

ЗАНЯТИЕ №1.

Общее понятие о методе динамического программирования.

Учебные вопросы:

1. Сущность метода динамического программирования.
2. Задача об оптимальном управлении.
3. Алгоритм численного метода решения задачи.

ЗАНЯТИЕ №2.

Вычислительная схема динамического программирования.

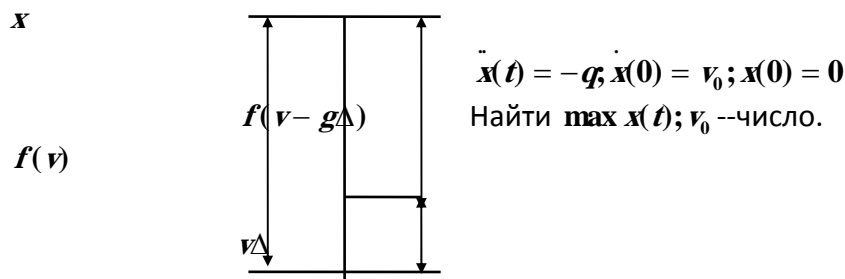
Учебные вопросы:

1. Задача об оптимальном распределении ресурсов.
2. Алгоритм решения задачи.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №1.

Учебный вопрос №1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Рассмотрим задачу о нахождении максимальной высоты, на которую поднимется материальная точка, брошенная с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v_0 .



1. Параметризуем задачу и вместо одной будем решать целый класс задач: $v_0 \rightarrow v$ --параметр.
2. Представим $\max x(t)$ как функцию параметра v :

$f(v) = \max x(t)$ и напишем для $f(v)$ рекуррентное соотношение. Так как $\dot{x}(t) = v - gt$, то, положив $t = \Delta$, где Δ --малая величина, получим:

$$f(v) = v\Delta + f(v - g\Delta) \quad (*)$$

3. Если $f(v)$ непрерывно дифференцируема, то

$$f(v - g\Delta) = f(v) - \frac{df}{dv} g\Delta, \text{ откуда } \frac{df}{dv} = \frac{v}{g}$$

Очевидно, $f(0) = 0$, тогда $f(v) = \frac{v^2}{2g}$. В частном случае $v = v_0$,

$$f(v_0) = \frac{v_0^2}{2g}$$

Заметим, что для решения задачи можно непосредственно воспользоваться соотношением (*), последовательно полагая

$$v = g\Delta, 2g\Delta, \dots, ng\Delta = v_0.$$

Учебный вопрос №2. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ.

Дан функционал $W = \int_0^T G(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in \Omega}$

при условии $\frac{dx(t)}{dt} = h(t, x(t), u(t)); x(0) = x_0$, G и h -- заданные функции; $u(t)$ -- управление; x_0 и

T -- заданные числа; Ω -- определенная область.

В общем случае $x(t)$ -- n -мерный, а $u(t)$ -- m -мерный векторы.

1. Параметризуем задачу:

$$W = \int_t^T G(s, X(s), u(s)) ds \rightarrow \min_{u(t) \in \Omega; t \leq s \leq T};$$

$$\frac{dX(s)}{ds} = h(s, X(s), u(s)); X(s)|_{s=t} = x(t); t, x(t) \text{ -- варьируемые параметры.}$$

В каждый изменяемый момент времени t будет рассматриваться множество возможных начальных состояний $x(t)$.

2. Введем функцию Беллмана.

$$\min_{u(s) \in \Omega} W = \min_{u(s) \in \Omega} \int_t^T G(s, X(s), u(s)) ds = f(t, x(t)).$$

Установим для нее рекуррентное соотношение

$$\int_t^T G ds = \int_t^{t+\Delta} G ds + \int_{t+\Delta}^T G ds$$

Применим к этому равенству оператор $\min_{u(t) \in \Omega; t \leq s \leq T} = \min_{u(t) \in \Omega} (\min_{u(s) \in \Omega; t+\Delta \leq s \leq T})$,

$$f(t, x(t)) = \min_{u(t) \in \Omega} [G(t, x(t), u(t))\Delta + f(t+\Delta, x(t+\Delta))], (**), \text{ где}$$

$$x(t+\Delta) = x(t) + h(t, x(t), u(t))\Delta.$$

Функциональное уравнение (**) называется уравнением Беллмана. Заметим, что $f(T, x) = 0$, т.

$$\text{к. } \int_t^T G(t, x, u) dt = 0.$$

Учебный вопрос №3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на интервалы $\Delta = \frac{T}{n}$.

Положим

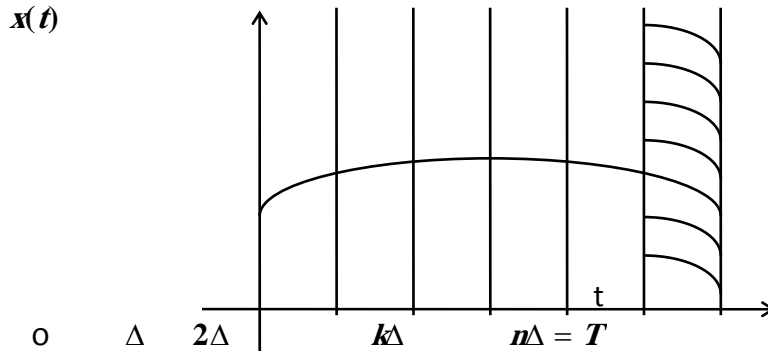
$$t = k\Delta, x_k = x(k\Delta), u_k = u(k\Delta);$$

$$G_k(x_k, u_k) = G(k\Delta, x_k, u_k)\Delta; f_k(x_k) = f(k\Delta, x_k)$$

Во введенных обозначениях уравнение Беллмана запишется:

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in \Omega} [G_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_k + h_k(x_k, u_k))].$$

Таким образом, непрерывный управляемый процесс мы заменили дискретным.



Поскольку $f_n(x) = 0$, т. к. $f(T, x) = 0$, то при $k = n-1$ имеем:

$$f_{n-1}(x_{n-1}) = \min_{u_{n-1} \in \Omega} G_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1})$$

Построим следующую таблицу: зафиксируем $x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)}$, придадим u_{n-1} ряд значений $u_{n-1} = u_{n-1}^i, u_{n-2}^i, \dots \in \Omega$ и вычислим

$$\min G_{n-1}(x_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}) = G_{n-1}(x_{n-1}^{(1)}, u_{n-1}^{*(1)}) = f_n$$

x_{n-1}	u_{n-1}^*	f_{n-1}
$x_{n-1}^{(1)}$	$u_{n-1}^{*(1)}$	$f_{n-1}^{(1)}$
$x_{n-1}^{(2)}$	$u_{n-1}^{*(2)}$	$f_{n-1}^{(2)}$
...
$x_{n-1}^{(M)}$	$u_{n-1}^{*(M)}$	$f_{n-1}^{(M)}$

Далее проведем те же вычисления для $x_{n-1}^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + \Delta x$ и т. д. до некоторого $x_{n-1}^{(M)}$.

Когда $k = n - 2$, то

$$f_{n-2}(x_{n-2}) = \min_{u_{n-2} \in \Omega} [G_{n-2}(x_{n-2}, u_{n-2}) + f_{n-1}(x_{n-2} + h_{n-2}(x_{n-2}, u_{n-2}))]$$

Построим таблицу:

x_{n-2}	u_{n-2}^*	f_{n-2}
$x_{n-2}^{(1)}$	$u_{n-2}^{*(1)}$	$f_{n-2}^{(1)}$
...

