадлежит $L^1(R)$ и

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) \quad (\hat{g} \text{— преобр. Фурье } g)$$

Доказательство:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-it\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)h(u)du \right) dt$$

Так как $|f(t-u)||h(u)|$ интегрируема в R^2 , мы можем применить теорему Фубини, и замена переменных $(t, u) \rightarrow (v = t - u, u)$ даёт

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(u+v)\omega) f(v)h(u)dudv = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iv\omega) f(v)dv \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iu\omega) h(u)du \right)$$

теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива для функций из R^2 . Таким образом свёртка (и корреляция) быстро считаются через преобразования Фурье.

Вопрос 6 "Формулы Парсеваля и Планшереля. Устойчивость преобразования Фурье в L^2 "

Уравнения (1) и (2) называются соответственно формулами Парсеваля и Планшереля. Из следующей теоремы следует, что преобразование Фурье сохраняет (с точностью до 2π) скалярное произведение и норму в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Теорема. Если функции f и h принадлежат $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w) dw, \quad (1)$$

при $h = f$ из этого следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $g = f * \bar{h}$, где $\bar{h}(t) = h^*(-t)$. Теорема о свертке (3) и свойство (4) показывают, что $\hat{g}(w) = \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)$. Формула восстановления (5), примененная к $g(0)$, дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t) dt = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w) dw.$$

Использование плотности и продолжение на $L^2(\mathbb{R})$. Если $f \in L^2(\mathbb{R})$, но $f \notin L^1(\mathbb{R})$, то ее преобразование Фурье не может быть вычислено с помощью интеграла Фурье (6), потому что $f(t)e^{-iwt}$ не интегрируема. Оно определяется как предел преобразований Фурье функций из $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Так как $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ плотно в $L^2(\mathbb{R})$, то можно найти семейство $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ функций из $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, которые сходятся к f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Так как $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ сходится, то оно является последовательностью Коши; это означает, что $\|f_n - f_p\|$ произвольно мала при достаточно больших n и p . Более того, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, поэтому их преобразования Фурье хорошо определены. Из формулы Планшереля следует, что $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ также является последовательностью Коши, потому что:

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_p\|$$

произвольно мала при достаточно больших n и p . Пространство Гильберта - полное; это означает, что любая последовательность Коши сходится к элементу этого пространства. Следовательно, существует $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, такая что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \hat{f}_n\| = 0.$$

По определению, \hat{f} —преобразование Фурье функции f . Это продолжение преобразования Фурье на $L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет теореме о свертке, формулам Парсеваля и Планшереля, так же как и всем ранее рассмотренным свойствам преобразования

Фурье.

Ссылки.

$$f, h \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{свертка } g = h * f \in L^1(\mathbb{R}), \text{ и } \hat{g}(w) = \hat{f}(w)\hat{h}(w). \quad (3)$$

$$\text{Если } f(t) \doteq \hat{f}(t), \text{ то } f^*(t) \doteq \hat{f}^*(t). \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw. \quad (5)$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt. \quad (6)$$

Вопрос 7 "Невозможность одновременного существования компактного носителя для функции и ее преобразования Фурье"

Теорема. Если $f \neq 0$ имеет компактный носитель, то $\hat{f}(w)$ не может иметь компактного носителя. Аналогично, если $\hat{f}(w)$ имеет компактный носитель, то $f(t)$ не может иметь компактного носителя.

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, так как второе следует из первого с помощью преобразования Фурье. Если \hat{f} имеет компактный носитель, содержащийся в $[-b, b]$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) e^{iwt} dw.$$

Если $f(t) = 0$ при $t \in [c, d]$, то дифференцируя n -раз под знаком интеграла, получим в точке $t_0 = (c + d)/2$

$$f^{(n)}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) (iw)^n e^{iwt_0} dw = 0.$$

Так как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \hat{f}(w) e^{iw(t-t_0)} e^{iwt_0} dw,$$

то разложение $e^{iw(t-t_0)}$ в бесконечный ряд дает для всех $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[i(t-t_0)]^n}{n!} \int_{-b}^b \hat{f}(w) w^n e^{iwt_0} dw = 0.$$

Это противоречит нашему предположению, что $f \neq 0$.

