Хрощенко
Валерий
Александрович.

493.
840 - пост
900 - 1030
1045 - 1215
1230 - 1400
14.00 - 15.00
15.00 - 16.30 сам-по

2332

Скрипкин, Максименко

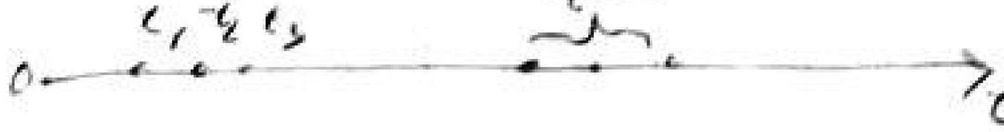
Начальник кафедры
Ражков Александр Иванович
зам
Кочкин Виктор Юрьевич.

Нач. школы Курочкин Павел Николаевич.

Метод динамики средних
его примен. для исслед. анализа моделей
боевых действий войн

Пуассоновский поток

1) Поток событий наз. стационарным, если вер. попад. того или иного числа событий на участок врем. длиной $\tau$ зависит только от длины участка и не зависит от того где именно на оси $t$ располож. этот участок



2) Поток событий наз. потоком безпоследействия, если для $\forall$ неперекрывающихся участков врем, число событ. попад. на один из них не зависит от числа событий попад. на другие

3) Поток событий наз. ординарным, если вер. попад. на элементарный участок $\tau$ если вер. событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

## Вывод уравнений для вероятностей состояний единиц двух многочисленных группировок.

Пример.

$\exists$ есть 2-е группировки однородных единиц.

$N_1, N_2$

каждая из един. производит пуассон. поток выстрелов по неприят. един.

$\lambda_1, \lambda_2$ – частота выстрела

$p_1, p_2$ – вер. успешного выстрела

Задача: определ. кто победил, когда и сколько потерял победитель.

$$\Lambda_1 = p_1\lambda_1, \quad \Lambda_2 = p_2\lambda_2$$

$P_1^i(t), P_2^j(t)$ – вер. кол. оставшихся в данный момент боев. единиц.

$$P_1^{N_1}(t+dt) = P_1^{N_1}(t)\left[P_2^0(t) + \sum_{k=1}^{N_2} P_2^k(t)(1 - k\Lambda_2 dt)\right] =$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N_2} P_2^k(t) = 1} \qquad = P_1^{N_1}(t)\left[1 - \sum_{k=1}^{N_2} k P_2^k(t)\Lambda_2 dt\right] =$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_2} k P_2^k(t) = m_2(t)} \qquad = P_1^{N_1}(t)\left[1 - m_2(t)\Lambda_2 dt\right]$$

для произв. кол-ва един.

$$P_1^k(t+dt) = \underbrace{P_1^k(t)\left[1 - m_2(t)\Lambda_2 dt\right]}_{\text{не попала}} + \underbrace{P_1^{k+1} m_2(t)\Lambda_2 dt}_{\text{попала}}$$

$$P_1^0(t+dt) = P_1^0(t) + P_1^1(t)\, m_2(t)\Lambda_2 dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1^{N_1}(t)}{dt} = -\Lambda_2 m_2(t) P_1^{N_1}(t) \\[2ex] \dfrac{dP_1^k(t)}{dt} = -\Lambda_2 m_2(t)\left[P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t)\right] \end{cases}$$

$$\frac{dP_1^0(t)}{dt} = \Lambda_2 m_2(t) P_1^1(t)$$

нач условия: $P_1^{N_1}(0)=1$ ; $P_1^{k-1} \ldots = 0$

Вывод уравнений для среднего числа единиц и дисперсии числа сохран. единиц.

$m_1, m_2$ - число сохран. единиц (там стоят)

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N_1} P_1^k(t) K = \sum_{k=1}^{N_1} k \frac{dP_1^k(t)}{dt} = -\Lambda_2 m_2(t) \cdot$$

$$\cdot \left\{ N_1 P_1^{N_1}(t) + \sum_{k=1}^{N_1-1} k \left[ P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t) \right] \right\} =$$

$$= -\Lambda_2 m_2(t) \left[ m_1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} k P_1^{k+1}(t) \right] =$$

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} k P_1^{k+1}(t) = \sum_{k=1}^{N_1-1} (k+1) P_1^{k+1}(t) + P_1^1(t) - P_1^1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} P_1^{k+1}(t) =$$

$$= m_1(t) - \left[ 1 - P_1^0(t) \right]$$

$$= -\Lambda_2 m_2(t) \left[ 1 - P_1^0(t) \right]$$

аналог для другой группировки

время боя

$0 \le t \le T$

$$m_1(T) > \Delta \cdot N_1 \quad \overset{\wedge}{\text{или}} \quad m_2(T) > \Delta \cdot N_2$$

$0 < \Delta < 1$

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt} = -\Lambda_2 m_2(t) \\ \dfrac{dm_2(t)}{dt} = -\Lambda_1 m_1(t) \end{cases}$$

Модель типа А (Ланчестера) с переносом огня.

Модель типа В (без переноса огня)

$$\frac{m_1(t)}{N_1}\ ;\ \frac{m_2(t)}{N_2}$$ — условные вер

$$\Lambda_1' = \lambda_1 P_1^1 \frac{m_2(t)}{N_2}\ ;\ \Lambda_2' = \lambda_2 P_2^1 \frac{m_1(t)}{N_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt} = -\dfrac{\Lambda_1'}{N_2} m_1(t) m_2(t) \\[2ex] \dfrac{dm_2(t)}{dt} = -\dfrac{\Lambda_2'}{N_1} m_1(t) m_2(t) \end{cases}$$

Найдём дисперсию числа пораж единиц.

$$\mathcal{D}_1(t) = \sum_{k=0}^{N_1} [k - m_1(t)]^2 P_1^k(t) = \sum_{k=0}^{N_1} k^2 P_1^k(t) - 2m_1(t) \underbrace{\sum_{k=0}^{N_1} k P_1^k(t)}_{m_1(t)} +$$

$$+ m_1^2(t) \underbrace{\sum_{k=0}^{N_1} P_1^k(t)}_{1} = C_1(t) - m_1^2(t)$$

второй нач. мом.

$$\frac{d\mathcal{D}_1(t)}{dt} = \frac{dC_1(t)}{dt} - 2m_1(t)\frac{dm_1(t)}{dt}$$

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{N_1} k^2 \frac{dP_1^k(t)}{dt} = -\lambda_2 m_2(t) \cdot \Big\{ N_1^2 P_1^{N_1}(t) + \sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 \cdot$$

$$\cdot \big[P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t)\big]\Big\} = -\Lambda_2 m_2(t)\Big[C_1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 P_1^{k+1}(t)\Big] =$$

$$\sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 P_1^{k+1}(t) = \sum_{k=1}^{N_1-1} (k+1)^2 p_1^{k+1}(t) + P_1^1(t) - P_1^1(t) - 2\sum_{k=1}^{N_1-1} k P_1^{k+1}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N_1-1} P_1^{k+1}(t) = C_1(t) - [1 - P_1^0(t)] - 2\{m_1(t) - [1 - P_1^0(t)]\}$$

$$= -\Lambda_2 m_2(t)\big[2m_1(t) - (1 - P_1^0(t))\big]$$

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -2\Lambda_2 m_1(t)\, m_2(t) + \Lambda_2 m_2(t)$$

$$\frac{d\mathcal{D}_1(t)}{dt} = -2\Lambda_2 m_1(t) m_2(t) + \Lambda_2 m_2(t) - 2m_1(t)\left[-\Lambda_2 m_2(t)\right] =$$

$$= \Lambda_2 m_2(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{D}_1(t)}{dt} = \Lambda_2 m_2(t) \\ \dfrac{d\mathcal{D}_2(t)}{dt} = \Lambda_1 m_1(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\mathcal{D}_1(0)=0 \\ &\mathcal{D}_2(0)=0 \\ &\mathcal{D}_1(0)=\sum_{k=1}^{N_1}(k-N_1)^2 P_2^k(t) \end{aligned}$$

Кто победит?

Модель A.

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt} = -\Lambda_2 m_2(t) \\ \dfrac{dm_2(t)}{dt} = -\Lambda_1 m_1(t) \end{cases} \qquad \Lambda_1, \Lambda_2 \text{ - const.}$$

$$\frac{d^2 m_1(t)}{dt^2} = -\Lambda_2 \frac{dm_2(t)}{dt} = \Lambda_1\Lambda_2 m_1(t)$$

$$m_1(t) = A_1 e^{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\, t} + A_2 e^{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\, t}$$ – решение.

$$m_1(0) = A_1 + A_2 = N_1$$

$$\left.\frac{dm_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\Lambda_2 N_2 = A_1\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2} - A_2\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}$$

$$\Rightarrow A_2 = N_1 - A_1 \ \& \ \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,(A_1 - N_1 + A_1) = -\Lambda_2 N_2$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{\Lambda_2 N_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}} + \frac{N_1}{2} = \frac{1}{2}\left(N_1 - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}\, N_2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(N_1 + \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} N_2\right)$$

$$m_1(t) = \frac{1}{2}\left(N_1 - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} N_2\right) e^{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t} + \frac{1}{2}\left(N_1 + \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} N_2\right) e^{-\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t} =$$

$$\underline{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}\, t = \tau}$$

$$= N_1 \operatorname{ch}\tau - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} N_2 \operatorname{sh}\tau$$

$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}$ ; $\mu_2 = \frac{m_2}{N_2}$ – доли сохранившихся арм.

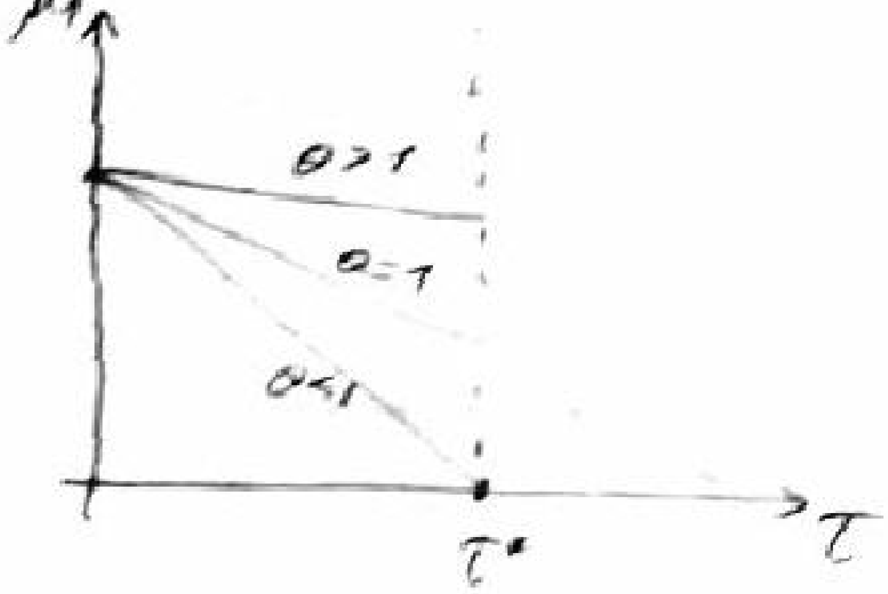
$\theta = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$ – коэффициент преимущества

$$\begin{cases} \mu_1 = \operatorname{ch}\tau - \frac{1}{\theta}\operatorname{sh}\tau \\ \mu_2 = \operatorname{ch}\tau - \theta \operatorname{sh}\tau \end{cases}$$

$\theta = 1$ – ничья

$\theta > 1$ – победили 1

$\theta < 1$ – победили 2.




$m_2(\tau^*) \approx 0$

дисперсии возрастают причём для проигравшей группы быстрее

Замечание

Заметим, что каждой паре кривых $\mu_1=\mu_1(\tau)$; $\mu_2=\mu_2(t)$ на плоскости кривых $\tau, \mu$, соответствует целый класс процессов (боёв)

1) $N_1=a \quad N_2=b \quad \Lambda_1=c, \quad \Lambda_2=d$

2) $N_1=2a \quad N_2=b \quad \Lambda_1=c \quad \Lambda_2=4d$

} на плоскости одинак

$$\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{d}}$$

хотя 2) - бой скоротечнее 7)

$$\tau = \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\, t_1 = \sqrt{cd}\, t_1$$

$$\tau = 2\sqrt{cd}\, t_2$$

Заметим если $N_1 \uparrow$ в 2 раз. то $\theta \uparrow$ в 2. а если $\Lambda_1 \uparrow$ 2 раза. то $\theta \uparrow$ в $\sqrt{2}$.

Увеличение чис. рать больше, чем ~~скорост~~ умение это квадратичный закон Ланчестера.

Модель В

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\dfrac{\Lambda_2}{N_1} m_1 m_2 \\[2mm] \dfrac{dm_2}{dt} = -\dfrac{\Lambda_1}{N_2} m_1 m_2 \end{cases} \qquad \mu_i = \frac{m_i}{N_i}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = -\dfrac{\Lambda_2 N_2}{N_1}\mu_1\mu_2 \\[2mm] \dfrac{d\mu_2}{dt} = -\dfrac{\Lambda_1 N_1}{N_2}\mu_1\mu_2 \end{cases} \qquad \varkappa_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2} \quad \varkappa_2 = \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu_1}{dt} = -\varkappa_2 \mu_1 \mu_2 & (1) \\[2mm] \dfrac{d\mu_2}{dt} = -\varkappa_1 \mu_1 \mu_2 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \Rightarrow d\mu_2 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\mu_1$$

$$\mu_2 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\mu_1 + C_1$$

$$C_1 = 1 - \varkappa_1 / \varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_2}$$

подставим $\mu_2$ в ур.

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\varkappa_2\mu_1\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\mu_1 + C_1\right) = -\varkappa_1\mu_1\left(\mu_1 + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}C_1\right)$$

$$-\frac{d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = \varkappa_1\, dt$$

где $C_2 = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}C_1$

$$-\frac{C_2\, d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = \frac{d\mu_1}{\mu_1 + C_2} - \frac{d\mu_1}{\mu_1} = C_2\varkappa_1\, dt$$

$$\ln(\mu_1 + C_2) - \ln\mu_1 = C_2\varkappa_1 t + C_3 \rightarrow C_3 = \ln(1 + C_2)$$

$$1 + \frac{C_2}{\mu_1} = (1 + C_2)e^{C_2\varkappa_1 t}$$

$$\mu_1 = \frac{C_3}{(1+C_2)e^{C_2\varkappa_1 t} - 1} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 e^{(\varkappa_2 - \varkappa_1)t} - \varkappa_1}$$

$$\mu_2 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 e^{(\varkappa_1 - \varkappa_2)t} - \varkappa_2}$$

$\varkappa_1 = \varkappa_2$ – ничья

$\varkappa_2 > \varkappa_1$ – победа 2

$\varkappa_1 > \varkappa_2$ – победа 1.