При $k = 0$ начальное значение $x_0 = x(0)$ нам задано, поэтому варьировать x_0 не надо и таблица вырождается в строку:

$$f_0(x_0) = \min_{u_0 \in \Omega} [G_0(x_0, u_0) + f_1(x_0 + h_0(x_0, u_0))].$$

Найдем u_0^* , как и раньше, и $f_0(x_0)$ будет искомым значением функционала. Теперь можно построить оптимальную траекторию фазовой координаты $x(t)$ и найти оптимальное управление $u^*(t)$.

$x_1 = x(\Delta) = x_0 + h_0(x_0, u_0^*)$, по соответствующей таблице находим

$$u_1^*(x_1) = u^*(\Delta) \rightarrow x_2 = x(2\Delta) = x_1 + h_1(x_1, u_1^*) \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2^*(x_2) = u^*(2\Delta) \rightarrow \dots \rightarrow x_n = x(t) = x_{n-1} + h_{n-1}(x_{n-1}, u_{n-1}^*)$$

Для данной задачи принцип Беллмана (необходимое условие оптимальности) можно сформулировать следующим образом:

если процесс $x(t)$ -- оптимальный, то каково бы ни было начальное состояние x_0 и достигнутое к произвольному моменту времени t промежуточное состояние $x(t)$, дальнейшее продолжение процесса оптимально.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №2.

Учебный вопрос №1. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ.

Пусть требуется распределить n выстрелов по N единицам рассредоточенной ГЦ, чтобы обеспечить

$$\max M[x_n] = \max \sum_{k=1}^N [1 - (1 - r_k)^{n_k}],$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_N \leq n, r_k$ -- вероятность поражения k -й единицы при одном выстреле.

В общем случае

$$R_N(x_1, \dots, x_N) = g_1(x_1) + \dots + g_N(x_N) \rightarrow \max_{x_1, \dots, x_N};$$

при ограничениях $x_1 + \dots + x_N \leq x_0; x_k \geq 0$ (могут быть целочисленными); $g_i(x_i)$ -- доход от i -го ресурса.

1. Параметризуем задачу:

$$R_N(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n);$$

n -параметр, $n = 0, \dots, N$; $x_1 + \dots + x_n \leq x$ -параметр.

2. Введем функцию Беллмана:

$$f_n(x) = \max_{x_1, \dots, x_n} R_N(x_1, \dots, x_n) \text{ и установим рекуррентное соотношение: зафиксируем}$$

некоторое количество n -го ресурса x_n , доход составит $g_n(x_n)$. Оставшуюся часть ресурсов $x - x_n$ оптимально распределим по $n-1$ ресурсу, получим доход $f_{n-1}(x - x_n)$, Общий доход: $g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)$.

Если x_n выбирается также из условия оптимальности, то получим:

$$f_n(x) = \max_{0 \leq x_n \leq x} [g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)], \text{ начальное условие } f_0(x) = 0.$$

$$f_n(k\Delta) = \max_{l=0, \dots, k} [g_n(l\Delta) + f_{n-1}(k\Delta - l\Delta)]; k = 1, \dots, m$$

Учебный вопрос №2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

При $n=1$ имеем: $f_1(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq x} g_1(x_1)$

При $n=2$: $f_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [g_2(x_2) + f_1(x - x_2)]$ и т. д.

При $n=N$: $f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)]$.

Составим следующую таблицу:

x	$x_1(x)$	$f_1(x)$	$x_2(x)$	$f_2(x)$...	$x_N(x)$	$f_N(x)$
Δ							
2Δ							
...							
$m\Delta = x_0$							

Покажем, что $x_r(k\Delta) = r\Delta$, где $0 \leq r \leq k; k = 1, \dots, m$

$n=1$ $f_1(k\Delta) = \max_{0 \leq l \leq k} g_1(l\Delta); k = 1, \dots, m$

$n=2$. При $x = \Delta$ имеем

$$f_2(\Delta) = \max_{l=0,1} [g_2(l\Delta) + f_1(\Delta - l\Delta)] = \max\{g_2(0) + f_1(\Delta), g_2(\Delta) + f_1(0)\}$$

При $x = k\Delta$

$$f_2(k\Delta) = \max_{l=0, \dots, k} [g_2(l\Delta) + f_1(k\Delta - l\Delta)] = \max\{g_2(0) + f_1(k\Delta), g_2(\Delta) + f_1(k\Delta - \Delta), \dots, g_2(k\Delta) + f_1(0)\} = g_2(r\Delta) + f_1(k\Delta - r\Delta); x_r(k\Delta) = r\Delta.$$

и т. д.

Для заданного $x_0 = m\Delta$ по таблице найдем:

$$x_N(x_0) = S_N \Delta;$$

$$x_{N-1}(x_0 - S_N \Delta) = S_{N-1} \Delta;$$

$$x_{N-2}(x_0 - S_N \Delta - S_{N-1} \Delta) = S_{N-2} \Delta;$$

.....

$$x_1(x_0 - S_N \Delta - \dots - S_2 \Delta) = S_1 \Delta.$$

$x_i = S_i \Delta; i = 1, \dots, N$ и есть решение задачи.

Лекции составил
подполковник В. Ярошенко

ЗАНЯТИЕ №1

Обоснование метода динамики средних

Учебные вопросы:

1. Сущность метода динамики средних.
2. Вывод уравнения для вероятностей состояния единиц.
3. Вывод уравнений для среднего числа единиц и дисперсий числа сохранившихся единиц.

ЗАНЯТИЕ №2

Применение метода динамики средних для построения аналитических моделей.

Учебные вопросы:

1. Уравнение боя Ланчестера / модель А /.
2. Уравнение боя Ланчестера / модель В /.
3. Вывод дифференциальных уравнений боя двух многочисленных группировок.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №1.

Учебный вопрос №1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ДИНАМИКИ СРЕДНИХ.

Рассмотренные ранее методы представляют собой удобный математический аппарат только в том случае, когда число возможных состояний СМО сравнительно невелико. В противном случае эти методы становятся неприемлемыми, т.к. , во-первых, совместное решение большого числа дифференциальных уравнений затруднительно даже при наличии ЭВМ. Во-вторых, если даже удастся решить эти уравнения и найти вероятности всех состояний системы, полученные результаты будут трудно обозримыми.

Для того, чтобы их осмыслить придется пользоваться какими-то обобщенными характеристиками процесса. До сих пор такие средние характеристики вычислялись через вероятности состояний. Однако в случае, когда состояний слишком много, такой способ неприемлем.

Возникает вопрос, нельзя ли составить и решить уравнения непосредственно для интересующих нас средних характеристик, минуя вероятности состояний? Оказывается, можно—иногда точно, иногда—приближенно, с некоторой погрешностью. Такими задачами занимается так называемый « метод динамики средних ».

Он ставит себе целью непосредственное изучение средних характеристик случайных процессов, протекающих в сложных системах с большим числом состояний.

Основой применимости метода динамики средних является именно то, что препятствует изучению явлений более подробными методами: сложность изучаемых процессов и большое число участвующих в них элементов.

Учебный вопрос №2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЯ ЕДИНИЦ.

Рассмотрим две противоборствующие группировки. Пусть 1-я группировка имеет в своем составе **Ошибка! Закладка не определена.Ошибка! Закладка не определена.Ошибка! Закладка не определена.** N_1 **Ошибка! Закладка не определена.**, а 2-я N_2 **Ошибка! Закладка не определена.** однородных боевых единиц. Каждая непораженная боевая единица производит пуассоновский поток выстрелов по непораженным единицам противника. Обозначим через λ_1 и λ_2 средние скорострельности одной боевой единицы соответственно 1-й и 2-й группировок, а через P_1 и P_2 --вероятности успешных выстрелов. В силу независимости успешных выстрелов перейдем от пуассоновских потоков с плотностями λ_1 и λ_2 к пуассоновским потокам успешных выстрелов с плотностями $\Lambda_1 = \lambda_1 \cdot P_1$ и $\Lambda_2 = \lambda_2 \cdot P_2$.