Вопрос 8. Основные соотношения между пространственной и частотной информацией.

Определённый интеграл. Определённый интеграл от функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен значению преобразования Фурье в 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(0), \quad (f \doteq F)$$

Вывод

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xs}dx \Big|_{s=0} = F(0).$$

Из симметрии преобразования Фурье следует $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = f(0)$

Первый момент.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{F'(0)}{-2\pi i}.$$

Выводится из теоремы о производной

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi xi)f(x)e^{-i2\pi xs}dx = F'(s).$$

Центроид.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}.$$

$\langle x \rangle$ можно рассматривать как центр масс стержня с распределением плотности $f(x)$, или как время сигнала, если рассматривать функцию $f(t)$ как зависимость энергии сигнала от времени.

Связь центроида с преобразованием Фурье:

$$\langle x \rangle = -\frac{F'(0)}{2\pi iF(0)}.$$

Второй момент (момент инерции).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{F''(0)}{-4\pi^2}.$$

Выводится из теоремы о производной

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi xi)^2 f(x) e^{-i2\pi xs} dx = F''(s).$$

Моменты.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}.$$

Среднеквадратичная абсцисса (*Крылов никак не называл эту характеристику, я почти дословно перевёл Bracewell'a*)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}.$$

$$\langle x^2 \rangle_{f * g} = \langle x^2 \rangle_f + \langle x^2 \rangle_g + 2 \frac{F'(0)}{2\pi i F(0)} \frac{G'(0)}{2\pi i G(0)}.$$

Взяв $g = \delta(x - a)$ получим

$$\langle x^2 \rangle_{f(x-a)} = \langle x^2 \rangle_f + a^2.$$

Дисперсия.

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{(F'(0))^2}{4\pi^2 (F(0))^2}.$$

$$\sigma_{f * g}^2 = \sigma_f^2 + \sigma_g^2.$$

Ширина локализации.

$$W_f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds} = \frac{1}{W_F}.$$

Вопрос 9. Соотношение неопределённости.

Некоторые неравенства. $|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)| ds$ выводится из

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{i2\pi xs} ds. \text{ Аналогично } |f'(x)| \leq 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |sF(s)| ds.$$

Неравенство Шварца. Для действительных функций

$$\left[\int g(x)f(x) dx \right]^2 \leq \int g^2(x) dx \int f^2(x) dx.$$

Для комплексных функций:

$$\left[\int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x)) dx \right]^2 \leq 4 \int gg^*(x) dx \int ff^*(x) dx$$

Доказательство. Пусть ε - действительная константа

$$0 < \int (f(x) + \varepsilon g(x))(f(x) + \varepsilon g(x))^* dx.$$

$$0 < \int f(x)f(x)^* dx + \varepsilon \int (g^*(x)f(x) + g(x)f^*(x)) dx + \varepsilon^2 \int g(x)g(x)^* dx.$$

В правой части неравенства стоит полином 2й степени относительно ε : $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$. для выполнения неравенства необходимо $b^2 - 4ac < 0$, откуда следует н-во Шварца. **Соотношение неопределённости.** Обозначим $(\Delta x)^2$ дисперсию $|f(x)|^2$, а $(\Delta s)^2$ - второй момент $|F(s)|^2$.

$$(\Delta x)^2 (\Delta s)^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}.$$

Для доказательства понадобится неравенство Шварца, формула $\int f' f'^* dx = 4\pi^2 \int s^2 F F^* ds$ и формула интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 (\Delta s)^2 &= \frac{\int x^2 f f^* dx \int s^2 F F^* ds}{\int f f^* dx \int F F^* ds} = \frac{\int x f x f^* dx \int f' f'^* dx}{4\pi^2 (\int f f^* dx)^2} \geq \\ &= \frac{|\int x f^* f' + x f f'^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} = \frac{|\int x d(f f^*)|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} = \frac{|\int f f^* dx|^2}{16\pi^2 (\int f f^* dx)^2} = \frac{1}{16\pi^2}. \end{aligned}$$

Вопрос 10. Габоровская фильтрация.