$\varkappa_1 \to \varkappa_2 \to \varkappa$

$$e^{(\varkappa_2-\varkappa_1)t} \approx 1+(\varkappa_2-\varkappa_1)t$$

$$\mu_1 = \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa_2+\varkappa_2(\varkappa_2-\varkappa_1)t-\varkappa_1} = \frac{1}{1+\varkappa t} = \mu_2$$

вычтем из ур 1)., ур 2).

$$\frac{d(\mu_1-\mu_2)}{dt} = (\varkappa_1-\varkappa_2)\mu_1\mu_2$$

причём при $t=1$, $\mu_1-\mu_2=0$

Если $\varkappa_1 > \varkappa_2$

т.к. $\mu_1>0, \mu_2>0$ то $\frac{d(\mu_1-\mu_2)}{dt}>0$

$\mu_1-\mu_2>0$

$\Downarrow$

$\mu_1>\mu_2$ победил 1.

Вывод дифференц. уравнений, ~~для~~ описывающих поведение сложных систем, использующем модели Ланчестера

Пример

$\exists$ Система сост. из $N$ самолётов при $t=0$. состояния самолёта.

1. исправен и ведёт б.д.
2. повреждён и возвращается (подвергается обстрелу и может быть сбит).
3. сбит

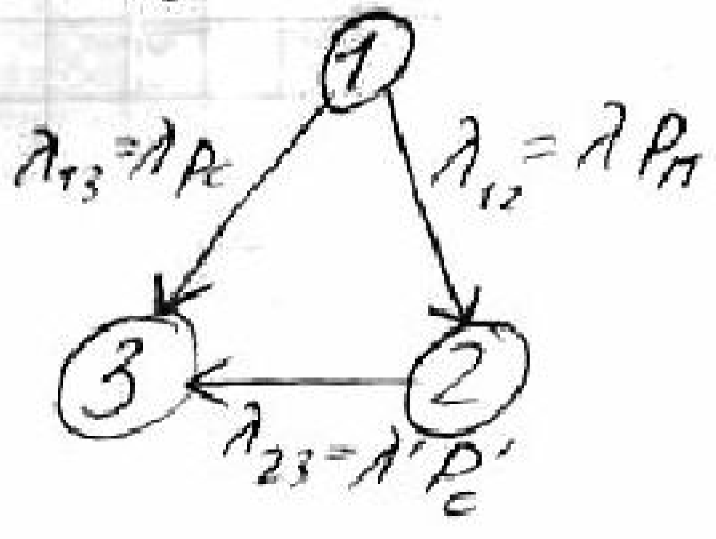
$\lambda_{ij}$ - плотность Пуассон. пот. перехода из сост. в сост.

$\lambda$ - плотность отказ. по непрерывным сам.

$P_П$ - повредить

$P_C$ - сбить.

$P_C'$ - сбить поврежд. сам 1-м выстр.




$\lambda'$ может быть $=\lambda$.

$$P_1^0(t+dt)=P_1^0+P_1^1(\lambda_{12}+\lambda_{13})dt$$

$$P_1^k(t+dt)=P_1^k\left[1-k(\lambda_{12}+\lambda_{13})dt+\right.$$
$$\left.+P_1^{k+1}\left[(k+1)(\lambda_{12}+\lambda_{13})\right]\right]$$

$$P_1^N(t+dt)=P_1^N\left[1-N(\lambda_{12}+\lambda_{13})dt\right]$$

$dt\to 0$

$$\begin{cases}\dfrac{dP_1^0(t)}{dt}=(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1^1(t)\\[2ex] \dfrac{dP_1^k(t)}{dt}=-k(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1^k(t)+(k+1)(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1^{k+1}(t)\\[2ex] \dfrac{dP_1^N(t)}{dt}=-N(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1^N(t)\end{cases}$$

в общем случае, чтобы найти

$\dfrac{dm_i(t)}{dt}$ необходимо.

1) начертить граф возм. сост.

2) для i-ой вершины графа.

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -m_i(t)\sum_j \lambda_{ij} + \sum_k \lambda_{ki} m_k(t)$$

относится к стрелкам исходящим из $i$-ой вершины.

относ. к входящим в $i$-ую вершину.

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = -m_2(t)\lambda_{23} + \lambda_{12} m_1(t)$$

Д/з. решить систему.

N - самолётов.

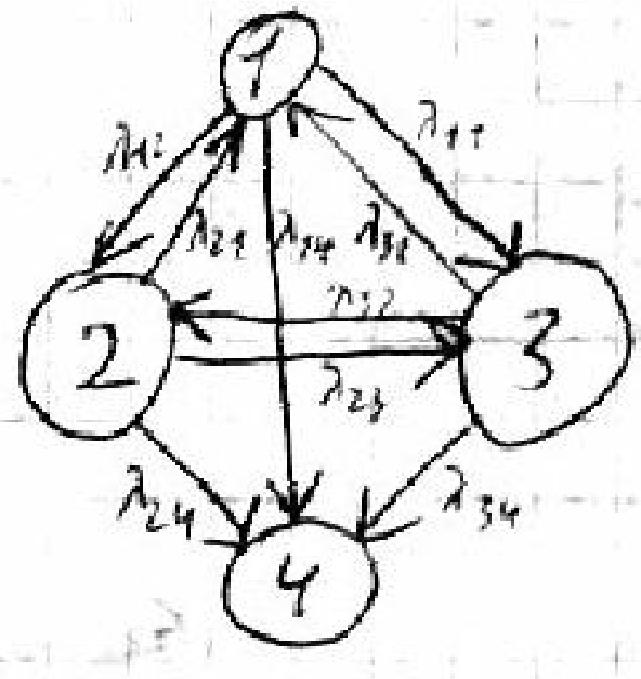
состояния

1 исправен

2. проходит мелкий рем.

3 проходит кап ремонт

4 не ремонтноспособен.




$$\begin{cases} \dfrac{dm_1(t)}{dt} = -m_1(t)\lambda_{12} - m_1(t)\lambda_{13} - m_1(t)\lambda_{14} + m_2(t)\lambda_{21} + m_3\lambda_{31}. \\ \dfrac{dm_2(t)}{dt} = -m_2(t)(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}) + m_1\lambda_{12} + m_3\lambda_{32} \\ \dfrac{dm_3(t)}{dt} = -m_3(t)(\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34}) + m_2\lambda_{23} + m_1\lambda_{13} \\ \dfrac{dm_4(t)}{dt} = -m_4\overset{=0}{(t)}(0) + m_2\lambda_{24} + m_1\lambda_{14} + m_3\lambda_{34} \end{cases}$$

14.09.06.

## Оценка эффективности боев. действий группировок с использованием аналитических модели

1. Вычисление показ. эфф. группир. модели типа А.

Постановка задачи

Группа самолётов красных

$N_1$ - единиц. $\lambda_1$ - скорострел. $p_1$ - сред. вер. пораж.

Группа сам. синих.

$N_2$ - единиц. $\lambda_2$ - скорострел. $p_2$ - сред. вер. пораж.

Если у одной группировки останется $N_i \leq 1$ то бой закончен.

1) Определить победившую сторону $\alpha = 1, 2$.
2) Продолжительность боя $t_k$
3) Потери победившей стороны. $Q$

Применение модели Ланчестера типа А.

А. Допущения при постр. модели

1. Каждая боев. единица производит случайный поток выстрелов.
2. Огонь явл. прицельным, каждый выстрел может поразить только одну ед. против.
3. После пораж. единицы огонь переносится на следующую
4. Время полёта снаряда не учитывается
5. В каждый момент времени боев. мощь группы сам. пропорциональна мат. ожиданию числа сохранив. единиц.

Б. Вывод уравнений модели и получение решения

сред. число ед. в мом. t

$$\begin{cases} m_1(t) \\ m_2(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_1 p_1 \\ \Lambda_2 &= \lambda_2 p_2 \end{aligned}$$

- средняя скорострел. успешных выстрелов

потери каждой стороны за время $\Delta t$

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t \qquad \frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2$$

$$\Delta m_2 = -\Lambda_1 m_1 \Delta t \qquad \frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1$$

где $m_1(0) = N_1$; $m_2(0) = N_2$

Продифф. ур

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = \Lambda_1 \Lambda_2 m_1$$

решение ур

$$m_1 = A_1 e^{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}t}$$

где $A_1$ и $A_2$ - определ. из нач. условий

$$m_1(0) = A_1 + A_2 = N_1$$

$$\left.\frac{dm_1}{dt}\right|_{t=0} = A_1\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2} - A_2\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2} = -\Lambda_2 m_2 = -\Lambda_2 N_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(N_1 - N_2\sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(N_1 + N_2\sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}\right)$$

$$m_1(t) = N_1 \operatorname{ch}\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,t - N_2\sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,t \qquad \Big| : N_1$$

$$m_2(t) = N_2 \operatorname{ch}\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,t - N_1\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \operatorname{sh}\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,t \qquad \Big| : N_2$$

$$\frac{m_1}{N_1} = \mu_1 \; ; \; \frac{m_2}{N_2} = \mu_2 \; ; \; \sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}\,t = \tau$$

$$\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} = k$$

средних боях сохран. единиц с каждой стороны

$$\mu_1 = \operatorname{ch}\tau - \frac{1}{\varkappa}\operatorname{sh}\tau$$

$$\mu_2 = \operatorname{ch}\tau - \varkappa\operatorname{sh}\tau$$

$\varkappa > 1$ побеждает 1-ая сторона.
$\varkappa < 1$ побежд 2-ая стор.
$\varkappa = 1$ ничья.

Продолжительность боя $t_k$
определ. из условия для побежденной стор.

$$\operatorname{ch}\tau_k - k\operatorname{sh}\tau_k = \Delta$$

$$k = \max\left\{\varkappa, \frac{1}{\varkappa}\right\}$$

$$t_k = \frac{\tau_k}{\sqrt{A_1 A_1'}} \; ; \; \tau_k = \ln C$$

$$C = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} + \left(\frac{\Delta}{k-1}\right)^2} - \frac{\Delta}{k-1}$$

Потери победившей стороны

$$Q = 1 - \left(\operatorname{ch}\tau_k - \frac{1}{k}\operatorname{sh}\tau_k\right)$$

$$e^{\tau_k} = C$$

$$Q = 1 - \frac{C^2(k-1)+(k+1)}{2Ck}$$

2) Вычисление показ. эфф. групп модели типа $B$

Допущения

1 Каждая сторона не получает подкр.

о порам. един. противника, поэтому не произв. переноса огня.

2. Огонь каждой стор. произв. равномерно по всем един. противн. (в том числе и по параженным, каждая непораж. един. поражае с вероятностью $\frac{m_j}{N_j}$ $(j=1,2)$

С учетом допущений потери опред. след. обр.

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 \frac{m_1}{N_1} \qquad m_1(0) = N_1$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1 \frac{m_2}{N_2} \qquad m_2(0) = N_2$$

под $m_1$ и $m_2$ понимаем как долю непоражен. площадей, плацдармов (отличие более медленной скоростью).

Получение решения.

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\varkappa_2 \mu_1 \mu_2 \ (1) \qquad \mu_1 = \frac{m_1}{N_1} \qquad \mu_1(0) = 1$$

$$\mu_2(0) = 1$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = -\varkappa_1 \mu_1 \mu_2 \ (2) \qquad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1 P_1 N_1}{N_2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\lambda_2 P_2 N_2}{N_1}$$

Разделим 1-ое на 2-ое.

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}; \quad d\mu_2 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} d\mu_1$$

$$\mu_2 = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \mu_1 + C_1, \quad C_1 = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2}$$

подставим выражение для $\mu_2$ в 1-ое ур.

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\varkappa_2 \mu_1 \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\mu_1 + C_1\right) = -\varkappa_1 \mu_1 \left(\mu_1 + C_1 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)$$

$$-\frac{d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = \varkappa_1 dt, \quad C_2 = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} C_1 = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1}$$

умножим ур. на $C_2$.

$$-\frac{C_2\, d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = C_2 \varkappa_1 dt$$

$$\frac{d\mu_1}{\mu_1 + C_2} - \frac{d\mu_1}{\mu_1} = C_2 \varkappa_1 dt$$

$$\ln(\mu_1 + C_2) - \ln \mu_1 = C_2 \varkappa_1 t + C_3, \quad C_3 = \ln(1 + C_2)$$

$$\ln\left(\frac{\mu_1 + C_2}{\mu_1}\right) = C_2 \varkappa_1 t + \ln(1 + C_2)$$

$$1 + \frac{C_2}{\mu_1} = e^{C_2 \varkappa_1 t}(1 + C_2)$$

$$\boxed{\mu_1 = \frac{C_2}{(1 + C_2)e^{C_2 \varkappa t} - 1} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 e^{(\varkappa_2 - \varkappa_1)t} - \varkappa_1}}$$

$$\boxed{\mu_2 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 e^{(\varkappa_1 - \varkappa_2)t} - \varkappa_2}}$$

$$e^{(\varkappa_2 - \varkappa_1)t} \approx 1 + (\varkappa_2 - \varkappa_1)t$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{1 + \varkappa t} \quad \text{при } \varkappa_1 = \varkappa_2$$

из анализа выражений $\mu_1$ и $\mu_2$.

Если $\varkappa_1 > \varkappa_2$ то 1 побед.
$\varkappa_1 < \varkappa_2$ то 2 побед.
$\varkappa_1 \approx \varkappa_2$ то ничья.

Продолж. боя $t_к$ можно найти из ур для побеждающей стороны.

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1 e^{(V_1-V_2)t_к} - V_2} = \Delta$$

$\Delta$ - миним. доля един. группировки

$$t_к = \frac{1}{V_1 - V_2} \ln\left[\frac{1}{V_1}\left(\frac{V_1 - V_2}{\Delta} + V_2\right)\right];$$

$$V_1 = \max(\varkappa_1, \varkappa_2)$$

$$V_2 = \min(\varkappa_1, \varkappa_2)$$

Потери победившей стороны.

$$Q = 1 - \frac{V_2 - V_1}{V_2 e^{(V_2 - V_1)t_к} - V_1}$$

Алгоритмы вычисления показ. эффект. боев. действий группир. с использованием аналитич. моделей.

Алгоритм для модели А.

1. $\Lambda_1 = \lambda_1 p_1$; $\Lambda_2 = \lambda_2 p_2$
2. $\varkappa = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$
3. $$k = \begin{cases} 1\ (\alpha = 0) & \text{если } \varkappa = 1 \\ \varkappa\ (\alpha = 1) & \text{если } \varkappa > 1 \\ \frac{1}{\varkappa}\ (\alpha = 2) & \text{если } \varkappa < 1 \end{cases}$$

4. $$C = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} + \left(\frac{\Delta}{k-1}\right)^2} - \frac{\Delta}{k-1}$$

5. $$t_k = \frac{\ln C}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}$$

6. $$Q = 1 - \frac{C^2(k-1) + (k+1)}{2Ck}$$

Алгоритм для модели В.
Послед. вычисл.