Пусть $P_1^i(t)$ ($P_2^j(t)$) есть вероятность того, что в момент времени t в 1-й группировке (во 2-й группировке) сохранилось i (j) боевых единиц, где $0 \leq i \leq N_1$ ($0 \leq j \leq N_2$). Найдем $P_1^{N_1}(t+dt)$. Эта вероятность равна вероятности того, что в момент времени t 1-я группировка состояла из N_1 единиц, умноженной на вероятность того, что за время dt 2-я группировка не смогла произвести успешного выстрела.

$$P_1^{N_1}(t+dt) = P_1^{N_1}(t) \cdot \left[P_2^0(t) + \sum_{k=1}^{N_2} P_2^k(t) \cdot (1 - k \cdot \Lambda_2 \cdot dt) \right]$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{N_2} P_2^k(t) = 1$ и $P_2^0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{N_2} P_2^k(t)$ и $(1 - k \cdot \Lambda_2 \cdot dt) = (1 - \Lambda_2 \cdot dt)^k$ в силу ординарности все k выстрелов неуспешно за время dt , получим:

$$P_1^{N_1}(t+dt) = P_1^{N_1}(t) \cdot \left[1 - \sum_{k=1}^{N_2} k \cdot P_2^k(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt \right] = \{ \text{заменяя } m_2(t) = \sum_{k=1}^{N_2} k \cdot P_2^k(t) \} = P_1^{N_1}(t) \cdot [1 - m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt]$$

Для k , удовлетворяющего двойному неравенству $0 < k < N_1$ имеем:

$$P_1^k(t+dt) = P_1^k(t) \cdot [1 - m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt] + P_1^{k+1}(t) \cdot m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt,$$

$m_2(t) = \sum_{k=1}^{N_2} k \cdot P_2^k(t)$ --средняя численность второй группировки в текущий момент времени;

$1 - m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt$ --вероятность того, что 2-я группировка не произвела ни одного успешного выстрела, а $m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt$ --произвела один успешный выстрел за время dt . И, наконец,

$$P_1^0(t+dt) = P_1^0(t) + P_1^1(t) \cdot m_2(t) \cdot \Lambda_2 \cdot dt.$$

Переходя от разностных уравнений к дифференциальным, будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{dP_1^{N_1}(t)}{dt} = -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot P_1^{N_1}(t); \\ \frac{dP_1^k(t)}{dt} = -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot [P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t)]; k = N_1 - 1, \dots, 1; \\ \frac{dP_1^0(t)}{dt} = -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot P_1^1(t); \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично для 2-й группировки имеем:

$$\begin{cases} \frac{dP_2^{N_2}(t)}{dt} = -\Lambda_1 \cdot m_1(t) \cdot P_2^{N_2}(t); \\ \frac{dP_2^k(t)}{dt} = -\Lambda_1 \cdot m_1(t) \cdot [P_2^k(t) - P_2^{k+1}(t)]; k = N_2 - 1, \dots, 1; \\ \frac{dP_2^0(t)}{dt} = -\Lambda_1 \cdot m_1(t) \cdot P_2^1(t); \end{cases} \quad (2)$$

Причем при $t = 0$

$$P_1^{N_1} = 1, P_1^{N_1-1} = \dots = P_1^0 = 0; \quad P_2^{N_2} = 1, P_2^{N_2-1} = \dots = P_2^0 = 0; \text{ согласно условию.}$$

Соотношения (1) и (2) образуют замкнутую систему $N_1 + N_2 + 2$ ДУ, описывающую бой двух группировок через вероятности состояния каждой из них.

Учебный вопрос №3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЕДИНИЦ И ДИСПЕРСИИ ЧИСЛА СОХРАНИВШИХСЯ ЕДИНИЦ.

При больших **Ошибка! Закладка не определена.Ошибка! Закладка не определена.** N_1 **Ошибка! Закладка не определена.** и N_2 **Ошибка! Закладка не определена.** решение и анализ полученных выше дифференциальных уравнений становятся слишком трудоемкими, поэтому выведем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять средние численности сохранившихся единиц.

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N_1} k \cdot P_1^k(t) = \sum_{k=1}^{N_1} k \cdot \frac{dP_1^k(t)}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \left\{ \underbrace{N_1 \cdot P_1^{N_1}(t) + \sum_{k=1}^{N_1-1} k \cdot [P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t)]}_{m_1(t)} \right\} = \\
&= -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot \left[m_1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} k \cdot P_1^{k+1}(t) \right] = \\
&= \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} k \cdot P_1^{k+1}(t) = \sum_{k=1}^{N_1-1} (k+1) \cdot P_1^{k+1}(t) + P_1^1(t) - P_1^1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} P_1^{k+1}(t) = m_1(t) - [1 - P_1^0(t)] \right] = \\
&= -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot [1 - P_1^0(t)].
\end{aligned}$$

Для 2-й группировки аналогично. Таким образом, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot [1 - P_1^0(t)]; & (3) \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = -\Lambda_1 \cdot m_1(t) \cdot [1 - P_2^0(t)]; & (4) \end{cases}$$

с начальными условиями $m_1(0) = N_1$; $m_2(0) = N_2$.

Оценка боя в среднем (на уровне математических ожиданий) имеет смысл лишь при большом числе боевых единиц, когда индивидуальные особенности отдельных единиц сглаживаются. Кроме того, в реальном бою нет необходимости полностью уничтожить противника. Достаточно уничтожить определенный процент, при котором данное подразделение теряет боеспособность. Поэтому решение системы уравнений ищем при $0 \leq t \leq \tau$, где τ определяем из условия $m_1(\tau) > \Delta \cdot N_1 \wedge m_2(\tau) > \Delta \cdot N_2$, ($0 < \Delta < 1$) но тогда $P_1^0(t) \approx 0$ и $P_2^0(t) \approx 0$. Окончательно получим уравнения боя Ланчестера (модель А) с переносом огня:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= -\Lambda_2 \cdot m_2(t); \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= -\Lambda_1 \cdot m_1(t). \end{aligned}$$

До сих пор мы предполагали, что противники ведут прицельный огонь по каждой непораженной единице. Предположим теперь, что стрельба ведется без переноса огня, т.е. выстрелы равномерно распределены по всем как сохранившимся, так и уже пораженным боевым единицам. Тогда условная вероятность попасть в непораженную единицу будет $\frac{m_1(t)}{N_1}$ или $\frac{m_2(t)}{N_2}$. Эффективные скорострельности Λ_1 и Λ_2 примут вид:

$\Lambda_1 = \lambda_1 \cdot P_1' \cdot \frac{m_2(t)}{N_2}$ и $\Lambda_2 = \lambda_2 \cdot P_2' \cdot \frac{m_1(t)}{N_1}$, где P_1' и P_2' -- вероятности успешных выстрелов при условии, что выстрел пришелся на непораженную единицу. Обозначив $\Lambda_1' = \lambda_1 \cdot P_1'$ и $\Lambda_2' = \lambda_2 \cdot P_2'$, получим уравнения боя Ланчестера (модель Б) :

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= -\frac{\Lambda_2'}{N_1} \cdot m_1(t) \cdot m_2(t); \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= -\frac{\Lambda_1'}{N_2} \cdot m_1(t) \cdot m_2(t). \end{aligned}$$

Перейдем к выводу уравнений для дисперсий количества сохранившихся боевых единиц (для модели А) .