Функция Габора для плоскости и её Фурье-преобразование могут быть записаны как

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right) + 2\pi i W x\right],$$

$$G(u, v) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{(u - W)^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2}\right]\right\}$$

где $\sigma_u = 1/2\pi\sigma_x$ и $\sigma_v = 1/2\pi\sigma_y$. Рассмотрим класс автомодельных функций, называемых вейвлетами Габора. Возьмём $g(x, y)$ в качестве базового вейвлета. Тогда набор функций для автомодельного фильтра может быть получен путем масштабирования и перемещения $g(x, y)$

$$g_{mn}(x, y) = a^{-m} g(x', y'), \quad a > 1, \quad m, n = \text{integer}$$

$$x' = a^{-m}(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \text{и} \quad y' = a^{-m}(-x \sin \theta + y \cos \theta),$$

где $\theta = n\pi/K$ и K — общее число направлений. Коэффициент сжатия a^{-m} нужен для гарантии независимости энергии от m . Этот набор функций образует неортогональный базис для разложения по переменным областям.

Неортогональность вейвлетов Габора означает избыточность информации в профильтрованном изображении. Для уменьшения этой избыточности применяется следующий метод. Пусть U_1 и U_h обозначают верхнюю и нижнюю границы интересующих нас частот, K — количество направлений и S — число масштабирований. Этот метод обеспечивает, что области, в которых выделяемые фильтром частоты имеют значения больше половины своего максимума, соприкасаются между собой, как показано на рисунке. Используются следующие формулы для вычисления параметров σ_u σ_v

$$a = (U_h/U_1)^{1/(S-1)}, \quad \sigma_u = \frac{(a-1)U_h}{(a+1)\sqrt{2 \ln 2}},$$

$$\sigma_v = \tan\left(\frac{\pi}{2K}\right) \left[U_h - 2 \ln 2 \left(\frac{\sigma_u^2}{U_h}\right) \right] \left[2 \ln 2 - \frac{(2 \ln 2)^2 \sigma_u^2}{U_h^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

где $W = U_h$ и $m = 0.1 \dots, S-1$. Для того, чтобы убрать чувствительность фильтра к абсолютной интенсивности, действительные (чётные) компоненты 2D фильтра Габора сдвигаются добавлением константы в 0. (Это также можно сделать задав $G(0, 0) = 0$). Фильтрация изображения $I(x, y)$ функцией $g_{mn}(x, y)$ будет иметь результат

$$W_{mn}(x, y) = \int I(x, y) g_{mn}^*(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