1) $$x_1 = \frac{\lambda_2 P_1 N_1}{N_2}; \quad x_2 = \frac{\lambda_2 P_2 N_2}{N_1}$$

2) $$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 = x_2 \text{ (ничья)} \\ 1, & \text{при } x_1 > x_2 \quad (1^{я}) \\ 2, & \text{при } x_2 > x_1 \quad (2^{я}) \end{cases}$$

3) $$V_1 = \begin{cases} x_1, & \text{при } x_1 > x_2 \\ x_2, & \text{при } x_1 < x_2 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} x_1, & \text{при } x_1 < x_2 \\ x_2, & \text{при } x_1 > x_2 \end{cases}$$

4) $$t_k = \frac{1}{V_1 - V_2} \ln\left[\frac{1}{V_1}\left(\frac{V_1 - V_2}{\Delta} + V_2\right)\right]$$

5) $$Q = 1 - \frac{V_2 - V_1}{V_2 e^{(V_2 - V_1)t_k} - V_1}$$

В ходе вычислений производится система-тизация ~~[illegible]~~ть. вычисл. показ.[20] боев. действий.

Оценка эффект бое действ. группиро-вок с использованием опыт моделей.

Постановка задачи аналитичная.

$N_1 \quad \lambda_{1j}, \; P_{1j}$ — $j$ — номер единицы $i$-ой группир.

$N_2 \quad \lambda_{2j}, \; P_{2j}$ — $(j = \overline{1,n})$, $(i = 1,2)$

если у одной группир. останется $N_i\Delta$ единиц, то бой закончен $0 \le \Delta \le 1$.
опред. кто, когда и сколько

В случае однор. группир. величины не зависят от $j$.

Модель боя 2-х многочисл. группир. содерж. однородные единицы, модель А.

Послед. вычислений

1. В нач. мом. врем. текущих числ каждой группир. $m_i = N_i \; (i = 1,2)$

2. Каждая группир. производит 1 выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$
при этом моменты врем. $t_i$ фиксируют

3. Находится самый ранний момент выстрела
если $t_1 < t_2$ первые выстрелили 1
при этом $i = 1$
иначе выстрелили втор.
генерим случ. величину.
$\xi < P_i$ — определ. был ли выстрел успешным.

Если самый ранний выстрел был успешен, то исключ. одна непоражен. един. у против.

$m_{3-i}$ уменьшается на 1

$m_{3-i} < \Delta N_{3-i}$ то бой заканчивается.

если не произошло
то i-й группир производится выстрел с плотностью. и все заново с пункта 3

Модель содерж. неоднор единицы, модель А

1) По каждой группир задается $N_1$ и $N_2$

2) Плотность потоков выстрелов производ каждой единицей каждой группировки

$\lambda_{11}, \ldots \lambda_{1N_1}$ — скорострельность единиц 1-ой груп

$\lambda_{21}, \ldots \lambda_{2N_2}$ — 2-ой груп.

$p_{11}, \ldots p_{1N_1}$ — вер поражен кажд ед. 1-ой груп.

$p_{21}, \ldots p_{2N_2}$ — 2-ой

Послед. выч

1) Каждая ед. красн и син произв по 1-му выстрелу.
моменты времени фикс

2) находим самый ранний момент выст. для красн и син.

3) Если $t_{1min_1} < t_{1min_2}$ то первый

выстрел принадлеж. красным
$(i = 1)$
иначе $i = 2$.

4) производится роз. $\xi$.

$\xi < p_i$ — успешный ли выстрел

Если выстрел успешный, то из сост. искл. ∀ ед. (её номер можно разыграть случ.)

5) Если $m_{3-i} < N_{3-i}$ то бой закончив.

подсчит другие показ.

~~8~~ иначе на начало

6) Производ. также единицы, кот. произ- вела самый ранний выстрел.
фикс. мом. врем. $t_{i c_1}$ и повт. начать с пункта 3)

---

Модель содерж. однор. ед., модель В.

Послед. вычисл.

1). $m_i = N_i$ $(i = 1,2)$

2) каждая ед. произв. выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$, моменты $t_i$ фикс.

3) ищем самый ранний выстрел.

4) произв. розыгрыш $\xi$

$$\xi < \frac{m_{3-i}}{N_{3-i}}$$

был ли выстрел произведён по ещё непоражённым целям

5) Если чвин,

то $\xi < p_i$ ?

6) Если встретил элемент.

$M_{\xi-i}$ ↓ на 1

$m_{\xi-i} < \Delta N_{\xi-i}$ то бой закончен.

иначе на пункт 3.

Д/з:
составить
блок-схему
для реш. задач
с несколькими ...

# Методы мат. программир. в управлении организацией бюдж. деят. войск.

## Постановка задачи

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max & \text{— целевая ф-ия} \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \le c_i, \; i = \overline{1,m} & \text{— балансовые усл.} \\ x_j \ge 0 & \text{— граничные усл.} \end{cases}$$

$P_j$, $b_{ij}$, $c_i$ — некие константы.
Линейная ф-ия — задача мат. программир.

Другие случ.
1) $Z \to \min$
2) $\sum \ge c_i$
3) $x_j \ge a_j \;\to\; x_j' = x_j - a_j$

## Существование решения

Совокупность величин $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих балансовым и граничным усл. наз. допустимым решением зад. мат. прогр.

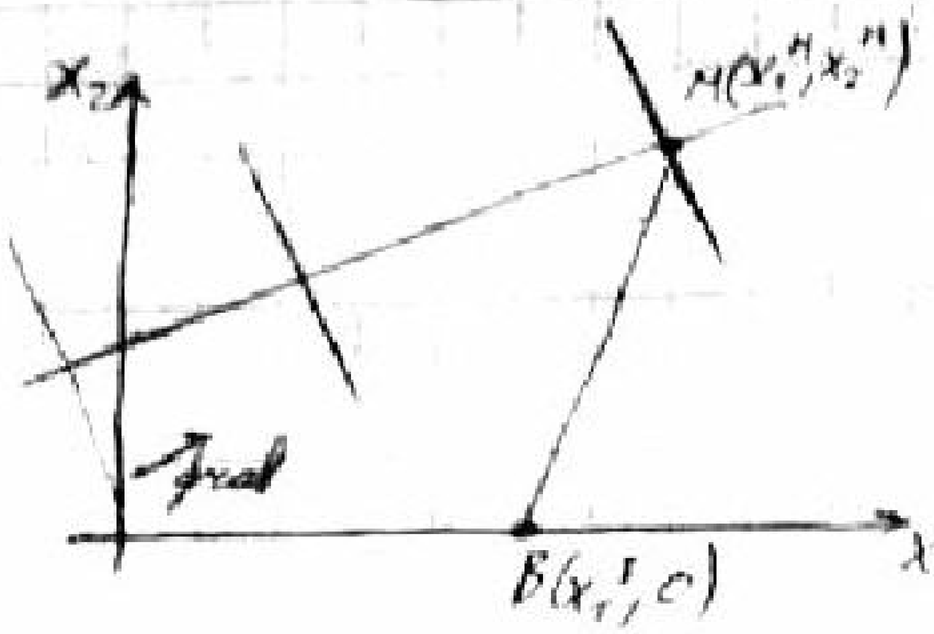
Допустимое реш. зад. ЛП при котором целев. ф-ия достигает экстремума наз. оптимальным решением.

## Пример

$$\begin{cases} Z = P_1 x_1 + P_2 x_2 \to \max \\ b_{11} x_1 + b_{12} x_2 \le c_1 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 \le c_2 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$grad = (p_1, p_2)$

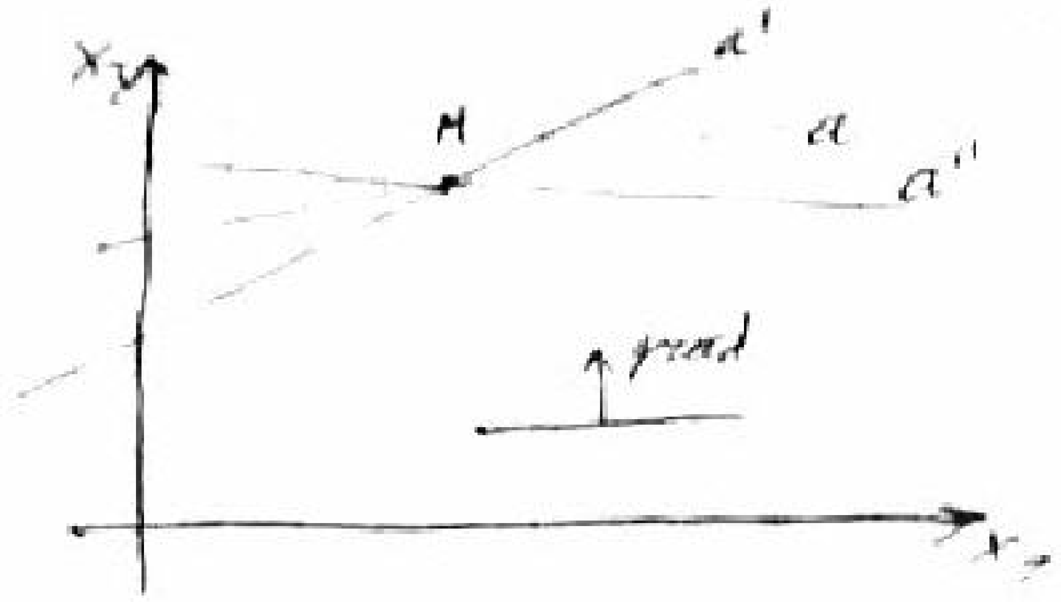
$\cancel{x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{Z}{p_2}}$




$$x_1 = \lambda x_1^M + (1-\lambda)x_1^B$$

$$x_2 = \lambda x_2^M + (1-\lambda)\,0 = \lambda x_2^M$$

$$0 \le \lambda \le 1$$




$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{Z}{p_2}$$

Если обл. допуст. реш. замкнута, то ∃ либо единств. либо бесконечн. много реш.
Если обл. опр. не замкн., либо ед. реш., либо бесчисл. мн-во реш., либо не ∃ реш.

Выпуклость области определения решения.

Мн-во G наз. выпуклым если $\forall$ т. $M'(x_1', \dots x_n') \in G$, $M''(x_1'', \dots x_n'') \in G$
где все точки отрезка $M'$ и $M'' \in G$
$x_j = \lambda x_j' + (1-\lambda)x_j''$, $0 \le \lambda \le 1$

---

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j' \le c_i \qquad x_j' \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j'' \le c_i \qquad x_j'' \ge 0$$

$x_j = \lambda x_j' + (1-\lambda) x_j''$  $0 \le \lambda \le 1$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j' + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j'' \le$$

$$\le \lambda c_i + (1-\lambda) c_i = c_i \qquad x_j \ge 0$$

=> Область опр. зад. прям. и балансов усл. есть выпуклая область

даже если одна из вершин уходит в бесконечн.

## Прямая и двойственная задача лин. прог.

$$\begin{cases} Z = \sum p_j x_j \to \max. \\ \sum b_{ij} x_j \le c_i \\ x_j \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} V = \sum c_i y_i \to \min. \\ \sum b_{ij} y_i \ge p_j \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

прямая  $i = \overline{1,m}$  $j = \overline{1,n}$  $m \le n$  двойств.

$\min V \ge \max Z$ для допустимых реш.

$$V = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \ge \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = Z$$

$V \ge Z$ для $\forall y_i, \forall x_j$

=> $\min V \ge \max Z$.

## Опорный план и оптимальное решение задачи лин. прог

$\exists\ x_1^0, \dots x_n^0$ и $y_1^0, \dots y_m^0$ это допустимые решения зад. ЛП.

подставим их в балансовое условие выбрав удобную нумерацию.

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 = c_i, \quad i=\overline{1,k}; \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 \le c_i, \quad i=\overline{k+1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^0 = p_j, \quad j=\overline{1,s}; \quad \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^0 \ge p_j, \quad j=\overline{s+1,n}$$

Если при этом $x_{s+1}^0 = \ldots = x_n^0 = 0$
$y_{k+1}^0 = \ldots = y_n^0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Z_0 = Z\big|_{x_j = x_j^0} = \sum_{j=1}^{s} p_j x_j^0 = \sum_{j=1}^{s} x_j^0 \sum_{i=1}^{k} b_{ij} y_i^0 \\ V_0 = V\big|_{y_i = y_i^0} = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i^0 = \sum_{i=1}^{k} y_i^0 \sum_{j=1}^{s} b_{ij} x_j^0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_0 = Z_0$, а учитывая что $\min V \ge \max Z$

$\left.\begin{array}{l}\min V = V_0 \\ \max Z = Z_0\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_j^0 \\ y_i^0 \end{array}$ – оптимальное

Покажем, что в прив. рисунке $k = s$.

т.к. $n$ балансовых перем. $x_j^0$ связанных $k$ равенствами то $n-k$ из них явл. свободными и могут принимать $\forall$ значения.
мы предполаг. что $n-s$, $x_j^0 = 0 \Rightarrow$
в общем случ. $n-k \ge n-s \Rightarrow s \ge k$

$s$, $m-s$, $m-k$, $y_i^0 = 0$ $m-s \ge m-k \Rightarrow k \ge s$

$$\Rightarrow \boxed{k = s}$$

Докажем, что если $x_1^0 \ldots x_n^0$, $y_1^0 \ldots y_m^0$ оптимальные и при этом $k$ огр. записаны в виде равенств, то $x_{k+1}^0 = \ldots x_n^0 = 0$ и $y_{k+1}^0 = \ldots y_m^0 = 0$.

Д-во от противного

Пусть это не так
$y_i^0 > 0 \quad (k+1 \le i \le m)$
тогда

$$V_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^0 > \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^0 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^0 = Z_0 \Rightarrow V_0 > Z_0$$

$\Rightarrow$ либо $V_0 > \min V$
либо $Z_0 < \max Z$
что противоречит предположению об оптим. решении игры $y_i^0 = 0 \to V_0 = Z_0 = \min V = \max Z$.

Осн. св-во оптим. решений зад. ЛП.

Оптим. реш. задачи ЛП содержит по крайней мере столько нулевых значений величин $x_j^0, y_i^0$, сколько балансов. усл. выписано в виде строг. неравенств. Остальные величины,

если число нулев. реш. $x_j^0 > n-k$
$y_i^0 > m-k$
задача наз. вырожденной.

В невырожд. сл. оптим. реш. содержит столько положит. величин сколько балансовых усл. выписано в виде равенств.