$$D_1(t) = \sum_{k=0}^{N_1} [k - m_1(t)]^2 \cdot P_1^k(t) = \sum_{k=0}^{N_1} k^2 \cdot P_1^k(t) - 2 \cdot m_1(t) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{N_1} k \cdot P_1^k(t)}_{m_1(t)} + m_1^2(t) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{N_1} P_1^k(t)}_1 = C_1(t) - m_1^2(t), \text{ где } C_1(t) \text{ --2-й начальный момент.}$$

Отсюда $\frac{dD_1(t)}{dt} = \frac{dC_1(t)}{dt} - 2 \cdot m_1(t) \cdot \frac{dm_1(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^{N_1} k^2 \cdot \frac{dP_1^k(t)}{dt} = -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot \left\{ N_1^2 \cdot P_1^{N_1} + \sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 \cdot [P_1^k(t) - P_1^{k+1}(t)] \right\} = \\ &= -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot \left[C_1(t) - \sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 \cdot P_1^{k+1}(t) \right] = \left| \sum_{k=1}^{N_1-1} k^2 \cdot P_1^{k+1}(t) = \right. \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1-1} (k+1)^2 \cdot P_1^{k+1}(t)}_{C_1} + \underbrace{P_1^1(t) - P_1^1(t)}_{1-P_1^0} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1-1} P_1^{k+1}(t)}_{1-P_1^0} - 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1-1} k \cdot P_1^{k+1}(t)}_{2[m_1 - (1-P_1^0)]} = \\ &= C_1(t) - [1 - P_1^0(t)] - 2 \cdot \{m_1(t) - [1 - P_1^0(t)]\} = \\ &= C_1(t) - 2 \cdot m_1(t) + 1 - P_1^0(t) \Big| -\Lambda_2 \cdot m_2(t) \cdot [2 \cdot m_1(t) - (1 - P_1^0(t))]. \end{aligned}$$

Так же как и раньше полагаем $P_1^0(t) \approx 0$, тогда

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -2 \cdot \Lambda_2 \cdot m_1(t) \cdot m_2(t) + \Lambda_2 \cdot m_2(t).$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dD_1(t)}{dt} &= -2 \cdot \Lambda_2 \cdot m_1(t) \cdot m_2(t) + \Lambda_2 \cdot m_2(t) - 2 \cdot m_1(t) \cdot [-\Lambda_2 \cdot m_2(t)] = \\ &= \Lambda_2 \cdot m_2(t) \quad (5) \end{aligned}$$

Аналогично $\frac{dD_2(t)}{dt} = \Lambda_1 \cdot m_1(t)$. (6)

Найдем начальные условия: $D_1(0) = \sum_{k=0}^{N_1} (k - N_1)^2 \cdot P_1^k(0) = 0$, т. к. только

$P_1^{N_1}(0) \neq 0$; ($P_1^{N_1}(0) = 1$), но при $k = N_1$ 1-й сомножитель равен 0. Аналогично $D_2(0) = 0$.

Итак, в любой момент времени $0 \leq t \leq \tau$ мы можем определить математические ожидания и дисперсии случайных количеств боевых единиц двух группировок. Обозначим эти случайные величины через $X_1(t)$ и $X_2(t)$ соответственно. Определив с помощью уравнений (3), (4), (5), (6) МОЖ и дисперсии случайных количеств $X_i(t)$ сохранившихся к моменту времени t боевых единиц сторон, можно найти окружающий среднее значение $m_i(t)$ доверительный интервал, в который с заданной вероятностью попадает случайная величина $X_i(t)$. Разобьем интервал $[0, \tau]$ на n частей $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_n = \tau$ и представим случайное число сохранившихся боевых единиц 1-й стороны в виде суммы независимых случайных величин: $X_1(t_k) = \sum_{s=1}^{N_1} X_1^s(t_k)$ где $X_1^s(t_k) = 0$, если s -я единица 1-й группировки поражена к моменту t_k и $X_1^s(t_k) = 1$, если не поражена. На основании центральной предельной теоремы теории вероятностей с. в. $X_1(t_k)$ распределена асимптотически нормально с математическим

ожиданием $m_1(t_k)$ и дисперсией $D_1(t_k)$. Тогда, задавшись значением доверительной вероятности δ , можно определить доверительный интервал ε из соотношения $P\left\{|X_1(t_k) - m_1(t_k)| \leq \varepsilon\right\} = \delta$.

Действительно, пусть $P\left\{\frac{|X_1(t_k) - m_1(t_k)|}{\sqrt{D_1(t_k)}} \leq t_\delta\right\} = \delta$, откуда

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-t_\delta}^{t_\delta} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{t_\delta} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{t_\delta}{\sqrt{2}}} \exp\{-t^2\} dt = \Phi\left(\frac{t_\delta}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Так как $t_\delta \cdot \sqrt{D_1(t_k)}$ должно быть $\leq \varepsilon$, то можно положить $t_\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D_1(t_k)}}$ и следовательно

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2 \cdot D_1(t_k)}}\right) = \delta. \quad (7)$$

Таким образом, можно определить соответствующий доверительный интервал ε из данного соотношения.

Например, согласно (7) с вероятностью $\delta = 0.9$ можно утверждать, что фактическое количество сохранившихся к моменту времени t боевых единиц $X_1(t)$ будет отличаться от среднего значения $m_1(t)$ не более чем на $1.65 \cdot \sqrt{D_1(t)}$.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №2.

Учебный вопрос №1. УРАВНЕНИЕ БОЯ ЛАНЧЕСТЕРА (Модель А).

Дифференцируем почленно первое уравнение (из системы (3), (4)) и заменяя возникающий в правой части член $\frac{dm_2(t)}{dt}$ из второго уравнения получим:

$$\frac{d^2 m_1(t)}{dt^2} = -\Lambda_2 \cdot \frac{dm_2(t)}{dt} = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot m_1(t).$$

Пусть $\Lambda_1 = \text{const}$ и $\Lambda_2 = \text{const}$.

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$m_1(t) = A_1 \cdot \exp\{\sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t\} + A_2 \cdot \exp\{-\sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t\}$, где A_1, A_2 -- произвольные постоянные.

Из начальных условий следует $m_1(0) = N_1 = A_1 + A_2$;

$$\left. \frac{dm_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\Lambda_2 \cdot N_2 = A_1 \cdot \sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} - A_2 \cdot \sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2}, \text{ откуда следует}$$

$$A_2 = N_1 - A_1 \text{ и } \sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot (A_1 - N_1 + A_1) = -\Lambda_2 \cdot N_2;$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Lambda_2 \cdot N_2}{\sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2}} + \frac{N_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(N_1 - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \cdot N_2 \right);$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(N_1 + \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \cdot N_2 \right);$$

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(N_1 - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \cdot N_2 \right) \cdot \exp\{\sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(N_1 + \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \cdot N_2 \right) \cdot \exp\{-\sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t\} = \\ &= N_1 \cdot \text{ch}\tau - \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \cdot N_2 \cdot \text{sh}\tau, \text{ где } \tau = \sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t. \end{aligned}$$

Введем также безразмерные переменные:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}; \quad \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}; \quad \theta = \frac{N_1}{N_2} \cdot \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = ch\tau - \frac{1}{\theta} \cdot sh\tau \\ \mu_2 = ch\tau - \theta \cdot sh\tau \end{cases}$$

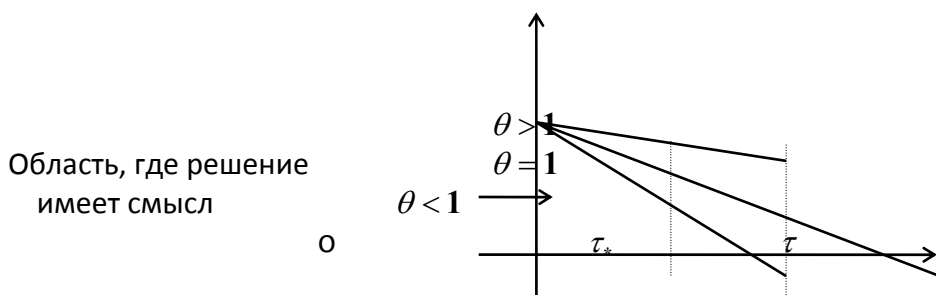
Указанные величины m_1 и m_2 как функции от τ будут зависеть от единственного параметра θ . θ называется коэффициентом преимущества.