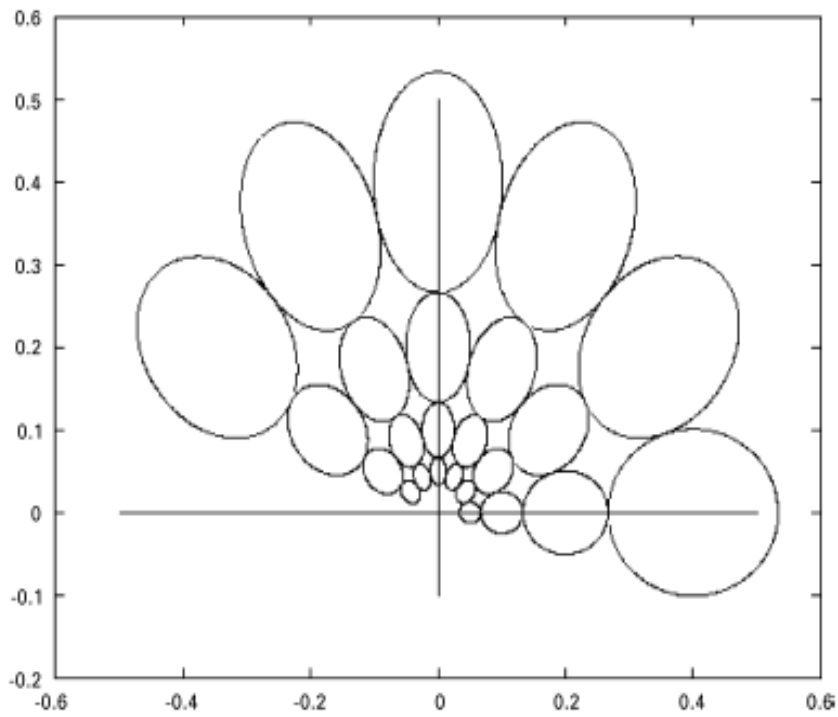


Fig. 1. The contours indicate the half-peak magnitude of the filter responses in the Gabor filter dictionary. The filter parameters used are $U_h = 0.04$, $U_l = 0.05$, $K = 6$ and $S = 4$ [6].

Вопрос 11 "Функции Эрмита—ортогональная система собственных функций преобразования Фурье."

Преобразование Фурье можно рассматривать как линейный ограниченный оператор F , отображающий $L^2(\mathbb{R})$ в себя. Найдем базис пространства, состоящий из собственных функций оператора F . Для этой цели заметим, что уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - x^2 f = \mu f \quad (1)$$

переводится преобразованием Фурье в такое же уравнение (предполагается, что неизвестная функция f удовлетворяет соответствующим условиям гладкости и убывания на бесконечности), поскольку операция $\frac{d^2}{dx^2}$ переходит в умножение на $-\lambda^2$, а умножение на $-x^2$ —в операцию $\frac{d^2}{d\lambda^2}$. Поэтому естественно искать собственные функции F как решения уравнения (1). Будем искать решения этого уравнения, имеющие вид $f = w e^{-x^2/2}$, где w —многочлен. Подставив это выражение в (1), получим для w уравнение

$$w'' - 2xw' = (\mu + 1)w.$$

Полагая $w = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, получаем равенство

$$\begin{aligned} (2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}) - \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) = \\ = (\mu + 1)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, находим, что

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (\mu + 1)a_{k-2}. \quad (2)$$

Поскольку $a_n \neq 0$, должно быть $\mu = -(2n+1)$, и $a_{n-1} = 0$. Все коэффициенты многочлена w определяются из (2) с точностью до постоянного множителя. Таким образом, мы получаем рекуррентную формулу: $a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k$ (если a_n задано). Отсюда формула для w :

$$w_n(x) = a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \dots \right).$$

Итак, мы построили систему функций вида $\varphi_n(x) = w_n(x) e^{-x^2/2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ясно, что каждая из этих функций принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ благодаря множителю $e^{-x^2/2}$. Докажем ортогональность системы. Согласно (1) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n''(x) - x^2 \varphi_n(x) &= -(2n+1)\varphi_n(x), \\ \varphi_m''(x) - x^2 \varphi_m(x) &= -(2m+1)\varphi_m(x). \end{aligned}$$

Умножив первое из этих равенств на φ_m , а второе на $-\varphi_n$, и складывая их, получим

$$[\varphi_n' \varphi_m - \varphi_m' \varphi_n]' = 2(m-n)\varphi_n \varphi_m.$$

Если $n \neq m$, то интегрируя это равенство, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \frac{1}{2(m-n)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'_n \varphi_m - \varphi'_m \varphi_n]' dx = \\ = \frac{1}{2(m-n)} [\varphi'_n \varphi_m - \varphi'_m \varphi_n]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Таким образом, ортогональность доказана.

Каждый из элементов φ_n полученной ортогональной системы представляет собой многочлен степени n , умноженный на $e^{-x^2/2}$. Следовательно, ее элементы должны (с точностью до числовых множителей) совпадать с функциями Эрмита. Покажем теперь, что функции $\{\varphi_n\}$ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$F\varphi_n = c_n \varphi_n. \quad (3)$$

Это вытекает из следующих фактов:

- 1). Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования F .
- 2). Уравнение (1) при каждом n имеет, с точностью до постоянного множителя, лишь одно решение вида $P_n(x) e^{-x^2/2}$, где P_n — многочлен степени n .
- 3). Преобразование Фурье переводит $x^n e^{-x^2/2}$ в $\left(i \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} = Q_n(x) e^{-x^2/2}$, где Q_n — многочлен степени n (проверяется по индукции). Из равенства (3) следует, что при каждом целом k

$$F^k \varphi_n = c_n^k \varphi_n.$$

Но преобразование Фурье, примененное четырежды, переводит каждую функцию в себя, умноженную на $4\pi^2$. Поэтому $c_n^4 = 4\pi^2$, т.е. c_n может принимать лишь значения $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Итак, преобразование Фурье F в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ есть линейный оператор, который в базисе, состоящем из функций Эрмита, записывается как диагональная матрица с элементами вида $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Ссылки. Многочлены Эрмита ортогональны на всей числовой оси с весом $p(x) = e^{-x^2}$, и определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (4)$$

Иногда рассматриваются другие многочлены Эрмита, определяемые формулами

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}; \quad H_n^*(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как для $H_n(x)$ верны равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2^n \sqrt{\pi n!} & \text{при } m = n, \end{cases}$$

ортонормированную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{n/2} (n!)^{1/2} \pi^{1/4}}.$$

Вопрос 12 "Теорема Сони́на. Поведение функций Эрмита."

Теорема Сони́на. Если функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяет там уравнению

$$u'' + \varphi(t)u = 0, \quad (1)$$

в котором функция $\varphi(t)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале (a, b) , причем ее производная $\varphi'(t)$ положительна (отрицательна), то относительные максимумы величины $|u(t)|$ убывают (возрастают) при возрастании t от a до b .

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\nu(t) = u^2(t) + \frac{1}{\varphi(t)}[u'(t)]^2$.

В экстремальных точках функции $u(t)$ выполняется условие

$$\nu(t) = u^2(t). \quad (2)$$

Далее, учитывая уравнение (1), получаем равенство

$$\nu'(t) = 2u(t)u'(t) + \frac{2u'(t)u''(t)}{\varphi(t)} - \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}[u'(t)]^2 = -\varphi'(t) \left[\frac{u'(t)}{\varphi(t)} \right]^2,$$

из которого следует, что функция $\nu(t)$ при положительности $\varphi'(t)$ монотонно убывает при возрастании t от a до b . Но, поскольку в точках экстремума функции $u(t)$ выполняется условие (2), то, следовательно, максимумы величины $|u(t)|$ монотонно убывают на $[a, b]$. Аналогично, если производная $\varphi'(t)$, отрицательна, то функция $\nu(t)$ возрастает на $[a, b]$ и таким же свойством обладают относительные максимумы величины $|u(t)|$.

Поведение функций Эрмита. Оценим область локализации φ -ий Эрмита — найдём крайние точки перегиба φ -ий. Т.к. n -ая функция Эрмита отвечает уравнению

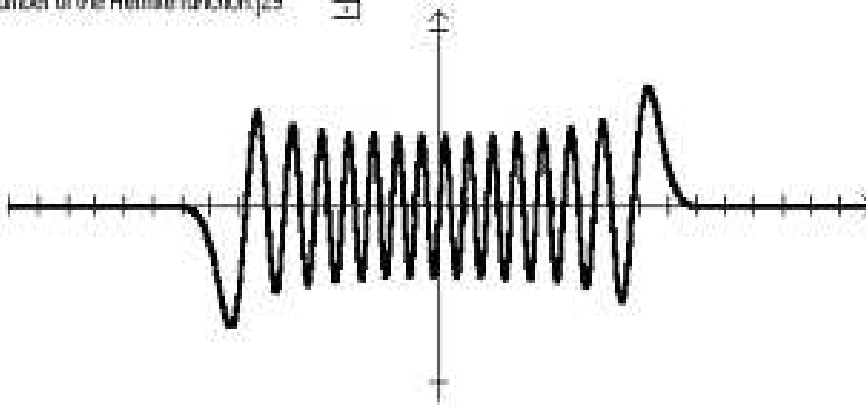
$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} - x^2 f_n = -(2n + 1)f_n,$$