---

$y_{i_1}^0, \ldots y_{i_r}^0$

$b_{i_1} y_{i_1} + \ldots + b_{i_r} y_{i_r}$

Симплексный метод решения зад. ЛП.

$$Z = \sum_{j=1}^{n+m} p_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n+m} b_{ij} x_j = c_i \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1, n+m}$$

$x_{n+1} \geq 0, \ldots x_{n+m} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + x_{n+i} = c_i$$

$$p_{n+i} = 0$$

Рассмотрим констант. задачи в канонической форм

Опр. Допустимое реш. задачи ЛП наз. базисным если оно содержит ровно $m$ положит. величин из набора $(x_1 \ldots x_{m+n})$ и $n$ нулевых.

Пусть базисное решение известно и нумерация выбрана так, что $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0$ и $x_{n+1}^0 > 0 \ldots x_{n+m}^0 > 0$ исходное базисное реш. подставим в балансное условия

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{b}_j x_j = \bar{c}_j$$

докажем, что столбцов $b_j$ лин независимы.

пусть $\bar{b}_{n+m}$ есть линейная комб. остальных

$$\bar{b}_{n+m} = \sum_{j=n+1}^{n+m-1} a_j \bar{b}_j$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+m-1} b_j x_j^0 + x_{n+m}^0 \sum_{j=n+1}^{n+m-1} a_j \bar{b}_j = \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \bar{b}_j \underbrace{(x_j^0 + a_j x_{n+m}^0)}_{x_j(x)}$$

$b_{ik}$ $\quad i = \overline{1,m}$

$\quad\quad k = \overline{1,n}$

$$b_{ik} = \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \lambda_{ik} \qquad \lambda \in [0,1] \qquad (**)$$

при баз. реш. балансные условия принимают след. вид.

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} x_j^0 = c_i, \quad i=\overline{1,m}$$

$$\theta \cdot \left( -\sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \lambda_{jk} + b_{ik} \right) = 0 \qquad i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}$$

где $\theta$ - это $\forall$ конст. $>0$ прибавим к балансов. усл. соотн. равное 0.

$$\underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot (x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk})}_{\geq 0} + b_{ik} \theta = c_i$$

если $\theta$ выбрать так, чтобы

то $\begin{cases} x_j = x_j^0 - \theta \lambda_{jk}, & n+1 \leq j \leq n+m \\ x_k = \theta, & 0 \leq k \leq n \\ x_e = 0, & 0 \leq e \leq n \wedge e \neq k \end{cases}$

будут допуст. решениями, а если кроме того выберем $\theta > 0$ добьемся того чтобы только одно $x_j^{(?)}$ было $>0$ а ост. $=0$ то получим новый опорный план.

$x_{j_0} = 0 \quad n+1 \leq j_0 \leq n+m$ а ост. $x_j > 0$ то это новый опорн. план.

из всех случ. $k = k_0$ следует выбирать такой индекс $k$ где $\Delta Z$ получ. наибольшее прираш.

$$Z = \sum_{j=n+1}^{n+m} p_j (x_j^0 - \theta \lambda_{jk}) + p_k \theta = Z^0 + \theta (p_k - Z_k)$$

где $Z^0 \to \sum_{j=n+1}^{n+m} p_j x_j^0$

$$Z_k = \sum_{j=n+1}^{n+m} p_j \lambda_{jk}$$

$$\Delta Z = Z - Z^0 = \theta(\underbrace{P_k - Z_k}_{\max > 0})$$

## Алгоритм симплексного метода

1. Образуем разложение $b_{ik} = \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} b_{ij}\lambda_{jk}$ или в матричном виде $\|b_{ik}\| = \|b_{ij}\|\,\|\lambda_{jk}\|$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{n+1,n+m}$
   $\Rightarrow \|\lambda_{jk}\| = \|b_{ij}\|^{-1}\|b_{ik}\|$

2. Вычислим $Z_k = \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} P_j\lambda_{jk}$ в матр виде: $\|Z_k\| = \|P_j\|\,\|\lambda_{jk}\|$

3. Найдём $\max\limits_k (p_k - Z_k) = P_{k_0} - Z_{k_0}$, тем самым определим $k=k_0$, причём $(P_{k_0} - Z_{k_0}) > 0$

4. т.к. $x_j = x_j^0 - \theta\lambda_{jk} = 0$, при $\theta = \frac{x_j^0}{\lambda_{jk}} > 0$, то среди элементов $k_0$ столбца матрицы $\|\lambda_{jk}\|$ выберем только положительные и составим отношение: $\frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}}$

   Причём: при $j = j_0$ $\quad x_j^0/\lambda_{jk} - \theta = 0$ $\qquad n+1 \le j \le n+m$
   при $j \ne j_0$ $\quad x_j^0/\lambda_{jk} - \theta \geq 0$

5. Найдём $\min \frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}} = \frac{x_{j_0}^0}{\lambda_{j_0k_0}}$ и положим его равным $\theta$

В силу невырожденности рассмотренной задачи ЛП
$x_i = 0$, а остальные $x_j > 0 \Rightarrow \min \exists!$

## Нахождение базисного решения

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max. \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = c_i \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 9 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 7 \\ x_{1,2,3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n+m} p_j x_j \to max. \\ \sum_{j=1}^{n+m} b_{ij} x_j = c_i \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$j = \overline{1, n+m}$
$i = \overline{1, m}$

$x_1, \ldots, x_{n+m}$.

$m$ - перем больше 0
$n$ - перем $= 0$.

Метод модифицированных жордановых исключений

Постановка задачи

Пусть есть $m$ видов средств нападения
Если обозначить $a_{ij}$ число средств $i$-ого типа нападения на $j$-объект
и обозначить $A_i$ - общее число средств $i$-ого типа, то задачу форм. след. обр.
$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Кажд. max ущерб (нарастить необх. число единиц чтобы max. ущерб)

ущерб нанесенный $j$-ому объекту

$$\begin{cases} Z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \quad i=\overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = A_i \\ x_j \ge 0 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

– приведена задача к каноническому виду

| $j=$ | 1 | 2 | 3 | всего |
|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 15 |
| $b_j$ | 5 | 3 | 2 | 100 |
| $p_j$ | 5 | 10 | 10 | 160 |
| $c_j$ | 5 | 10 | 12 | — |

самолёты одного типа.

$c_j \to max$

$$\begin{cases} Z = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100 \\ 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 \le 160 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

приведём к канонич. виду

$$\begin{cases} Z = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_2 = 100 \\ 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + y_3 = 160 \\ x_j \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

m – огран. с n – перем. n+m – перем.

незав. перем – 3

завис. перем – 3

| | $-x_1$ | $-x_2$ | ... | $-x_n$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | | $a_{1n}$ | $A_1$ |
| $y_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | | $a_{2n}$ | $A_2$ |
| | | | | | |
| $y_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | $a_{mn}$ | $A_m$ |
| $Z$ | $c_1$ | $c_2$ | | $c_n$ | |

n - независ.
m - завис.
$m \le n$.

Выражая зав через незав находим
x кот. дают max.

Метод модифиц. жордановых исключений.

$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + A_i \ (i = \overline{1, m})$

в качестве коэф $a_{ij}$ выступ. коэфф при
символе x из балансовых условий.
в кач. $A_i$ - выступ огранич.
в кач $c_i$ - выступ коэф. в линейной форме.

чтобы построить симплекс таблицу нужно

1. Привести задачу к канон. виду.
(предварит. развернув неравен. в одну сторону)

2. Составляется симплекс таблица по
след. правилам:
в верху незав. перем. со знаком '-'
коэф. $a_{ij}$ коэф при $-x_j$
$c_j$ - коэф при $-x_j$ в лин. форме
$A_i$ - огранич. баланс. усл

## Нахождение „разрешающего" элемента

Предположим что некоторые или все $A_i < 0$

анализируем строку где $A_i$

если в строке отриц элем нет

(задача несовместна !!??)

Если есть отриц. элем; то находим разреш. элем.

$\exists x_{ij} < 0$

пусть разреш. строка с номером s.

находим min неотриц. отношения

$\frac{A_i}{a_{sj}}$ индекс. с найденным элем.

$\frac{0}{a_{sj}}$ – в отношение берём

берём min.

$a_{rs}$ – и будет разреш. элемент.

1. шаг МЖИ

Алгоритм.

1. разреш элем заменяется на 1
2. в разреш. строке элементы не меняют знак.
3. в разреш. столбце все элем меняют знак на противополож.
4. Все оставшиеся элем. определ. по правилу прямоуг (определителя)

$$b_{ij} = a_{ij} a_{sr} - a_{ir} a_{sj}$$

5. Все элементы матрицы делятся на разреш. элемент

Двойственная задача.

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 15 |
| $y_2$ | 5 | 3 | 2 | 100 |
| $y_3$ | 5 | 10 | 10 | 160 |
| Z | -5 | -10 | -12 | 0 |

После нахождения базисного реш.
анализ. Z-строчку
опять ищем разреш. элем.
ищем. ~~max~~ ∀ $(-c)$ (max по модулю)
[illegible] - обозн. зел. r.
min $\frac{A_i}{a_{ir}}$

Находим. $a_{r5}$ процедура анализ.

| ✓ | $-y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 15 |
| $y_2$ | -5 | -2 | -3 | 25 |
| $y_3$ | -5 | 5 | 5 | 185 |
| Z | 5 | -5 | -7 | 75 |

| | $-y_1$ | $-x_2$ | $-x_1$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 1 | 1 | 1 | 15 |
| $y_2$ | -2 | -1 | 3 | 70 |
| $y_3$ | -10 | 0 | -5 | 10 |
| Z | 12 | 2 | 7 | 180 |

(Замеч! Если не сущ. отриц., то не имеет решения)

Ответ 180

$x_1 = x_2 = y_1 = 0$
$x_3 = 15$

Ответ 15 самой конф[illegible] на 3-й объем

Задача

$$\begin{cases} Z = -3x_1 + 2x_2 \to max \\ -x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 8 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = -3x_1 + 2x_2 \to max \\ -x_1 + x_2 + y_1 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 + y_2 = 8 \\ +x_1 - 2x_2 + y_3 = -1 \\ x_{1,2} \ge 0 \quad y_{1,2,3} \ge 0 \end{cases}$$

$y_1 = 10 + x_1 - x_2$

$y_2 = 8 - 2x_1 + 3x_2$

$y_3 = -1 - x_1 + 2x_2$

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | -1 | 1 | 10 |
| $y_2$ | 2 | -3 | 8 |
| $y_3$ | 1 | -2 | -1 |
| $Z$ | 3 | -2 | 0 |

разреш. элем.

→

| | $-x_1$ | $-y_3$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{19}{2}$ |
| $y_2$ | $+\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{19}{2}$ |
| $x_2$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | 2 | -1 | 1 |

умножим матр на 2.

доп. реш. но не опт

↓

| | | |
|---|---|---|
| -1 | 1 | 19 |
| 1 | -3 | 19 |
| -1 | 1 | 1 |
| 1 | -2 | 2 |

разр эл.

| | $-x_1$ | $y_1$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|
| $y_3$ | -1 | 2 | 19 |
| $y_2$ | | 3 | |
| $X_2$ | | 1 | 10 |
| Z | 1 | 2 | 20 |

Ответ.

$Z = max = 20$

при $x_1 = 0$ $X_2 = 10$

---

Д/з

1) Задача: 3 самолета, есть 4 цели противника уничтож. систему обороны.

| C \ j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 2 | 0,8 | 0,2 | 0,3 | 0,8 |
| 3 | 0,1 | 0,2 | 0,7 | 0,3 |

вер. уничтож. j-й цели при напад. на нее i-го

Задача: Опред. план атак уничтож. цели

---

2). В компании изготавл. агрегаты: 2 узлов 1-ого типа и 1 узел 2-ого типа

Производство узлов может быть поставл. на одном из 5 заводов предприятия. Производительность предприятия и кол-во предприятий. Провед. в нескольких

| Тип предприят | число предпр | произв. мощн. по узлу 1 | по узлу 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1000 | 150 |
| 2 | 3 | 4000 | 2000 |
| 3 | 40 | 200 | 25 |
| 4 | 9 | 2000 | 500 |
| 5 | 2 | 6000 | 2800 |

или

Сколько предпр каждого типа надо иметь на произв чтобы произвести наибольш кол-во аппар.

Методы теории игр.
и их применение к исслед. эффект.
боевых операций

1. Общие понятия теор. игр.

Теория игр это матем. теор. выбора реш. участниками конфликтной ситуации, когда имеются 2 или более сторон с резко вор. против. действиях кот. имеют разл. результат в завис. от выбора противником операц.

Нижняя и верхняя цена игры.
принцип минимакса

Под игрой понимают набор правил регламентир. действия (повед.) игроков.
Игра сост. из неск. партий
Под партией понимают единичн. реализ. игры.
Стратегия - способ выбора игрок каждый ~~для~~ Ходы
Ход игрока - выбор стратегии.

Игры бывают: (классификация)
1 Игры 2-х и более игроков (по числу участн.)
2. По организации платежей
(∃ игры с 0 или не 0 суммой)

∃ $a_i$ - платёж игрока в конце партии.
$-a_i$ - проигрыш
$+a_i$ - выигрыш. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ - в n партиях.

3. По кол-ву ходов и числу стратег.
(бывают конечн. и бесконечн.)

4. С полной и неполной информации
С полн. инф.
игроки знают все предыд. ходы, платежи как свои так и др.

## Принцип минимакса

Рассм. игру 2-х игроков.

| игроки | стратегии | платёж | |
|---|---|---|---|
| X | $(x_1, \dots, x_m)$ | $a_{ij}$ | $(i=\overline{1,m})$ |
| Y | $(y_1, \dots, y_n)$ | $-a_{ij}$ | $(j=\overline{1,n})$ |

сост. таблицу.

| | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | | $a_{1n}$ |
| $x_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | | $a_{2n}$ |
| $\vdots$ | | | | |
| $x_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | $a_{mn}$ |

$f(i,j)=a_{ij}$

Это наз. платёжная матрица

Изобр. наз. игрой в норм. форме.

Опр. решить игру — это значит ~~применить что~~ указать какие стратегии необх. примен. кажд. игроку, чтобы в среднем за больш. число партий игрок X макс. свой выигр., а Y — мин. свой проигрыш.

каждую выбр. страт. X не выбрал игрок Y должен мин. свой проигр.:

$$\min_j a_{ij} = \alpha_i$$

а игрок X max свой выигрыш

$$x_{i_0} \to \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha$$

$\alpha$ — это гарантированный выигрыш игрока X при усл. примен. игроками своих минимаксных стратегий искалн. для $y$

$\max_i a_{ij} = \beta_j$

$y_{j_0} \to \min_j \max_i \alpha_{ij} = \beta_*$

$\beta$ - это min проигрыша игрока $y$ при усл выполн. стратегии.

<u>Прямоугольные игры с седловыми точками.</u>

В общ. сл. $\alpha \leq \beta$ $\max\min \leq \min\max$.
если $\alpha = \beta$ то соотв. стратегии $x_{i_0}$ и $y_{j_0}$ оптимал. за стратег игры.