При $\theta = 1$ бой продолжается неограниченное время и заканчивается ничьей, причем $m_1(\infty) = m_2(\infty) = 0$.

Если $\theta > 1$, то побеждает первая группировка. Это выражается в том, что к концу боя функция $m_2(\tau) \approx 0$, а функция $m_1(\tau)$ достигает минимума в некоторой точке $\tau = \tau_*$, причем $m_2(\tau_*) = 0$. Дисперсии D_1 и D_2 при этом возрастают, причем для стороны (2), терпящей поражение, дисперсия возрастает значительно быстрее, чем для побеждающей стороны (1).

Очевидно, что решение имеет смысл только при $\tau < \tau_*$, т. е. до момента времени, отвечающего минимуму функции $\frac{m_1}{N_1}$. При $m_2(\tau) \approx 0$ пренебрежение величиной $P_2^0(t)$ по сравнению с 1 в уравнении (3) становится незаконным. Этим и объясняется данное ограничение на область определения решения системы.

Если $\theta < 1$, то побеждает вторая группировка.



Каждой паре кривых $\mu_1 = \mu_1(\tau)$ и $\mu_2 = \mu_2(\tau)$ на плоскости безразмерных переменных (τ, μ) соответствует целый класс подобных процессов (боев) в размерных переменных. Например, 2 боя с

$$\begin{aligned} N_1 = a; N_2 = b; \Lambda_1 = c; \Lambda_2 = d \\ N_1 = 2 \cdot a; N_2 = b; \Lambda_1 = c; \Lambda_2 = 4 \cdot d \end{aligned}$$

будут изображаться одной парой кривых на плоскости (τ, μ) , отвечающей $\theta = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{c}{d}}$, хотя 2-й бой в действительности будет в 2 раза быстротечнее:

$$\text{Для 1-го боя } \tau = \sqrt{\Lambda_1 \cdot \Lambda_2} \cdot t = \sqrt{c \cdot d} \cdot t_1, \text{ а для 2-го } \tau = 2 \cdot \sqrt{c \cdot d} \cdot t_2, \text{ откуда } t_2 = t_1/2.$$

Заметим, что, если N_1 увеличить в 2 (k) раза при других неизменных параметрах, то и θ увеличится в 2 (k) раза, а если Λ_1 увеличить в 2 (k) раза, то θ увеличится в $\sqrt{2}$ (\sqrt{k}) раза, т. е. увеличение численности дает большее преимущество, чем такое же увеличение скорострельности. Такой характер зависимости θ от N_i и Λ_i получил название квадратичного закона Ланчестера.

Учебный вопрос №2. УРАВНЕНИЕ БОЯ ЛАНЧЕСТЕРА (модель Б).

$$\frac{dm_1}{dt} = -\frac{\Lambda_2}{N_1} \cdot m_1 \cdot m_2; \quad \frac{dm_2}{dt} = -\frac{\Lambda_1}{N_2} \cdot m_1 \cdot m_2;$$

После замены $\mu_i = \frac{m_i}{N_i}$ ($i=1,2$)

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\frac{\Lambda_2 \cdot N_2}{N_1} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2; \quad \frac{d\mu_2}{dt} = -\frac{\Lambda_1 \cdot N_1}{N_2} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2.$$

Обозначим $u_1 = \frac{\Lambda_1 \cdot N_1}{N_2}$; $u_2 = \frac{\Lambda_2 \cdot N_2}{N_1}$. Окончательно имеем:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -u_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2; \quad (1) \quad \frac{d\mu_2}{dt} = -u_1 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \quad (2);$$

Разделим 2-е уравнение на 1-е: $\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \frac{u_1}{u_2}$; $d\mu_2 = \frac{u_1}{u_2} \cdot d\mu_1$, откуда $\mu_2 = \frac{u_1}{u_2} \cdot \mu_1 + C_1$, где

$$C_1 = 1 - \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 - u_1}{u_2}.$$

После подстановки μ_2 в 1-е дифференциальное уравнение получим

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -u_2 \cdot \mu_1 \cdot \left(\frac{u_1}{u_2} \cdot \mu_1 + C_1 \right) = -u_1 \cdot \mu_1 \cdot \left(\mu_1 + \frac{u_2}{u_1} \cdot C_1 \right), \text{ откуда } -\frac{d\mu_1}{\mu_1 \cdot \left(\mu_1 + C_2 \right)} = u_1 \cdot dt, \text{ где}$$

$$C_2 = \frac{u_2}{u_1} \cdot C_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_1}.$$

Умножим обе части последнего уравнения на C_2 и преобразуем

$$-\frac{C_2 \cdot d\mu_1}{\mu_1 \cdot \left(\mu_1 + C_2 \right)} = \frac{d\mu_1}{\mu_1 + C_2} - \frac{d\mu_1}{\mu_1} = C_2 \cdot u_1 \cdot dt.$$

После интегрирования получим:

$$\ln \left| \mu_1 + C_2 \right| - \ln \mu_1 = C_2 \cdot u_1 \cdot t + C_3, \text{ где } C_3 = \ln(1 + C_2).$$

В результате преобразований получим: $1 + \frac{C_2}{\mu_1} = (1 + C_2) \cdot \exp(C_2 \cdot u_1 \cdot t)$.

Решив относительно μ_1 , будем иметь:

$$\mu_1 = \frac{C_2}{(1 + C_2) \cdot \exp(C_2 \cdot u_1 \cdot t) - 1} = \frac{u_2 - u_1}{u_2 \cdot \exp((u_2 - u_1) \cdot t) - u_1}.$$

Аналогично для μ_2 : $\mu_2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 \cdot \exp((u_1 - u_2) \cdot t) - u_2}$.

При $u_1 = u_2$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$.

Пусть $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u$ $\exp((u_2 - u_1) \cdot t) \approx 1 + (u_2 - u_1) \cdot t$, тогда

$$\mu_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_2 \cdot (u_2 - u_1) \cdot t - u_1} = \frac{1}{1 + u \cdot t} = \mu_2.$$

Вычтем из 1-го уравнения 2-е $\frac{d(\mu_1 - \mu_2)}{dt} = (u_1 - u_2) \cdot \mu_1 \cdot \mu_2$, причем при $t=0$ $\mu_1 - \mu_2 = 0$;

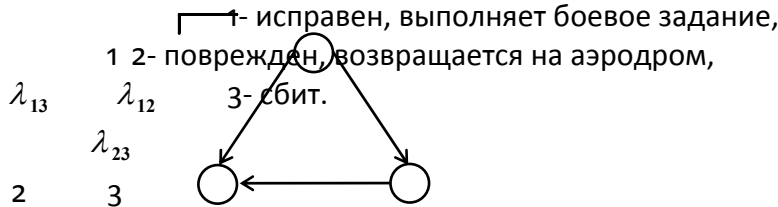
если $u_1 > u_2$, то т. к. $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ $\frac{d(\mu_1 - \mu_2)}{dt} > 0$ и, следовательно $\mu_1 - \mu_2 > 0$, т. е.

$\mu_1 > \mu_2$. Если $u_1 = u_2$, то так же, как и ранее, получим $\mu_1 = \mu_2$. Итак:

- а). Если $u_1 > u_2$ -- побеждает 1-я группировка;
 б). Если $u_1 < u_2$ -- 2-я;
 в). Если $u_1 = u_2$ -- ничья.