$f'' = 0$ в точках $\sqrt{2n + 1}$, $-\sqrt{2n + 1}$. Покажем, что максимумы $|f_n(x)|$ возрастают при $x > 0$ и убывают при $x < 0$. Для этого применим теорему Сони́на к

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} - x^2 f_n = -(2n + 1)f_n, \quad -\sqrt{2n + 1} < x < \sqrt{2n + 1}.$$

тогда $\varphi(x) = 2n + 1 - x^2$, $\varphi > 0$ при $-\sqrt{2n + 1} < x < \sqrt{2n + 1}$, $\varphi' < 0$ при $0 < x < \sqrt{2n + 1}$ и $\varphi' > 0$ при $-\sqrt{2n + 1} < x < 0$ — работает теорема Сони́на.

Number of the Hermite function:



Вопрос 13 "Проекционная фильтрация изображений с помощью функций Эрмита."

Проекционная схема локальной обработки изображений основана на разложении по собственным функциям преобразования Фурье. Эта схема может использоваться для компрессии изображений и других типов медиаданных, их фильтрации, трассировки контуров, определении структур и свойств объектов.

Функции Эрмита удовлетворяют необходимым условиям для обработки изображений, так как они образуют полную ортонормированную в $L^2(\mathbb{R})$ систему функций. Они определяются следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

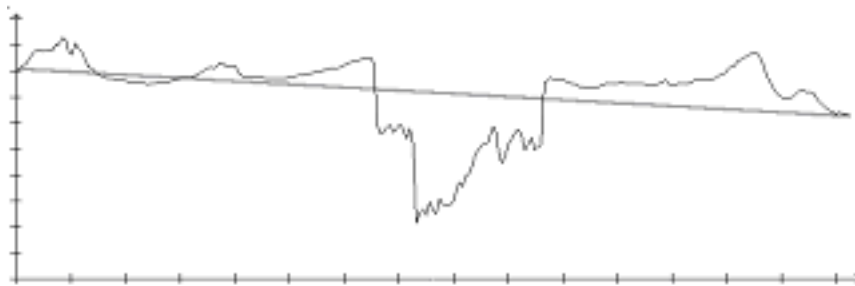
Функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$F(\varphi_n) = i^n \varphi_n,$$

где F —оператор преобразования Фурье.

Базовые линии. Для каждой линии исходного изображения мы вычитаем вычисленную базовую линию из исходных данных и центруем результат относительно оси градаций. Таким образом, если мы имеем изображение $I[j, i]$, $i = 0 \dots width$, $j = 0 \dots height$, то тогда базовые линии можно определить как

$$baseline_j(i) = I[j, 0] + \frac{I[j, width] - I[j, 0]}{width} \cdot i.$$



Базовая линия (толстая линия) и исходная линия (тонкая линия) для $j = 30$.

Теперь полученное изображение готово для дальнейшей обработки.

Аппроксимированные линии. На этом этапе, во-первых, мы должны выбрать число функций Эрмита для фильтрации. Далее мы растягиваем наш отрезок аппроксимации $[-A_0, A_0]$ до отрезка $[-A_1, A_1]$, определенного по следующему критерию:

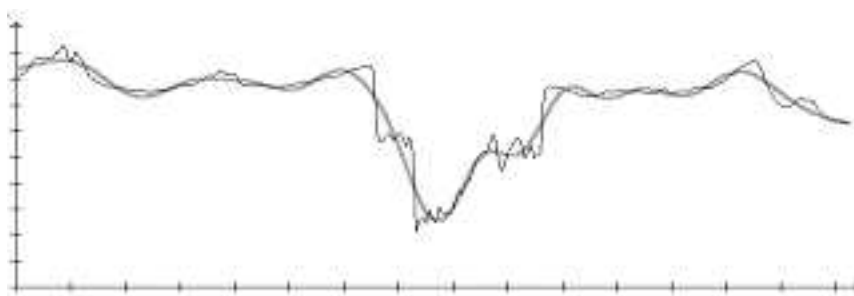
$$\int_{-A_1}^{A_1} \varphi_n^2(x) dx = 0.99,$$

где n —число функций Эрмита, используемых для аппроксимации. Потом мы раскладываем функцию $f(x)$, полученную при вычитании базовой линии из j -уровня

исходного изображения, в ряд Фурье:

$$value(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(x)$$
$$c_i = \int_{-A_1}^{A_1} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Так как функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье, то мы получаем и аппроксимацию преобразования Фурье для j -уровня исходного изображения.