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V$$

находим мах по строкам и берём мин.
находим min по столбцу и берём мах.
так ищется седловая точка

$$f(x^0, y^0) = a_{ij}$$

Д/З - разобр. доказ. когда возможно $\exists$ 2-х и бол точек. и возможном это

**Опр 1** ~~коорд~~ Точка с $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ наз.
наз. седловой т. вещ. ф $f(x, y) \to X \times Y$
если вып. для $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$
$\forall x \in X, \forall y \in Y$

**Опр 2** Стратег. $x_{i_0}$ и $y_{j_0}$ где ~~точка~~ $_{j_0}$ точка с коорд $i_0, j_0$ яв. седловой для ф. ии целочисл. значи стратег. наз. оптимальными частными стратегиями игры,

а $V = f(i_0, j_0)$ - ценой игры.

Д-во: $\alpha \le \beta$.

Предполож., что $\exists$ $\alpha$ и $\beta$ соотв. определ.
покажем что $\alpha \le \beta$
по опр. max ф-ии $f(x,y)$

$$f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y)$$

по опр. min: $\cancel{f(x,y)}$ $\min_{y\in X} f(x,y) \le f(x,y)$

$$\min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y), \forall x\in X, \forall y \in Y$$

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \le \max_{x\in X} f(x,y), \forall y\in Y$$

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y} \max_{x\in X} f(x,y), \forall x\in X, \forall y\in Y.$$

Всегда ли $\exists$ седлов. т.?

Необход. усл. $\exists$ седловой точки.

Если $(x_0, y_0)$ - седловая т. ф-ии $f(x,y)$ то знач. ф-ии в этой точке уд. усл

$$f(x_0 y_0) = \max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y)$$

по опред. седловой точки.

$$f(x, y_0) \le f(x_0, y_0) \le f(x_0, y), x\in X, y\in Y$$

$$\max f(x, y_0) \le f(x_0 y_0)$$

$$f(x_0, y_0) \le f(x_0, y) \forall x\in X, y\in Y$$

$$f(x_0, y_0) \le \min f(x_0, y) \le \max \min f(x_0, y).$$

$$\Downarrow$$

$$\min_y \max_x f(x,y) \le \max_x \min_y f(x,y)$$

$$\beta \le f(x_0, y_0) \le \alpha \quad \text{- противореч.}$$

$\boxed{\alpha = \beta}$ - необх. усл

## Достат. условия.

Если $\exists$ $\alpha = \max\limits_x \min\limits_y f(x,y)$

$\beta = \min\limits_y \max\limits_x f(x,y)$ и $\alpha = \beta$.

то ф-ия имеет седловую точку.

Д-во: из $\exists\ \alpha \Rightarrow$ что $\exists\ x_0 \in X$, что $\min\limits_y f(x_0 y) = \alpha$

$\exists\ \beta \Rightarrow$ что $\exists\ y_0 \in Y$, $\max\limits_x f(x, y_0) = \beta$

по опр. min

$\min\limits_y f(x_0 y) \le f(x_0, y_0) \Rightarrow \max\limits_x f(x, y_0) \le f(x_0, y_0)$

$\Rightarrow f(x, y_0) \le f(x_0, y_0)\ \forall x \in X$

по опр. max.

$f(x_0, y_0) \le \max\limits_x f(x, y_0) \Rightarrow f(x_0, y_0) \le \min\limits_y f(x_0 y)$

$\Rightarrow f(x_0, y_0) \le f(x_0, y)\ \forall y \in Y$

ч. т. д.

1. $\alpha = \beta$
2. $\min\limits_y f(x_0, y) = \max\limits_x \min\limits_y f(x,y)$

   $\max\limits_x f(x, y_0) = \min\limits_y \max\limits_x f(x,y)$

– дост. усл. седлов. точки.

## Прямоугольные игры без седловых точек.

Если $\alpha < \beta$ т. е. $\nexists$ ф-ия $f(x,y)$ имеет седл. точки то цена ~~игр~~ игр. ищется в смеш. стратег.

$(P, Q)$ – смешанные стратег. Игрок X исп. страт. когда $\exists$ век $p = (p_1, p_2, \ldots p_m)$; $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$

для игр. Y. сов. чист. $Q=(q_1, q_2, \dots q_n): \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

$S_m$ мн-во смеш. стратег. игрока X
$S_n$ игрока Y.

Как опред. выигр. игрока X.

$$E(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j$$

$$P\in S_m \longrightarrow \max_{P\in S_m}\min_{Q\in S_n} E(P,Q)$$

$$Y\in S_m \longrightarrow \min_{Q\in S_n}\max_{P\in S_m} E(P,Q)$$

в кач. реш. игры примем. седлов. точку. с коорд. $(P_0, Q_0)$ ф-ии $\exists E(P,Q)$, если вып. $E(P,Q)\le E(P_0,Q_0)\le E(P_0,Q)$
$\forall P\in S_m$ $\quad \forall Q\in S_n$

чтоо
$(P_0, Q_0)$ - стратег. седл. точка
стратегии - совокупность стратег.
$V=E(P_0,Q_0)$ - цена игры.

Замечание Основная теор. прямоуг. игр.

В $\forall$ прям. игре $\exists$ и равны две величины. $\alpha$ и $\beta$

$\max\limits_{P}\min\limits_{Q} E(P,Q)=\alpha$ и $\alpha=\beta$.

$\min\limits_{Q}\max\limits_{P} E(P,Q)=\beta$

---

Решение всегда есть либо в чист. либо в смеш. стратегии.
для прямоуг. игр с 0-суммой.

Св-ва оптимальных смеш. стратегии
(необход. и достат. условия).

Введём обозн.

$$E(i,Q)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j$$

выигрыш при ист. х примен. чист. страт. $i$ а у смеш. $Q$.

и наобор.

$$E(P,j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i$$

$$E(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}E(i,Q)p_i=\sum_{j=1}^{n}E(P,j)q_j$$

Если $(P_0Q_0)$ - оптим. смеш. страт. с ценой $V$, то

$E(i,Q_0)\le V$, $i=\overline{1,m}$

$E(P,j)\ge V$, $j=\overline{1,n}$

обратное утв. так же справ.

Если $\forall$ $\exists$ число $V$ а так же $P_0\in S_m$, $Q_0\in S_n$, что

$E(i,Q_0)\le V$, $i=\overline{1,m}$

$E(P_0,j)\ge V$, $j=\overline{1,n}$

то $P_0$ и $Q_0$ - оптим. смеш. страт.

$$E(P,Q_0)=\sum_{i=1}^{m}E(i,Q_0)p_i\le\sum_{i=1}^{m}Vp_i=V,\ \forall P\in S_m$$

$$E(P_0,Q)=\sum_{j=1}^{n}E(P_0,j)q_j\ge\sum_{j=1}^{n}Vq_j=V\quad\forall Q\in S_n$$

$$E(P,Q_0)\le E(P_0,Q_0)\le E(P_0,Q)$$

$=>(P_0,Q_0)$ - оптим. смеш. страт.

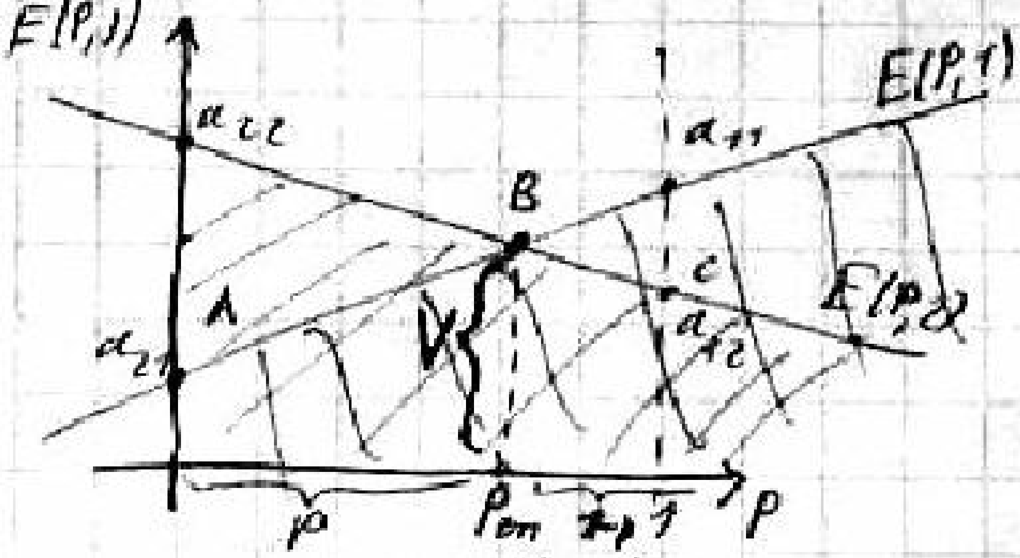
# Элементарные способы решения игровых задач.

A). игра $2*2$. у кажд. игрока по 2 страт.

| | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $p$ |
| $x_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $1-p$ |
| | $q$ | $1-q$ | |

$$E(P,1) = a_{11}p + a_{21}(1-p)$$

$$E(P,2) = a_{12}P + a_{22}(1-p)$$




$$\max_{0\le p\le 1} \min_{j=1,2} E(P,j)$$

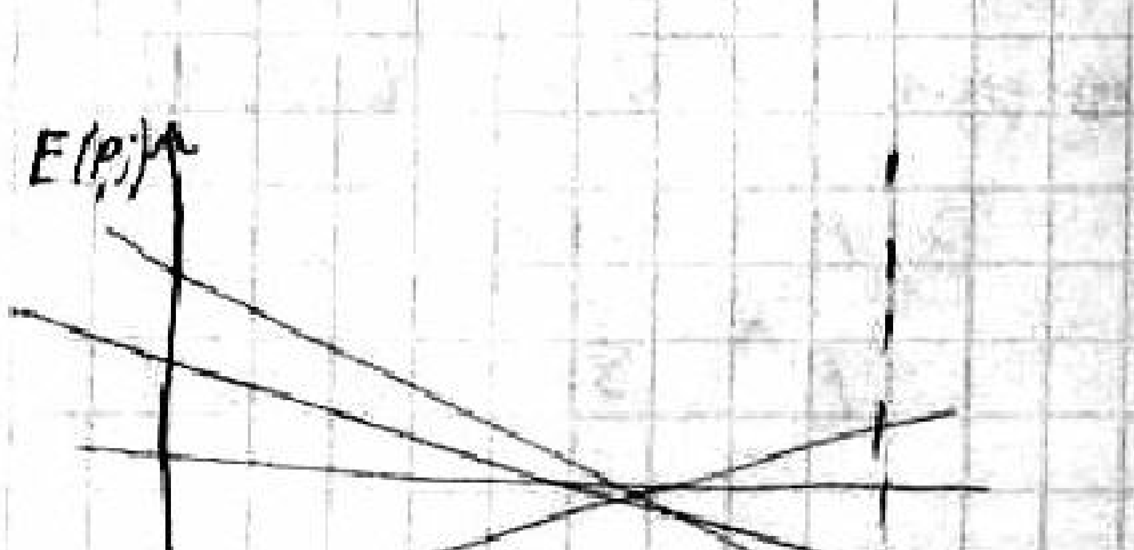
Ответ: $(p, 1-p)$ – част. выбр. игрок. страт. 1 и 2.
$V$

$$p = P_0 \quad (a_{11}-a_{12})p + (a_{21}-a_{22})(1-p) = 0$$

$$p = P_{опт} = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$

B). $2*N$
$M*2$

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | | | | |
| $X_2$ | | $a_{ij}$ | | |



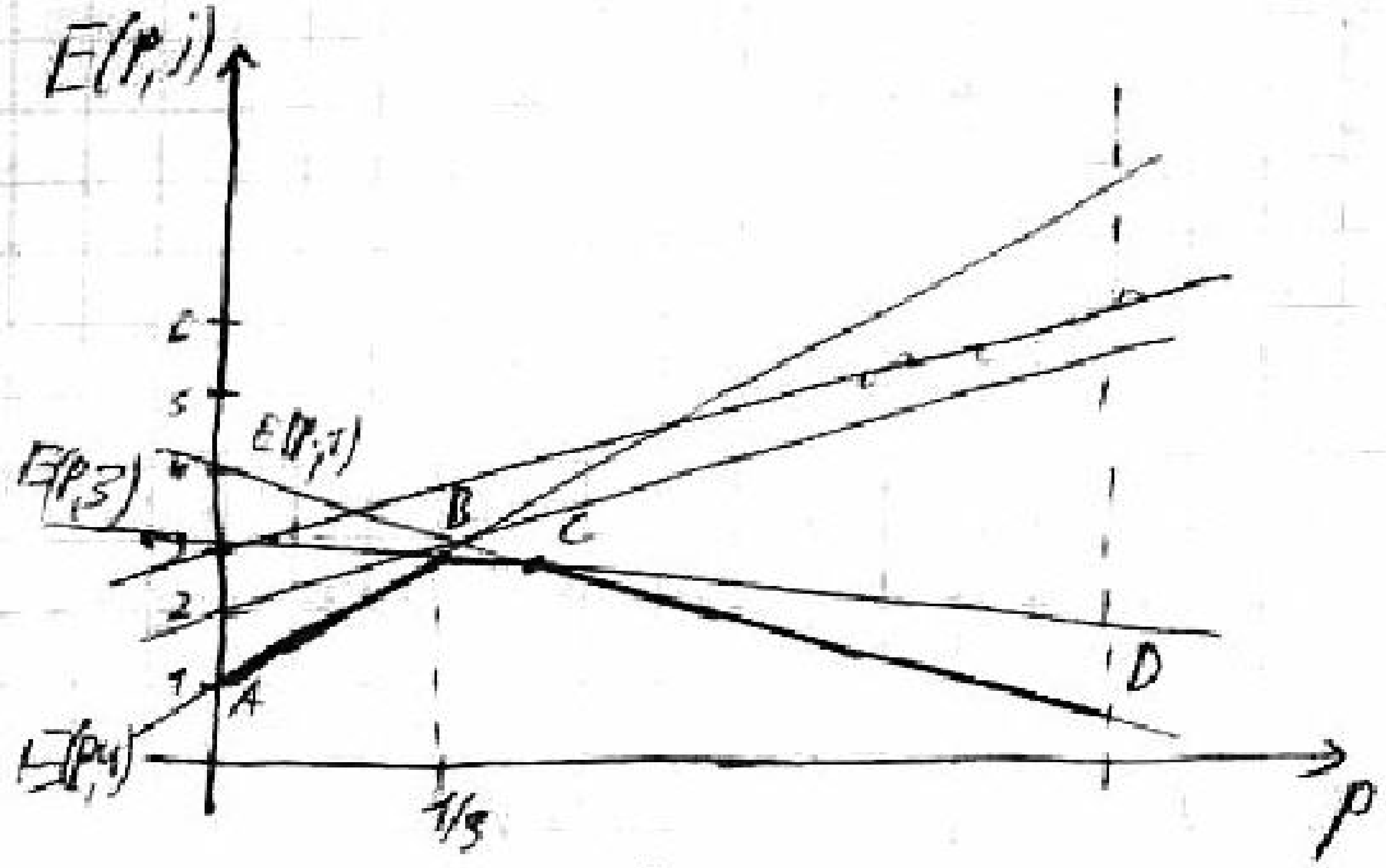
| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 1 | 3 | 2 | 6 | $p$ |
| $K_2$ | 4 | 2 | 3 | 1 | $1-p$ |

$E(P,1) = 4 - 3p$

$E(P,2) = 2 + 3p$

$E(P,3) = 3 - p$

$E(P,4) = 1 + 5p$




Ответ: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $V = 2\frac{2}{3}$ для красных координ. т. B можно точно определ. из усл $E(P,3) = E(P,4)$

$3 - p = 1 + 5p$

$p^* = \frac{1}{3}$ $\quad V = E\left(\frac{1}{3}, j\right)_{j=3,4} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$E(\frac{1}{3}, j) > \frac{8}{3}$, при $j = 1, 2$.