Учебный вопрос №3. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЯ ДВУХ МНОГОЧИСЛЕННЫХ ГРУППИРОВОК.

Рассмотрим еще один пример применения метода динамики средних. Система при $t=0$ состоит из N самолетов. Возможные состояния самолетов:



В состоянии 2 самолёт подвергается обстрелу и может быть сбит. λ_{ij} -- плотность пуассоновского потока перехода из состояния i в состояние j . Пусть плотность огня по исправным единицам λ , вероятность повредить самолет P_n , сбить -- P_c , тогда $\lambda_{12} = \lambda \cdot P_n$, $\lambda_{13} = \lambda \cdot P_c$. Аналогично $\lambda_{23} = \lambda' \cdot P'_c$, где λ' -- плотность потока выстрелов по поврежденному самолету; P'_c -- вероятность сбить поврежденный самолет одним выстрелом.

Найдем следующие вероятности:

$$P_1^N(t+dt) = P_1^N(t) \cdot \left[1 - N \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot dt \right];$$

$$P_1^k(t+dt) = P_1^k(t) \cdot \left[1 - k \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot dt \right] + P_1^{k+1}(t) \cdot (k+1) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot dt;$$

$0 < k < N;$

$$P_1^0(t+dt) = P_1^0(t) + P_1^1(t) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot dt;$$

Переходя от разностных уравнений к дифференциальным, получим:

$$\frac{dP_1^N(t)}{dt} = -N \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1^N(t);$$

$$\frac{dP_1^k(t)}{dt} = -k \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1^k(t) + (k+1) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1^{k+1}(t); \quad 0 < k < N;$$

$$\frac{dP_1^0(t)}{dt} = (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot P_1^1(t).$$

Выведем теперь дифференциальное уравнение для $m_1(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot \left\{ N^2 \cdot P_1^N(t) + \sum_{k=1}^{N-1} [k^2 \cdot P_1^k(t) - k \cdot (k+1) \cdot P_1^{k+1}(t)] \right\} = \\ &= -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\sum_{k=1}^{N-1} k^2 \cdot P_1^k(t) - \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)^2 \cdot P_1^{k+1}(t) - P_1^1(t) + P_1^1(t) + \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) \cdot P_1^{k+1}(t) \right] = \\ &= -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot m_1(t). \end{aligned}$$

С другой стороны можно написать:

$\Delta m_1(t) = -\lambda_{12} \cdot dt \cdot m_1(t) - \lambda_{13} \cdot dt \cdot m_1(t)$, где $\lambda_{12} \cdot dt$ ($\lambda_{13} \cdot dt$) есть вероятность перехода из состояния 1 в состояние 2 ($1 \rightarrow 3$) за время dt одной единицы. Переходя к дифференциальному уравнению, получим:

$\frac{dm_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot m_1(t)$, что полностью совпадает с выведенным ранее дифференциальным уравнением для $m_1(t)$.

Аналогично $\Delta m_2(t) = \lambda_{12} \cdot dt \cdot m_1(t) - \lambda_{23} \cdot dt \cdot m_2(t)$;

$\Delta m_3(t) = \lambda_{13} \cdot dt \cdot m_1(t) + \lambda_{23} \cdot dt \cdot m_2(t)$; откуда

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot m_1(t) - \lambda_{23} \cdot m_2(t);$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot m_1(t) + \lambda_{23} \cdot m_2(t).$$

Система дифф. уравнений имеет следующие начальные условия:

$$m_1(0) = N; \quad m_2(0) = m_3(0) = 0.$$

В общем случае необходимо:

1. Начертить граф возможных переходов;

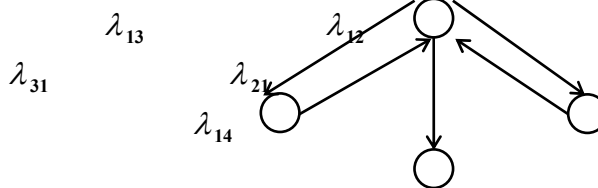
2. Для i -й вершины графа $\frac{dm_i(t)}{dt} = -m_i(t) \cdot \sum_j \lambda_{ij} + \sum_k \lambda_{ki} \cdot m_k(t)$;

где 1-я сумма относится к стрелкам, исходящим из i -й вершины, а 2-я сумма — к входящим в i -ю вершину.

Проиллюстрируем эти правила на следующем примере:

Система состоит из N самолетов. Каждый самолет может находиться в одном из следующих состояний:

1. Исправен
2. Проходит мелкий ремонт
3. Проходит капитальный ремонт
4. Не ремонтируется



Переходы самолетов из одних состояний в другие происходят с плотностями λ_{ij} .

Выпишем дифф. уравнения:

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = m_1(t) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) + m_2 \cdot \lambda_{21} + m_3 \cdot \lambda_{31};$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = -m_2 \cdot \lambda_{21} + m_1 \cdot \lambda_{12};$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = -m_3 \cdot \lambda_{31} + m_1 \cdot \lambda_{13};$$

$$\frac{dm_4(t)}{dt} = m_1 \cdot \lambda_{14}.$$

Лекции составил:
подполковник В. Ярошенко.

ЗАНЯТИЕ №1.

Основные понятия теории игр.

Учебные вопросы:

1. Нижняя и верхняя цена игры. Принцип минимакса.
2. Прямоугольные игры с седловой точкой.
3. Прямоугольные игры без седловых точек.
4. Основная теорема теории игр. Свойство оптимальных стратегий.

ЗАНЯТИЕ №2.

Методы решения игровых задач.

Учебные вопросы:

1. Сведение решения игры к задаче ЛП
2. Элементарные методы решения игр 2×2 и $2 \times n$.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №1.

Учебный вопрос №1. НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ЦЕНА ИГРЫ. ПРИНЦИПЫ МИНИМАКСА.

Теория игр—это математическая теория выбора решений участниками конфликтных ситуаций, когда имеются две или более стороны с противоположными интересами, действия которых друг против друга имеют различный результат в зависимости от выбранных противниками способов проведения операции.

Игра—набор правил, регламентирующих поведение участников игры. Участники игры называются игроками, лицами, партнерами, сторонами. Партия игры—возможная реализация правил.

Стратегии игроков—способы проведения игры каждым из участников.

Ход игрока—факт выбора игроком одной из возможных стратегий. Саму выбранную стратегию называют выбором.

Игры различаются:

1. По числу участников: игры 2-х и более лиц.

Когда мы говорим “игра n лиц”, то это означает, что, согласно правилам игры, игроки разделены на n непересекающихся множеств, причем в одно множество объединяются участники с общими интересами;

2. По организации платежей: игры с нулевой и ненулевой суммой

Рассмотрим игру n лиц. Пусть a_i ($i=1, \dots, n$)—платеж i -го игрока в конце партии. Если $a_i > 0$, то a_i — выигрыш, а если $a_i < 0$, то проигрыш i -го игрока. При $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ партия игры называется партией с нулевой суммой. Если все партии игры с нулевой суммой, то сама игра называется игрой с нулевой суммой. В парной игре с нулевой суммой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Теория игр с ненулевой суммой применяется для изучения экономических процессов, приводящих к созданию или уничтожению общественного богатства;

3. По количеству ходов и числу стратегий: конечные и бесконечные игры.

Если каждая партия игры состоит из конечного числа ходов и число стратегий у каждого игрока конечно, то игра называется конечной. Все другие игры бесконечны;

4. По информации, которой располагают участники игры: с полной и неполной информацией.