Аппроксимированная линия (толстая линия) и исходная линия (тонкая линия) для $j = 30$ для 20 функций Эрмита.

1D проход. Аппроксимируя каждую линию нашего изображения, мы получим изображение с одномерной фильтрацией. Число функций для всех линий берется одинаковое. Поэтому полученный шаблон определяется базовыми линиями и коэффициентами разложения для каждой линии.

2D проход. Если мы рассмотрим полученный шаблон исходного изображения как новое изображение, повернутое на 90° , и проведем для него все предыдущие вычисления, мы получим изображение с двумерной фильтрацией. Число функций для второго прохода может быть отличным от числа функций, используемых на первом проходе. Следовательно, полученный двумерный шаблон определяется только базовыми линиями и коэффициентами разложения для каждого столбца одномерного отфильтрованного шаблона.

В случае одномерного прохода обработка изображения осуществляется по принципу линия за линией. Поэтому для задач, непосредственно связанных с трассировкой объектов, фильтрацией и компрессией, лучше использовать двумерный проход.

Функции Эрмита позволяют нам разделить "декодированное изображение" (низкочастотная часть) и "изображение разности" (высокочастотная часть). Здесь, концепция частоты соотносится с выполнением операции преобразования Фурье и основана на рядах функций Эрмита. Эти ряды являются аналогом тригонометрических рядов Фурье, но функции Эрмита могут использоваться в случае бесконечного интервала, тогда как тригонометрический ряд Фурье использует конечный интервал.

Вопрос 14 "Устойчивость решения систем линейных алгебраических уравнений."

Говорят, что задача поставлена корректно, если ее решение существует и единственно и если оно непрерывно зависит от входных данных. Последнее свойство называется устойчивостью относительно входных данных.

Будем рассматривать систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f \quad (1)$$

с матрицей порядка $m \times n$.

Матрица A^* размера $n \times m$ называется сопряженной к A , если $\{A^*\}_{ji} = \{A\}_{ij}$ для всех i, j .

Число λ называется собственным значением (собственным числом) матрицы A , если существует такой ненулевой вектор x , что $Ax = \lambda x$.

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений матрицы A^*A называются сингулярными числами матрицы A .

Вещественное число $\|A\|$, поставленное в соответствие матрице A , называется нормой матрицы, если выполнены аксиомы: $\|A\| > 0$, если $A \neq 0$, $\|0\| = 0$; $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|AC\| \leq \|A\| \|C\|$ для любого числа α и любых матриц A, B, C . Наиболее употребительными являются следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \text{— } 1\text{-норма,} \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{— } \infty\text{-норма,} \\ \|A\|_M &= M(A) = (mn)^{1/2} \max_{i,j} |a_{ij}| \text{— } M\text{-норма,} \\ \|A\|_2 &= \text{максимальное сингулярное число матрицы — спектральная норма,} \\ \|A\|_E &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \text{— евклидова норма.} \end{aligned}$$

Наряду с основной системой (1) рассмотрим "возмущенную" систему

$$A\tilde{x} = \tilde{f}. \quad (2)$$

Нас интересует, насколько сильно может измениться решение x в результате изменения правой части. Обозначим $\delta x = \tilde{x} - x$, $\delta f = \tilde{f} - f$. Говорят, что система (1) устойчива по правой части, если при любых f, \tilde{f} справедлива оценка

$$\|\delta x\| \leq M_1 \|\delta f\|, \quad (3)$$

где $M_1 > 0$ —постоянная, не зависящая от правых частей f, \tilde{f} . Оценка выражает факт непрерывной зависимости решения от правой части: $\|\delta x\| \rightarrow 0$ при $\|\delta f\| \rightarrow 0$.