оптим. стратег. сигнал

$q^* = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in S_4$

$q_1^* = q_2^* = 0$

$q_3^* = q$ ; $q_4^* = 1-q$.

$E(1, q) = 2q + 6(1-q) = 6 - 4q = V = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$q = \frac{5}{6}$ ; $1 - q = \frac{1}{6}$

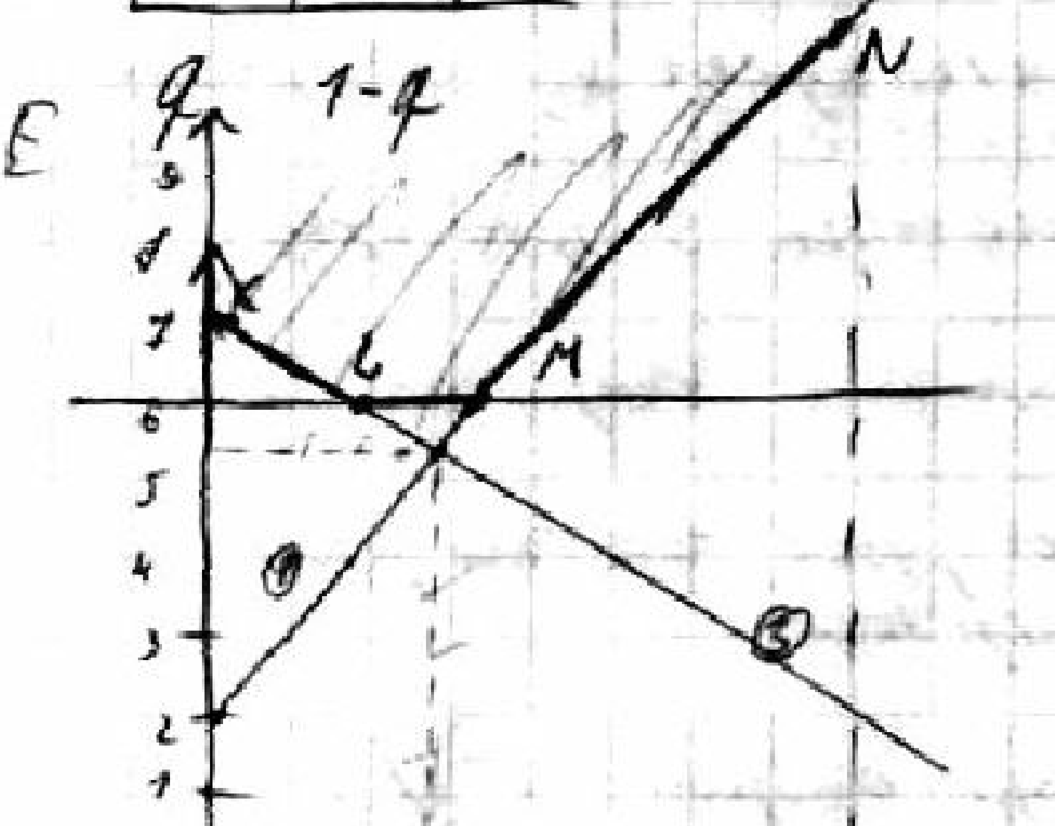
Ответ $(0, 0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$, $V = \frac{8}{3}$ для сигнал.

| | $C_1$ | $C_2$ | |
|---|---|---|---|
| $K_1$ | 2 | 7 | $p_1$ |
| $K_2$ | 6 | 6 | $p_2$ |
| $K_3$ | 11 | 2 | $p_3$ |

$E(1, Q) = 2q + 7 - 7q = 7 - 5q$

$E(2, Q) = 6$

$E(3, Q) = 2 + 9q$




$7 - 5q = 6$ $q = \frac{1}{5}$

$2 + 9q = 6$ $q = \frac{4}{9}$

$E(i, q) = V = 6$.

$q \in [\frac{1}{5}; \frac{4}{9}]$ — для ~~красн~~ сигн.

для строк

при $E(3, \frac{7}{3}) \le V$

$P = (P_1^*, P_2^*, P_3^*) \to P_3^* = 0$

$P_1^* = 0$

Ответ $(0, 1, 0)$ $V = 6$

## Соотношение превосходства

Если в игре $M * N$ заданной некой платёжн. матр. $(m * n)$ $\| a_{ij} \|$

(*) $a_{sj} \le \sum_{k=1}^{l} \lambda_k a_{i_k j}$ где $\lambda_k \ge 0, k = \overline{1, l}$

$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1$, $j = \overline{1, n}$, $i_k \in (1, 2, \dots n)$

$i_k \ne s$

то говорят что $s^{я}$ строка ~~[illegible]~~ выпукл. комб. стратегий $i_1, i_2, \dots i_l$.

$x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_l}$ доминирует $x_s$ в этом

случ. можно отбросить $s$-ую строку.

Если нерав (*) вып как строгие то отбрас. безболезн.

а если как нестрог., то часть реш. может быть потеряна.

Д-во $V'$ - получ. при отбрас. $= V$.

Сведение игровой задачи к задаче лин. программир.

$$\left.\begin{aligned} &E(i, Q_0) = \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le V} \quad i = \overline{1,m} \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} q_j^0 = 1, \; q_j^0 \ge 0 \\ &E(P_0, j) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 \ge V} \quad j = \overline{1,n} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1, \; p_i^0 \ge 0 \end{aligned}\right\} (**)$$

Это эквивал. $n+m$ лин. неравенствам

Всегда платежную матр можно привести к положит. виду

Введём 4 перем.

Обозначим: $\xi_i = \dfrac{p_i^0}{E(P, Q_0)}$; $\eta_j = \dfrac{q_j^0}{E(P_0, Q)}$

$$\omega = \frac{1}{E(P, Q_0)}; \quad z = \frac{1}{E(P_0, Q)}$$

$E(P, Q_0)$ – матем. ожид выигр. игрока X, когда Y применяет оптим страт, а X какую-то.

перепишем (**) в виде:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \le \dfrac{V}{E(P_0, Q)}; \; \sum_{j=1}^{n} \eta_j = z & E(P_0, Q) \ge 0 \\ & E(P, Q_0) \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i \ge \dfrac{V}{E(P, Q_0)}; \; \sum_{i=1}^{m} \xi_i = \omega & \xi_i, \eta_j \ge 0 \end{cases}$$

$Q$ – лежит в окр. т. $Q_0$ так что $E(P, Q) \ge 0$ – непрер.

т. к. цена $V = E(P_0, Q_0) = \max\limits_{P \in S_n} E(P, Q_0) = \min\limits_{Q \in S_m} E(P_0, Q)$

то переходя к пределу. $P \to P_0$; $Q \to Q_0$

то $z = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \to \max$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j \le 1 \qquad \eta_j \ge 0$$

$\omega = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \to \min$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \xi_i \geq 1 \quad \xi_i \geq 0$

дальше применяем метод $M_{ji}$

находим $p_i^0 = \xi_i^0 \cdot V \quad ; \quad V = \frac{1}{\Sigma(\xi_i^0)}$

$q_j^0 = \eta_j^0 \cdot V$

$V = \frac{1}{\omega(\eta_j^0)}$

Замечание:

Предварительные действ. при реш. игровых задач

1. Привести платежн. матр. к положит. виду.
2. Найти реш игры в чистых стратег.
3. попытаться уменьшить размерн плат матр используя признаки приоритетов.
4. Если возм. примен. граф. методу. Если не получ. то либо метод сведения к зад. лин. прог., либо методу послед. ~~решения~~. приближений.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 8 & -3 \end{vmatrix} \to \begin{array}{c|cccc|c|c} & & & & & \min & \max \\ & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & \\ & 5 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ & 2 & 1 & 6 & 0 & 0 & \\ \hline \max & 5 & 6 & 6 & 6 & & \\ \min & & & 5 & & & \end{array} \Rightarrow$$

нет седловой т.

3. попытаемся уменьшить размерн.

$$\to \begin{array}{c} B=5 \\ \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \alpha = 3$$

Общ. иллюстр. задачи.
игрок. К ; синий С

$$\begin{array}{cccc} & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ K_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ K_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ K_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array}$$

1. Для перв. шага $i = 1$ ~~игр~~ У применяет $C_1(1), C_2(1), \dots C_m(1)$ послед. стратег выбор след. обр.
2. а) $j(N)$ выбираем так, чтобы оно было наим. целым числом при кот. достигается минимум $\min\{C_1(N), C_2(N), \dots C_m(N)\} = C_j(N)$

   б). $i(N)$ выбир так, чтобы оно было наиб целым числом при кот. достиг. $\max\{K_1(N-1), K_2(N-1), \dots K_n(N-1)\} = K_{i(N)}(N-1)$
3. Послед. значения величин $C_j(N)$ и $K_i(N)$ выбир след. образом

$C_j(1) = a_{i(1),j}$, $N = 1$

$C_j(N) = C_j(N-1) + a_{i(N),j}$, для $N > 1$.

$K_i(1) = a_{i,j(1)}$ для $N = 1$

$K_i(N) = K_i(N-1) + a_{i,j(N)}$ для $N > 1$.

4. $V_1(N) = \frac{1}{N} C_{j(N)}(N)$ - ниж. цена игр.

   $V_2(N) = \frac{1}{N} K_{i(N+1)}(N)$ - верх цена игр.

5. $X(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)$

   $Y(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} j(k)$

| N | i | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | j | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $V_1$ | $V_2$ | V | Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 4 | 5 | 3 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 | 4,5 | 3 |
| 2 | 2 | 10 | 7 | 9 | 2 | 7 | 9 | 6 | 3,5 | 4,5 | 4 | 1 |
| 3 | 2 | 15 | 10 | 15 | 2 | 11 | 12 | 12 | 3,3 | 4 | 3,7 | 0,7 |
| ~~4~~ | ~~2~~ | ~~20~~ | ~~13~~ | ~~21~~ | ~~2~~ | ~~15~~ | ~~15~~ | ~~18~~ | ~~3,3~~ | ~~4,5~~ | ~~3,9~~ | ~~1,2~~ |
| ~~5~~ | ~~3~~ | ~~22~~ | ~~19~~ | ~~21~~ | ~~2~~ | ~~19~~ | ~~18~~ | ~~24~~ | ~~3,8~~ | ~~4,8~~ | ~~4,3~~ | ~~1~~ |
| 6 | | | | | | | | | | | | |

Δ – разн. между нижн и верх ценой игры.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 17 | 16 | 15 | 3 | 14 | 18 | 12 | 3,8 | 4,5 | 4,2 | 0,7 |
| 5 | 2 | 22 | 19 | 21 | 2 | 18 | 21 | 18 | 3,8 | 4,2 | 4 | 0,4 |
| 6 | 2 | 27 | 22 | 27 | 2 | 22 | 24 | 24 | 3,7 | 4 | 3,9 | 0,3 |
| 7 | 3 | 29 | 28 | 27 | 3 | 25 | 30 | 24 | 3,9 | 4,3 | 4,1 | 0,4 |
| 8 | 2 | 34 | 31 | 33 | 2 | 29 | 33 | 30 | 3,9 | 4,1 | 4 | 0,2 |

$$V' = \frac{V_2 + V_1}{2} = 4$$

$$P^\circ = \left(\frac{1}{8};\ 0;\ \frac{5}{8};\ \frac{1}{4}\right)$$

$$Q^\circ = \left(0;\ 0;\ \frac{5}{8};\ \frac{3}{8}\right)$$

истинная цена игры $V = V' - 3 = 1$.

Замечание

1. Об истинности $V$, по $V_1, V_2 \to V_0$, можно судить по $\frac{V_2(N) - V_1(N)}{\bar{V}(N)} \le \varepsilon$

$N \to \infty$, $V_2(N) - V_1(N) \to 0$

доказ. что истин знач на кажд. шаге не превосходит.

$$\left|\bar{V}(N) - V_0\right| \le \frac{2}{\sqrt[n+m-2]{N}}$$ – Гермейер

2. Замечено, что на практике наблюд. пульсации метода

Для уменьш. кол-ва лишних повтор можно использ.

$$\Delta N = \min_{1\le S\le N} V_2(S) - \max_{1\le S\le N} V_2(S) > 0$$

в кач. оптим. стратег. можно брать $\{r_i(S)\}$ и $\{c_i(S)\}$ где реализ.

$$\min_{1\le S\le N} V_2(S) \text{ и } \max_{1\le S\le N} V_1(S)$$

| $N$ | $V_1$ | $V_2$ | $\min V_2$ | $\max V_1$ | $\Delta N$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 6 | 3 | 3 |
| 2 | 3,5 | 4,5 | 4,5 | 3,5 | 1 |
| 3 | 3,33 | 4 | 4 | 3,5 | 0,5 |
| 4 | 3,2 | 4,5 | 4 | 3,5 | 0,5 |
| 5 | 3,8 | 4,8 | 4 | 3,8 | 0,2 |
| 6 | 3,5 | 4,0 | 4 | 3,8 | 0,2 |
| 7 | 3 | 4,2 | 4 | 3,8 | 0,2 |
| 8 | 2 | 4,5 | 4 | 3,8 | 0,2 |

Математическая формулировка задачи прямоугольной игры с 0-суммой.

задана платн. матр.

$\|a_{ij}\|$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$

найти векн.

$$p^0 = \{p_1^0\, p_2^0 \dots p_n^0\},\ \sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1$$

$$q^0 = \{q_1^0, q_2^0, \dots q_m^0\},\ \sum_{j=0}^{m} q_j^0 = 1$$

чтобы при векн. $p = \{p_1 \dots p_m\}$ $\sum_i = 1$

$q = \{q_1, \dots q_n)$ $\sum_j = 1$.

выполн. усл. $E(p, q^0) \le E(p^0, q^0) \le E(p^0, q)$;

где. $E(p,q) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j \rightarrow$ ср. выигрыш.

$E(p^0, q^0) = v$ – цена игр.