Если перед каждым ходом игрок знает все предшествующие выборы и платежи, то игра с полной информацией. В противном случае—игра с неполной информацией.

Принцип минимакса.

Рассмотрим конечную игру двух лиц X и Y размерности $m \times n$ с нулевой суммой, т. е. X имеет m стратегий x_1, x_2, \dots, x_m , а Y n стратегий

y_1, y_2, \dots, y_n . Партия состоит в том, что X и Y выбирают по одной из своих стратегий x_i и y_j , в результате чего платеж X составляет величину a_{ij} , а платеж Y — $(-a_{ij})$ (игра с нулевой суммой).

Составим следующую таблицу:

	Y_1	...	Y_n
X_1	a_{11}	...	a_{1n}
...
X_m	a_{m1}	...	a_{mn}

Таблицу, задаваемую функцией целочисленных аргументов $i=1, \dots, m$ и

$j=1, \dots, n$ $f(i, j) = a_{ij}$, сопоставляющей паре стратегий x_i и y_j платеж a_{ij} , называют платежной матрицей игры, а игру, заданную платежной матрицей, называют игрой, приведенной к нормальной форме.

В общем случае, решить игру—значит указать, какие стратегии из числа x_1, x_2, \dots, x_m , y_1, y_2, \dots, y_n и как часто следует применять каждому игроку, чтобы в среднем за большое число партий игроку X максимизировать свой выигрыш, а игроку Y минимизировать свой проигрыш.

Решение игр основывается на принципе минимакса, который состоит в следующем: какую бы стратегию x_i ни выбрал игрок X, игрок Y ответит такой стратегией y_j , чтобы заплатить $\min_j a_{ij} = \alpha_i$. Следовательно, игроку X из всех своих стратегий нужно взять такую x_{i_0} , которая обеспечивает $\max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha$. α называется нижней ценой игры, а стратегия x_{i_0} -- минимаксной стратегией игрока X. α является гарантированным выигрышем игрока X при любой стратегии игрока Y. С другой стороны, на всякую стратегию y_j игрока Y сторона X ответит стратегией x_i , обеспечивающей $\max_i a_{ij} = \beta_j$. Следовательно, из всех y_1, y_2, \dots, y_n надо выбрать такую y_{j_0} , которая доставит $\min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = \beta$. Величина β называется верхней ценой игры, а y_{j_0} -- минимаксной стратегией игрока Y. Верхняя цена игры—это тот гарантированный уровень, больше которого Y не заплатит, если только он будет применять свою минимаксную стратегию y_{j_0} , какие бы стратегии ни применяла сторона X.

Учебный вопрос №2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИГРЫ С СЕДЛОВОЙ ТОЧКОЙ.

В общем случае $\alpha \leq \beta$. Если же оказывается, что $\alpha = \beta$, то минимаксные стратегии x_{i_0} и y_{j_0} принимают за решение игры, а элемент $a_{i_0, j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$ (*) называют ценой игры. При этом (i_0, j_0) является седловой точкой функции $f(i, j) = a_{ij}$, $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$;

Опр. Точка $x_0 \in X, y_0 \in Y$ называется седловой точкой вещественной функции $f(x, y)$, определенной на множестве $X \times Y$, если $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \forall x \in X$

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y), \forall y \in Y$$

Опр. Стратегии x_{i_0} и y_{j_0} , где точка (i_0, j_0) является седловой для $f(i, j)$ называются оптимальными чистыми стратегиями игроков X и Y, а $v = f(i_0, j_0)$ -- ценой игры.

Будем предполагать, что существуют величины

$$\alpha = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \text{ и } \beta = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

Покажем, что всегда $\alpha \leq \beta$.

По опр. max f:

$$f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y), \text{ правая часть от } x \text{ не зависит;}$$

По опр. min f:

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \leq f(x, y);$$

Отсюда $\min_{y \in Y} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y$

Правая часть неравенства не зависит от x , а оно выполнено $\forall x \in X$, поэтому $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y), \forall y \in Y$

Аналогично рассуждая для y -ков, получим:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y), \text{ т.е. } \alpha \leq \beta.$$

Отсюда, в частности, нижняя цена игры не больше верхней. Выведем теперь необходимые и достаточные условия существования седловой функции $f(x, y)$.

Необходимое условие:

Если (x_0, y_0) --седловая точка $f(x, y)$, то

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

По определению седловой точки:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \forall x \in X, x_0 \in X, y_0 \in Y, \text{ поэтому } \max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

По определению \min $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$

С другой стороны, $f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y), \forall x \in X, x_0 \in X, y_0 \in Y$, откуда

$$f(x_0, y_0) \leq \min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$

или $\beta \leq f(x_0, y_0) \leq \alpha$

Таким образом, $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$

Учитывая полученное ранее соотношение $\alpha \leq \beta$, получаем $\alpha = f(x_0, y_0) = \beta$

Достаточное условие:

Если существуют величины $\alpha = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$ и $\beta = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$

и $\alpha = \beta$, то функция $f(x, y)$ имеет седловую точку.

Из существования α следует, что существует такое $x_0 \in X$, что $\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \alpha$; Из существования $\beta \Rightarrow \exists y_0 \in Y: \max_{x \in X} f(x, y_0) = \beta$

Т. к. $\alpha = \beta$, то $\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \max_{x \in X} f(x, y_0) = \beta$

По определению \min функции:

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \Rightarrow \max_{x \in X} f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0), \forall x \in X$$

По определению \max

$$f(x_0, y_0) \leq \max_{x \in X} f(x, y_0) \Rightarrow f(x_0, y_0) \leq \min_{y \in Y} f(x_0, y) \Rightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y), \forall y \in Y. \text{ Т. Д.}$$

Заметим, что из всех точек (x_0, y_0) , удовлетворяющих соотношению $\alpha = \beta$ седловыми будут лишь те, которые удовлетворяют также соотношениям $\min_{y \in Y} f(x_0, y) = \alpha$ и $\max_{x \in X} f(x, y_0) = \beta$

Все определения и свойства, относящиеся к $f(x, y)$, могут быть без изменения перенесены на вещественную функцию двух наборов переменных $f(X, Y)$, где $X = (x_1, \dots, x_m), Y = (y_1, \dots, y_n)$.

Учебный вопрос №3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ИГРЫ БЕЗ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК.

Смешанные стратегии: если $\alpha = \beta$, то решение игры ищется в т. н. чистых стратегиях, т. е. Во всех партиях игры игроки будут использовать свои минимаксные стратегии x_{i_0} и y_{j_0} . Если же $\alpha < \beta$ и $f(i, j)$ не имеет седловой точки, то решение игры ищется в смешанных стратегиях.

Опр. В матричной игре (P, Q) смешанной стратегией игрока X называется совокупность неотрицательных чисел $P = (p_1, \dots, p_m)$ таких, что $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, причем p_i есть частота

(вероятность), с которой игрок X выбирает стратегию x_i . Для игрока Y соответственно

$$Q = (q_1, \dots, q_n), q_i \geq 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

Обозначим S_m и S_n , соответственно, множества всех смешанных стратегий игроков X и Y.

Игра с применением чистой стратегии x_k для игрока X есть игра со смешанной стратегией $P = (p_1, \dots, p_m)$, где $p_k = 1$, а остальные $p_i = 0$.

Мат. ожидание выигрыша игрока X при применении игроками смешанных стратегий (P, Q) есть:

$$E(P, Q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$$

В соответствии с принципом минимакса игрок X выберет такую стратегию $P \in S_m$, чтобы достичь $\max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P, Q)$, а игрок Y -- такую $Q \in S_n$, чтобы достичь $\min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P, Q)$

В качестве решения игры принимают седловую точку (P_0, Q_0) функции $E(P, Q)$, т. к. в этом случае

$$\begin{aligned} E(P, Q_0) &\leq E(P_0, Q_0), \forall P \in S_m \\ E(P_0, Q) &\leq E(P_0, Q_0), \forall Q \in S_n \end{aligned}$$

что заставляет игроков применять стратегии (P_0, Q_0) как взаимно выгодные.