Легко показать, что если $\det A \neq 0$, то система (1) устойчива по правой части: из (1) и (2) следует уравнение для погрешности $A(\delta x) = \delta f$, откуда

$$\begin{aligned} \delta x &= A^{-1}(\delta f), \\ \|\delta x\| &\leq \|A^{-1}\| \|\delta f\|, \end{aligned} \quad (4)$$

т.е. выполнено (3) с константой $M_1 = \|A^{-1}\|$. Заметим, что чем ближе к нулю определитель матрицы A , тем больше постоянная M_1 , и, тем сильнее погрешность правой части может исказить искомое решение.

Число обусловленности. Рассмотрим теперь относительные погрешности правой части и решения:

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}.$$

Получим оценку, выражающую относительную погрешность решения через относительную погрешность правой части. Для этого используем неравенство

$$\|f\| \leq \|A\|\|x\|, \quad (5)$$

которое следует из (1). Перемножив (4) и (5), получим искомую оценку:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad (6)$$

где

$$M_A = \|A^{-1}\|\|A\|. \quad (7)$$

Число M_A называется числом обусловленности матрицы A . Для спектральной нормы число обусловленности $M_A = \frac{\alpha_1}{\alpha_n}$, где α_1 и α_n —наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы A . Матрицы с большим числом обусловленности называются плохо обусловленными, при численном решении систем с такими матрицами возможно сильное накопление погрешностей.

Свойства числа обусловленности:

1). $M_A \geq 1$.

2). $M_A \geq \frac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$, где $\lambda_{max}(A)$ и $\lambda_{min}(A)$ —соответственно наибольшее и наименьшее по модулю собственные числа матрицы A .

3). $M_{AB} \leq M_A M_B$.

Доказательство 2). Число $\rho(A) = |\lambda_{max}(A)|$ называется спектральным радиусом матрицы A . Покажем, что для любой нормы вектора выполнено неравенство

$$\rho(A) \leq \|A\|. \quad (8)$$

Рассмотрим собственный вектор y матрицы A , отвечающий наибольшему по модулю собственному значению. Справедливо равенство $Ay = \lambda_{max}(A)y$, из которого следует, что $\|Ay\| = |\lambda_{max}(A)|\|y\|$. С другой стороны, $\|Ay\| \leq \|A\|\|y\|$, и $|\lambda_{max}(A)| \leq \|A\|$, т.е. получаем (8). Поскольку $\lambda_{min}^{-1}(A)$ является максимальным по модулю собственным значением матрицы A^{-1} , для него выполняется $|\lambda_{min}(A)|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$. Отсюда и из (8) следует свойство 2).

Свойство 1) следует непосредственно из 2), а свойство 3)—из аналогичного свойства матричных норм.

Вопрос 15 "Задача вычисления коэффициентов разложения функции по собственным функциям преобразования Фурье."

Ортогональную систему многочленов на всей оси $(-\infty, +\infty)$ по весу $p(x) = e^{-x^2}$ образуют многочлены Чебышева-Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

В квадратурной формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (1)$$

имеющей наивысшую степень точности $2n - 1$, узлы должны лежать в корнях многочлена $H_n(x)$ — точках x_k .

Коэффициенты A_k легко вычисляются на основании

$$A_k = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P'_n(x_k) P_{n+1}(x_k)}$$

(P_n - система ортогональных многочленов, a_n - старший коэффициент P_n), если воспользоваться тем, что нормированные многочлены Чебышева-Эрмита имеют выражения

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}}$$

и их старшие коэффициенты имеют значения

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}}$$

$$A_k = -\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)}.$$

Если в равенстве $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$ положить $x = x_k$, то найдём $H_{n+1}(x_k) = -H'_n(x_k)$, что даёт возможность преобразовать A_k к форме:

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H_n'^2(x_k)}.$$

Так как для изучаемой квадратуры $\omega(x) = 2^{-n} H_n(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \omega^2(x) dx = 2^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{-n} n! \sqrt{\pi},$$

равенство

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\nu)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx, \quad a \leq \nu \leq b,$$

для остатка $R(f)$ формулы (1) даёт

$$R(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\nu).$$