$(p^0, q^0) \rightarrow$ opt. оптим. стратег.

$p^{\circ}_{i_0} = 1$ и $q^{\circ}_{j_0} = 1$,

а

$p^{\circ}_{i \neq i_0} = 0$

, то $i_0$ и $j_0$

$q^{\circ}_{i \neq j_0} = 0$

$\downarrow$

opt чист. стратег.

$V_1$ и $V_2$ $\quad V_1 = V_2 = V$

$$V_1 = \max_p \min_q E(p, q) \rightarrow$$

$$= !$$

$$V_2 = \min_q \max_p E(p, q) \nearrow$$

<u>Задача</u>

Есть 2-комплекса и есть 3 типа сам. вер. уничтож. сам. задача составить оптим. пропорцию примен. комплексов

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $\cdot 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 0,3 | 0,5 | 0,4 | $p$ |
| | ~~0,1~~ | ~~0,6~~ | ~~0,2~~ | |
| $K_2$ | 0,8 | 0,6 | 0,2 | $1-p$ |
| | $q^1$ | $q^2$ | $q^3$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 4 |
| 8 | 6 | 2 |

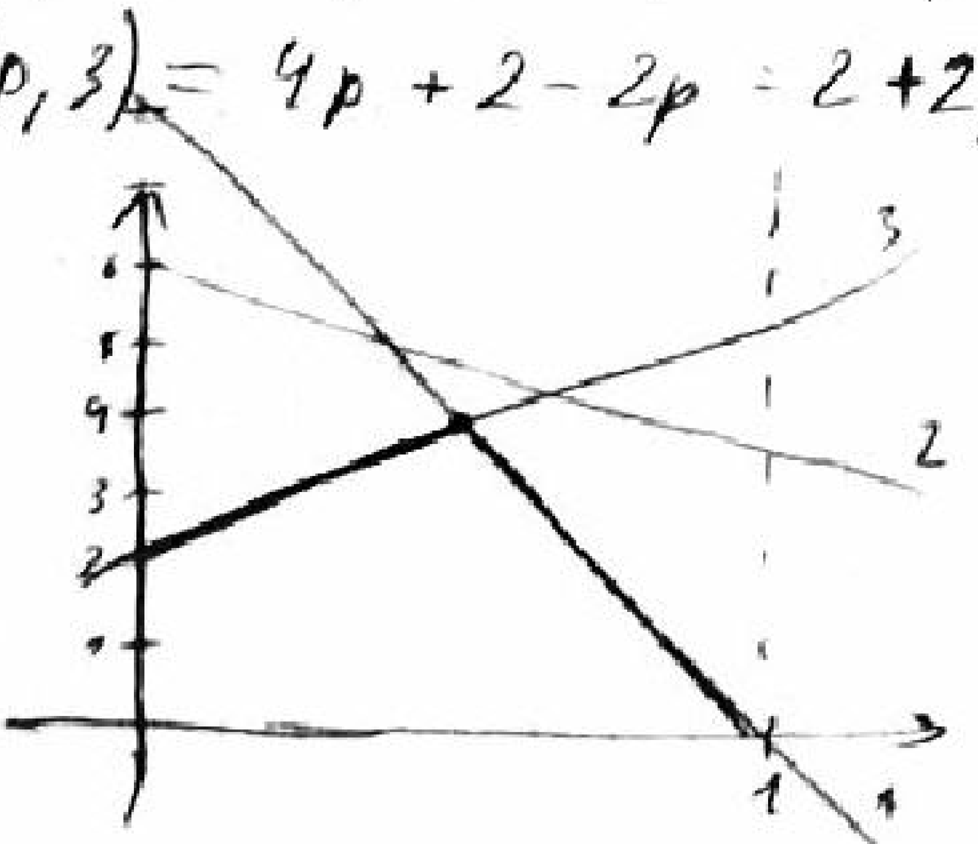
$E(p, 1) = \cancel{0,}3p + \cancel{0,}8 - \cancel{0,}8p = 8 - 5p$

$E(p, 2) = 5p + 6 - 6p = 6 - p$

$E(p, 3) = 4p + 2 - 2p = 2 + 2p$

$8 - 5 \cdot \frac{6}{7} = \frac{56 - 30}{7}$

$\frac{26}{70}$




$8 - 5p = 2 + 2p$

$7p = 6 \quad p = \frac{6}{7}$

$\left(\frac{6}{70}; \frac{1}{70}\right), V = \frac{26}{70}$

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| $K_1$ | 0,3 | 0,5 | 0,4 |
| $K_2$ | 0,1 | 0,6 | 0,2 |

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 1 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 1 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \ge 0$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + y_1 \le 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + y_2 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + y_3 \le 1 \end{cases}$$

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $A_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 3 | 8 | 1 |
| $y_2$ | 5 | 6 | 1 |
| $y_3$ | 4 | 2 | 1 |
| $Z$ | $-1$ | $-1$ | 0 |

=>

| | $-y_1$ | $-y_1$ | $A_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $3/8$ | 1 | $3/8$ |
| $y_2$ | $\frac{11}{8}$ | $-\frac{3}{4}$ | |
| $y_3$ | | $-\frac{1}{4}$ | |
| $Z$ | | $-\frac{1}{8}$ | |

Д/з. Синие обороняются и могут занять $\forall$ 2 из четырёх позиций один кол-ва боев. единицу.
Красные из за огран. боев. средств могут обстрел. 3 из 4 позиций синих, обстрелив. един. синих на $i$-ой позиции поражают с вер. $p_i$: $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,6$, $p_4 = 0,8$.
Принимая в качест. эфф. операции средние число пораж. един. синих определ. оптим. стратегии сторон.
$4 \times 6$

|   | c |   |
|---|---|---|
| r | 0,6 | 0,4 |
|   | 0,3 | 0,5 |

$Z = x_1 + x_2 \to \max$ $E(P, Q_0)$

$0,6x_1 + 0,4x_2 \le 1$

$0,3x_1 + 0,5x_2 \le 1$

играем за синих

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + y_1 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + y_2 = 10 \\ x_i \ge 0 \quad y_j \ge 0 \end{cases}$$

|   | $-x_1$ | $-x_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | 6 | 4 | 10 |
| $y_2$ | 3 | 5 | 10 |
| Z | -1 | -1 |   |

|   | $y_1$ | $x_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| $y_2$ | - | $\frac{1}{5}$ | 5 |
| Z | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |

⇒

|   | $-y_1$ | $-y_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $x_1$ |   |   | $\frac{5}{9}$ |
| $x_2$ |   | 1 | $\frac{5}{3}$ |
| Z |   | $\frac{1}{5}$ | $\frac{20}{9}$ |

⇐

|   | $-x_1$ | $-y_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | $\frac{18}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{10}{5}$ |
| $x_2$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 2 |
| Z | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 2 |

|   | $-y_1$ | $-y_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{5}{18}$ |   | $\frac{5}{9}$ |
| $x_2$ |   |   | $\frac{1}{3}$ |
| Z |   |   | $\frac{17}{18}$ |

|  | $-x_1$ | $-y_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $y_1$ | $18/5$ | $-4/5$ | $1/5$ |
| $x_2$ | $3/5$ | $1/5$ | $2$ |
| $Z$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

→

|  | $-y_1$ | $-y_2$ | A |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{5}{18}$ | $-\frac{4}{18}$ | $\frac{1}{18}$ |
| $x_2$ | $-\frac{3}{18}$ | $\frac{6}{18}$ | $\frac{7}{18}$ |
| $Z$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{4}{18}$ |

$$X_1 = \frac{5}{9}\ ;\ X_2 = \frac{15}{9}$$

$$E = \frac{10}{9} \qquad p_1 = \frac{1}{2} \quad q_1 = \frac{1}{4}$$

$$V = \frac{9}{20} \qquad p_2 = \frac{1}{2} \quad q_2 = \frac{8}{4}$$

Лаб раб.

## Решение игровых задач методом лин. прог.

Постан. задачи

на вооруж. группы ПВО имеется N типов комплексов

СВН $(c_1, c_2 .. c_m)$

вер $p_{ij}$ заданная матр $\|p_{ij}\|$ $(i=\overline{1,n}\ ;\ j=\overline{1,m})$

треб опред оптим.

Матем ф-ка задачи.

Задана платежная матр.

Найти $p^0$ и $q^0$, чтобы при $\forall$ $p$ и $q$

$$E(p,q^0) \le E(p^0,q^0) \le E(p^0,q)$$

$$E(p,q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j$$

$$E(p^0,q^0) = V \text{ - цена игры.}$$

$$(p^0, q^0)$$

сведение игровой задачи к зад. лин. программ.

За гравцю сторону (ПВО)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq V \quad \text{для } \forall j = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad ; x_i = \frac{p_i}{V}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=n}^{n} x_i = \frac{1}{V}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,m})$$

$$x_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq V \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \quad ; y_j = \frac{q_j}{V}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1 \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \frac{1}{V}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1 \quad (1 = \overline{1,n})$$

$$y_j \geq 0$$

$$\max(-Z)=\sum_{i=1}^{n}(-x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq 1 \quad (j=\overline{1,m})$$

$$x_i \geq 0$$

$$\bar{y}_j \quad (i=\overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij})x_i+\tilde{y}_j=-1$$

$$\tilde{y}_j=\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)-1$$

$$\max \quad z=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \leq 1 \quad (i=\overline{1,n})$$

$$y_j \geq 0$$

$$\tilde{x}_i \quad (i=\overline{1,m})$$

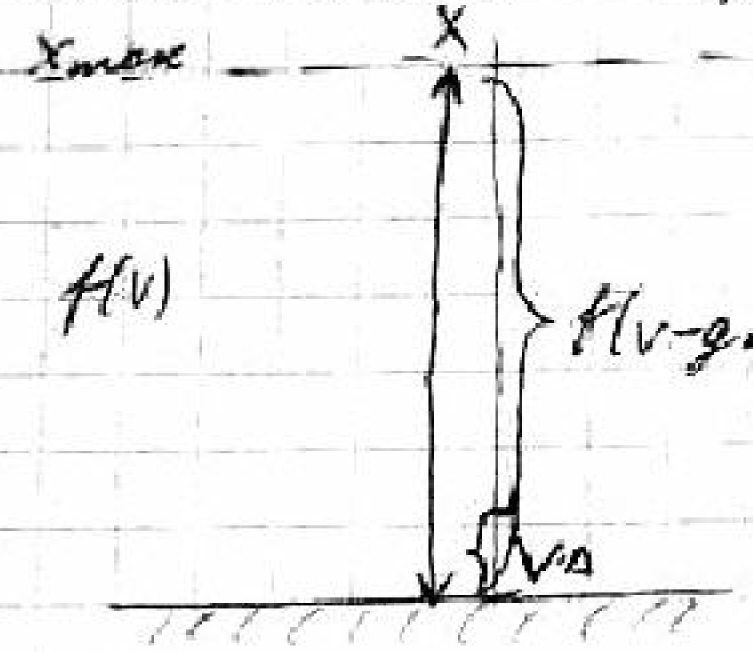
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j+\tilde{x}_i=1 \quad (i=\overline{1,n})$$

$$\tilde{x}_i=\left(\sum_{j=1}^{m}(-a_{ij})y_j+1\right)$$

Методы динамического программир. и их применение к задачам планирования боев. действий

Понятие дискретного многошагового процесса.

Рассм. задачу нахожд. max. высоты подброса вверх тела ~~со~~ с нач. скор. $V_0$




$$\ddot{x}(t) = -g$$

$$\dot{x}(0) = V_0$$

$$x(0) = 0$$

$$\max x(t) - ?$$

1. параметризуем задачу.
   $V_0 \to V$

2. представим max высоту на кот подброш. т.
   $f(V) = \max X(t)$

3. $\dot{x}(t) = V - gt$
   $t = \Delta,$
   $$f(V) = V\Delta + f(V - g\Delta) \quad (*)$$

если ф-ия $f$ - диффер. то $f(V-g\Delta) =$

$$= f(V) - \frac{df}{dV} g\Delta$$

$$\frac{df}{dV} = \frac{V}{g}$$

$$f(0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(V) = \frac{V^2}{2g}$$

$$V = g\Delta, 2g\Delta, \dots n g\Delta \neq V_0$$

## Принцип оптимальности Беллмана.

$$\max \left[ R_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n) \right]$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq X$$

$$\overline{f_n}(X)$$

$$f_n(X) = \max \left[ g_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n) \right]$$

где $f_1(X) = \max\limits_{x_1} g_1(x_1)$

**Д-во**

$$\max R_n = \max_{x_n} \max_{[x_{n-1} \dots x_1]} R_n$$

---

**Определение принципа Беллмана.**

Если процесс пришёл в нек. точку оптимальным образом и если мы будем продолжать процесс с теми же критериями оптимальности, то и весь процесс в целом будет оптимальным.

---

Если процесс рассм. с конца.

$$f_{k-1}(X) = \max_{x_{k-1}} \left[ g_{k-1}(x_{k-1}) + f_k(X - x_{k-1}) \right]$$

$$f_n(X) = \max_{x_n} g_n(x_n), \ k = n, \dots 2.$$

Динам. прог. это

$k = \overline{1, n}$

$\overline{u_k} \quad \vec{x}_{k-1} \to \vec{x}_k$


Любая задача дин. прог. реш. в 4 этапа

1. Параметризация процесса
2. Выделение ф-ии Беллмана
3. Составление рекурр. соотнош.
4. Дискретизация процесса

---

$$W = \int_0^T G(t, x(t), u(t))\,dt \to \min$$

$u(t) \in \Omega$ — параметр управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(t, x(t), u(t))$$

$x(0) = x_0$

где $h$, $G$ — заданы


С мин расх топлива перейти на орбиту за опред. время $T$

$x(t)$ — $n$-мерный вектор
$u(t)$ — $m$-мерный вектор.

1. Параметризация задачи

$$W = \int_t^T G(s, x(s), u(s))\,ds \to \min_{\substack{u(s)\in\Omega \\ t \le s \le T}}$$

$$\frac{dx(s)}{ds} = h(s, x(s), u(s));$$

$$x(s)\Big|_{s=t} = x(t).$$

2. $$\min_{u(s)\in\Omega} W = \min_{u(s)\in\Omega} \int_t^T G(s, x(s), u(s))\,ds = f(t, x(t))$$

3. $$\int_t^T G\,ds = \int_t^{t+\Delta} G\,ds + \int_{t+\Delta}^T G\,ds$$

$$\min_{\substack{u(s)\in\Omega \\ t\le s\le T}} = \min_{u(s)\in\Omega} \Big( \min_{\substack{u(s)\in\Omega \\ t+\Delta\le s\le T}} \Big)$$

в точке. при всех знач. парам. упр

(**) $$f(t, x(t)) = \min_{u(t)\in\Omega} \left[ G(t, x(t), u(t))\Delta + f(t+\Delta, x(t+\Delta)) \right]$$

$$x(t+\Delta) = x(t) + h(t, x(t), u(t))\Delta$$

$$f(T, x(T)) = 0, \text{ т.к. } \int_T^T G = 0$$

4. Состав. рекурр. соот. и дискретизация процесса.

4. Разобьём отрезок $[0, T]$ на отрезки $\Delta = \frac{T}{n}$

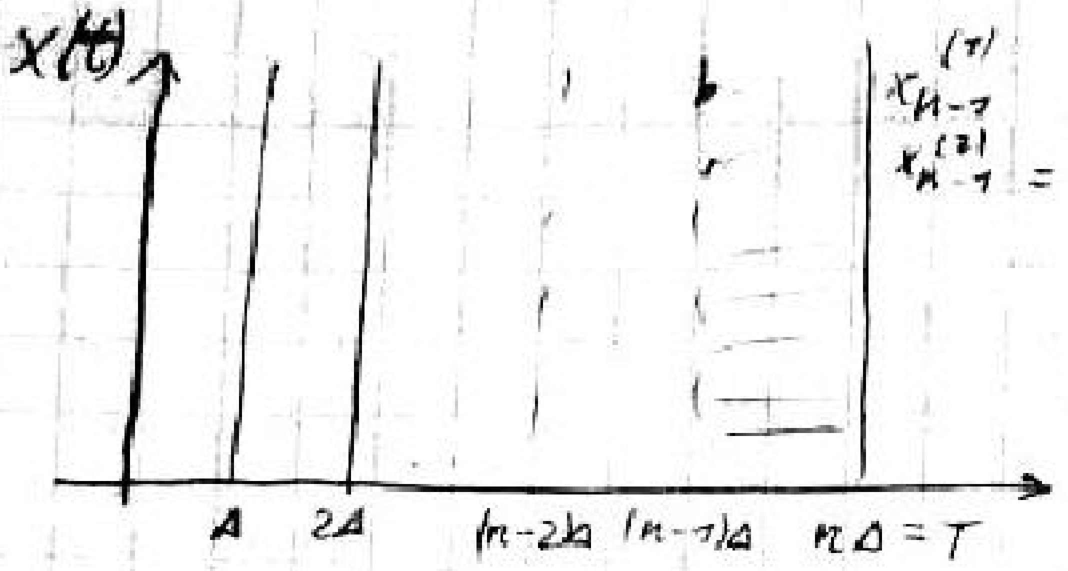
и положим $t = k\Delta$, $x_k = x(k\Delta)$, $u_k = u(k\Delta)$

$$G_k(x_k, u_k) = G(k\Delta, x_k, u_k)\cdot\Delta$$

$$f_k(x_k) = f(k\Delta, x_k)$$

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in \Omega} \left[ G_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_k + h_k(x_k, u_k)) \right]$$

↑ рекуррентное соотношение (**)




$x_{n-1}^{(1)}$

$x_{n-1}^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + \Delta X$

$f_n(x) = 0$ т. к. $f(T, x) = 0$ при $k = n-1$

$$f_{n-1}(x_{n-1}) = \min_{u_{n-1} \in \Omega} \left[ G_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1}) \right]$$

построим таблицу.

$k = n-1$.

| $x_{n-1}$ | $u_{n-1}^*$ | $f_{n-1}$ |
|---|---|---|
| $x_{n-1}^{(1)}$ | $u_{n-1}^{*(1)}$ | $f_{n-1}^{(1)}$ |
| $x_{n-1}^{(2)}$ | $u_{n-1}^{*(2)}$ | $f_{n-1}^{(2)}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $x_{n-1}^{(M)}$ | $u_{n-1}^{*(M)}$ | $f_{n-1}^{(M)}$ |

переб. все парам. управ. на кажд. шаге, → min. и заносим в таблицу.

$k = n-2$.

$$f_{n-2}(x_{n-2}) = \min_{u_{n-2} \in \Omega} \left[ G_{n-2}(x_{n-2}, u_{n-2}) + f_{n-1}(x_{n-2} + h_{n-2}(x_{n-2}, u_{n-2})) \right]$$

| $x_{n-2}$ | $u_{n-2}^*$ | $f_{n-2}$ |
|---|---|---|
| $x_{n-2}^{(1)}$ | $u_{n-2}^{*(1)}$ | $f_{n-2}^{(1)}$ |
| $x_{n-2}^{(2)}$ | $u_{n-2}^{*(2)}$ | $f_{n-2}^{(2)}$ |
| ⋮ | ⋮ | |
| $x_{n-2}^{(M)}$ | $u_{n-2}^{*(M)}$ | $f_{n-2}^{(M)}$ |

при $k=0$
$x_0 = x(0)$

$$f_0(x_0) = \min_{u_0 \in U} \left[ G_0(x_0, u_0) + f_1(x_0 + h(x_0, u_0)) \right]$$

$$u_0^*(x_0) \qquad x_1 = x(\Delta) = x_0 + h_0(x_0, u_0^*)$$

$$u_1^*(x_1) = u^*(\Delta) \to x_2 = x(2\Delta) = x_1 + h_1(x_1, u_1^*) \to$$

$$\to u_2^*(x_2) = u^*(2\Delta) \to \ldots$$

$$x_n = x(n\Delta) = x_{n-1} + h_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1}^*)$$

Задача об оптимальном распределении ресурсов.

~~об~~ стрельба по групповой цели без переноса огня. Сколько ракет назначать.

$n$
$N$

$$\max M[X_n] = \max \sum_{k=1}^{N} \left[ 1 - (1-p_k)^{n_k} \right]$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_N \le n$

$p_k \le 1$.

$n_1$ - кол-во ресурсов на 1-ю цель.

$$R_N(x_1, \ldots, x_N) = g_1(x_1) + \ldots + g_N(x_N) \to \max_{x_1 \ldots x_N}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N \le x_0$$

$$x_k \ge 0, \; g_k(x_k) \to \text{доход от } k^{\text{го}} \text{ ресурса.}$$

1) этап (параметр.)

$$R_N(x_1, \ldots x_N) = g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)$$

$$n = 0, \ldots, N$$

$$x_1 + \ldots + x_n \le X$$

2) $$f_n(x) = \max_{x_1, \ldots x_n} R_N(x_1, \ldots x_n)$$

$x_n \to g_n(x_n)$

$x - x_n \to n-1 \to f_{n-1}(x-x_n)$

$g_n(x_n) + f_{n-1}(x-x_n) \to max$

Если $x_n$ выбирать исходя из условий оптимальности, то мы получим ф-ию Беллмана.

3] $f_n(x_n) = \max\limits_{0 \le x_n \le x} [g_n(x_n) + f_{n-1}(x-x_n)]$

$f_0(x) = 0$

4) $f_n(k\Delta) = \max\limits_{l=0,1,\ldots k} [g_n(l\Delta) + f_{n-1}(k\Delta - l\Delta)]$

$k = 0, 1, 2, \ldots, m$

Методы дин. программир. и их применение к задачам планирования последовательных действий

Матем. формулир. задачи дин. прог. Принцип оптимальности Беллмана

$x_i \geq 0 \ (i = 1 \ldots n)$

$R_n(x_1 \ldots x_n) = g_1(x_1) + \ldots g_n(x_n)$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq x$

$f_n(x) = \max [g_n(x_n) + f_{n-1}(x-x_n)]$

$f_1(x) = \max\limits_{x_1} g_1(x_1)$

$\max R_n = \max\limits_{x_n} \max\limits_{[x_{n-1}, \ldots x_1]} R_n$

$$f_n(x) = \max_{[x_1 \dots x_n]} [g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n)] =$$

$$= \max_{x_n} \max_{[x_{n-1} \dots x_1]} [g_n(x_n) + \dots + g_1(x_1)] =$$

$$= \max_{x_n} \{ g_n(x) + \max [g_{n-1}(x_{n-1}) + \dots + g_1(x_1)] \} =$$

$$= \max_{x_n} [g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)]$$

Оптимальная страт. облад. тем св-вом, что каковы бы не первонач. сост. и реш. послед. решение должно опред. оптим. страт. относ. состояния, получ. в результате первонач. решения.

Решаем с конца.

$$f_{k-1}(x) = \max [g_{k-1}(x_{k-1}) + f_k(x - x_k)]$$

$$f_n(x) = \max g_n(x_n); \ (k = n, \dots 2).$$

процесс многошаговой оптимизации.

Рассмотр. систему, кот. на каждом k-ом шаге $(k = 1, \dots n)$, под воздействием влияющ. фактора $\bar{u}_k$ переходит из сост. $\bar{x}_{k-1}$ в $x_k$

$$(\bar{x}_0) \xrightarrow{\bar{u}_1} (\bar{x}_1) \xrightarrow{\bar{u}_2} (\bar{x}_2) \dots (\bar{x}_{n-1}) \xrightarrow{\bar{u}_n} (\bar{x}_n)$$

если взять $f_k$ как показ. эффек. на каждом шаге то $f_k = f_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k)$

при этом предполаг. существование последовательности $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u})$

ф-ия должна уд. условиям аддитивности

$$R = \sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{x}_{n-1}, \bar{u}_k) \text{ - целев. ф-ия}$$

Задачу упр. проц. можно след. обр.
Опред. совок. допустимых д.д. ограничений, управлении $\bar{U}_1$, переводящих систему из нач. сост. $\bar{x}_0$ в конечн $\bar{x}_n$ при этом оптимизирующих целевую ф-ию.

Постановка задачи об оптим. распр. снарядов при стрельбе по рассред. групповой цели без перенос огня.

1. Постановка задачи

Планируется стрельба $S$-снарядами по рассред. групповой цели сост. из $n$ единиц.
Каждая единица груп. цели обстрел. незав. относ. других, заранее назнач. кол-вом снарядов.
Вер. пораж. $i$-ой един. одним снарядом $= p_i$ $(i=\overline{1,n})$
Назначить для обстрела каждой $i$-ой единицы кол-во снарядов $m_i$, чтобы среднее число пораж. един было max.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i = S_i\right)$$

Дано.

$S=4$; $n=3$

$p_1=0,3$

$p_2=0,5$

$p_3=0,6$

2. Формализация задачи

найти $m_i \geq 0$ $(i=\overline{1,n})$ максимиз. ф-ию

$$M(m_1,\dots m_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[1-(1-p_i)^{m_i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \leq S$$

т.к. $\sum_{i=1}^{n}\left[1-(1-p_i)^{m_i}\right]=n-\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)^{m_i}$

Задачу можно формулир. иначе:

$m_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,n})$, минимизир. ф-ию.

$$M(m_1, \dots m_n) = \sum_{i=1}^{n} (1-p_i)^{m_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \leq S$$

критерий max. поражен. целей эквив. min. непоражённых.

3. Процесс вычислений.

Обозн. через $x_i$ число снарядов выдел. для обстрела $i$-целей

$$m_i = x_i - x_{i-1} \; ; \; (i=0,n, \; x_0 = 0)$$

$m_i$ фазовая коорд. характер. сост. системы в конце $i$-ого шага, а $x_i$ парам. управл. на $i$-ом шаге.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq x \leq x_1} (1-p_1)^x \quad (0 \leq x_1 \leq S)$$

$$\cancel{0 \leq x \leq} x_1$$

$$f_2(x_2) = \min_{0 \leq x_1 \leq x_2} \{(1-p_2)^{x_2 - x_1} + f_1(x_1)\} \quad (0 \leq x_2 \leq S$$

$$f_n(x_n) = \min_{0 \leq x_{n-1} \leq x_n} \{[1-p_n]^{x_n - x_{n-1}} + f_{n-1}(x_{n-1})\}$$

$$(0 \leq x_n \leq S)$$

решаем численным методом по таблице функций обратный ход.

$$f_i(x_i) = \min \{(1-p_i)^{x_i - x_{i-1}} + f_{i-1}(x_{i-1})\}$$

$$(0 \leq x_2 \leq S)$$

---

~~опред. по таблице через $x_i$~~

по табл. $f_i(x_i)$ — определ. значен. $x_{i-1}$ прямой ход.

$$1.\ (\overset{x_i}{x_i}) \rightarrow x_{i-1}$$ (прямой ход)

определ $m_i = x_i - x_{i-1}$

Расчёт таблицы обратного хода.

Задача об оптимальном распред. авиации в послед. налётах на объекты удара

Постан. задачи

на 2 объекта планир. n налетов авиац. $(i = 1 \dots n)$, кол-во средств $x_i$ распред. перед каждым налетом распредел. след. обр.

$y_i$ - на первый объект

$x_i - y_i$ на второй

после кажд. налета 1-й объект определяются $C_1(y_i)$ - эффект ущерба и $P_1(y_i)$ - это сохран. число средств.

после каждого i-ого налета на 2-ой объект опред. соот. $C_2(y_i)$ и $P_2(y_i)$

при этом после кажд. налета число средств не пополн., а сохр. средства перераспред.

$X_0$ - первонач. число средств.

треб. так распредел. величин $(y_1, \dots y_n)$ чтобы нанес. ущерб был max

Исх. данные

$n = 3$, $X_0 = 3$

$C_1(x) = 0{,}8x$, $C_2(x) = 0{,}7x$

$P_1(x) = 0{,}5x$, $P_2(x) = 0{,}6x$

Мат. формулир.

найти такие $y_i$ $(i = \overline{1,n})$ $0 \le y_i \le x_i$ максимиз. ф-ию:

$$R = \sum_{i=1}^{n} [C_1(y_i) + C_2(x_i - y_i)]$$

$$x_1 = X_0 \quad ; x_{i+1} = P_1(y_i) + P_2(x_i - y_i)$$

---

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le y_3 \le x_3} [0{,}8y_3 + 0{,}7(x_3 - y_3)]$$

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} [0{,}8y_2 + 0{,}7(x_2 - y_2) + f_3(x_3(x_2))]$$

$$f_1(x_1) = \max[0{,}8y_1 + 0{,}7(x_1 - y_1) + f_2(x_2(x_1))]$$

$$X_3(x_2) = 0{,}5y_2 + 0{,}6(x_2 - y_2)$$

$$x_2(x_1) = 0{,}5y_1 + 0{,}6(x_1 - y_1)$$

$$f_i(x_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$y_i = 0 \qquad y_i = x_i$$

$f_3(x_3) = 0{,}8x_3$ при $y_i = x_3$

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} \{[0{,}8y_2 + 0{,}7(x_2 - y_2)] + {}$$
$$+ 0{,}8[0{,}5y_1 + 0{,}6(x_2 - y_2)]\}$$

$f_2(x_2) = 1{,}2x_2$ при $y_2 = x_2$

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le y_1 \le x_1} \{[0{,}8y_1 + 0{,}7(x_1 - y_1)] + 1{,}2[0{,}5y_1 + 0{,}6(x_1 - y_1)]\}$$

$f_1(x_1) = 1{,}42x_1$ при $y_1 = 0$

$y_1 = 0,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$