Про (P_0, Q_0) говорят, что это стратегическая седловая точка. P_0 и Q_0 называются оптимальными смешанными стратегиями игроков X и Y, а величина $E(P_0, Q_0) = \max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P, Q) = \min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P, Q) = v$ называется ценой игры.

Учебный вопрос №4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ ИГР. СВОЙСТВО ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ.

На принципиальный вопрос, существует ли седловая точка у функции $E(P, Q)$ дает ответ основная теорема теории игр, которая утверждает, что для всякой прямоугольной игры существуют и равны две величины

$$\alpha = \max_{P \in S_m} \min_{Q \in S_n} E(P, Q) \text{ и } \beta = \min_{Q \in S_n} \max_{P \in S_m} E(P, Q)$$

Следовательно, любая прямоугольная игра имеет решение либо в смешанных, либо в чистых стратегиях.

Свойства оптимальных стратегий.

Введем обозначения:

$$E(i, Q) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \text{ -- средний выигрыш игрока X, когда он использует чистую стратегию } x_i,$$

а игрок Y -- смешанную стратегию Q .

Аналогично, для чистой стратегии y_j : $E(P, j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$, тогда

$$E(P, Q) = \sum_{i=1}^m E(i, Q) p_i = \sum_{j=1}^n E(P, j) q_j$$

1. Если (P_0, Q_0) -- оптимальные смешанные стратегии игроков X и Y, а v -- цена игры, то $E(i, Q_0) \leq v, i = 1, \dots, m, E(P_0, j) \geq v, j = 1, \dots, n$

Это свойство следует прямо из определения седловой точки функции $E(P, Q)$, для частного случая $P = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), Q = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Обратное утверждение также справедливо:

Если существует такое действительное число v и также $P_0 \in S_m$ и $Q_0 \in S_n$, что $E(i, Q_0) \leq v, i=1, \dots, m$, $E(P_0, j) \geq v, j=1, \dots, n$, то (P_0, Q_0) --оптимальные смешанные стратегии игроков, а v --цена игры.

$$E(P, Q_0) = \sum_{i=1}^m E(i, Q_0) p_i \leq \sum_{i=1}^m v p_i = v, \forall P \in S_m;$$

Действительно,

$$E(P_0, Q) = \sum_{j=1}^n E(P_0, j) q_j \geq \sum_{j=1}^n v q_j = v, \forall Q \in S_n$$

т. е. $E(P, Q_0) \leq v \leq E(P_0, Q)$. Положим $P = P_0, Q = Q_0$, тогда $v = E(P_0, Q_0)$ и $\forall P \in S_m, \forall Q \in S_n$
 $E(P, Q_0) \leq E(P_0, Q_0) \leq E(P_0, Q)$

Таким образом, точка (P_0, Q_0) является седловой точкой функции $E(P, Q)$, а v --есть значение этой функции в седловой точке.

Итак, мы доказали необходимое и достаточное условие оптимальности смешанных стратегий.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №2.

Учебный вопрос №1. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИГРЫ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПОРГРАММИРОВАНИЯ.

На основании необходимого и достаточного условия нельзя непосредственно решить игровую задачу, но оно является необходимым теоретическим обоснованием.

Сведем теперь решение игры к задаче ЛП.

Имеем:

$$\begin{aligned}
 E(i, Q_0) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0 \leq v, i=1, \dots, m, \sum_{j=1}^n q_j^0 = 1; q_j^0 \geq 0, j=1, \dots, n \\
 E(P_0, j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 \geq v, j=1, \dots, n, \sum_{i=1}^m p_i^0 = 1; p_i^0 \geq 0, i=1, \dots, m
 \end{aligned}
 \tag{**}$$

По сути дела, нахождение решения игры сводится к решению $m+n$ линейных неравенств:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j &\leq v, i=1, \dots, m \\
 \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i &\geq v, j=1, \dots, n
 \end{aligned}$$

относительно неизвестных $p_1^0, \dots, p_m^0, q_1^0, \dots, q_n^0$ и v . Причем величины p_i^0 и q_j^0 должны удовлетворять также условиям:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m p_i &= 1, 0 \leq p_i \leq 1 \\
 \sum_{j=1}^n q_j &= 1, 0 \leq q_j \leq 1
 \end{aligned}$$

Заметим, что, если к каждому элементу платежной матрицы $\|a_{ij}\|$ прибавить константу C , то получим:

$$\begin{aligned}
 v_c &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + C) p_i^0 q_j^0 = v + C \sum_{i=1}^m p_i^0 \sum_{j=1}^n q_j^0 = v + C \\
 E_c(i, Q_0) &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + C) q_j^0 = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0 + C; \\
 E_c(P_0, j) &= \sum_{i=1}^m (a_{ij} + C) p_i^0 = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 + C
 \end{aligned}$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие не изменилось, а следовательно, не изменились и оптимальные смешанные стратегии, в то время, как цена игры увеличилась на C . Поэтому выбором величины C всегда можно добиться, чтобы цена игры C была > 0 .

Истинная цена игры v найдется через v_c как $v = v_c - C$

Введем новые переменные:

$$\xi_i = \frac{p_i^0}{E(P, Q_0)}; \eta_j = \frac{q_j^0}{E(P_0, Q)}; \omega = \frac{1}{E(P, Q_0)}; z = \frac{1}{E(P_0, Q)};$$

Неравенства (***) запишутся в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j \leq \frac{v}{E(P_0, Q)}, i=1, \dots, m$$

Считаем, что Q лежит в окрестности Q_0 , так что $E(P_0, Q) > 0$.

Т. к. $E(P, Q)$ -- непрерывна и $E(P_0, Q_0) > 0$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \xi_i \geq \frac{v}{E(P, Q_0)}, j=1, \dots, n, E(P, Q_0) > 0; \xi_i \geq 0; \eta_j \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = \omega; \sum_{j=1}^n \eta_j = z$$

Так как $v = E(P_0, Q_0) = \max_{P \in S_m} E(P, Q_0) = \min_{Q \in S_n} E(P_0, Q)$, то переходя к пределу при $P \rightarrow P_0, Q \rightarrow Q_0$, получим:

$$z = \sum_{j=1}^n \eta_j \rightarrow \max_{\eta_j} \omega = \sum_{i=1}^m \xi_i \rightarrow \min_{\xi_i}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j \leq 1, i=1, \dots, m, \eta_j \geq 0; j=1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \xi_i \geq 1; j=1, \dots, n, \xi_i \geq 0; i=1, \dots, m$$

Если ξ_i^0, η_j^0 -- оптимальные решения сопряженных задач ЛП, то

$$\max_{\eta_j} z = \min_{\xi_i} \omega = \frac{1}{v}, \text{ т. е. } v = \frac{1}{\sum \eta_j^0} = \frac{1}{\omega(\xi_i^0)}, \text{ а оптимальные смешанные стратегии игроков}$$

выразятся как $p_i^0 = \xi_i^0 v, q_j^0 = \eta_j^0 v$.

$$\max_i E(i, Q_0) = \min_j E(P_0, j) = v$$

Иначе говоря, у каждого игрока имеется, по крайней мере, чистая стратегия, которая, будучи применена против оптимальной смешанной стратегии противника, дает цену игры.

По свойству оптимальных стратегий $E(i, Q_0) \leq v, i=1, \dots, m$, следовательно, $\max_i E(i, Q_0) \leq v$.

Пусть $\max_i E(i, Q_0) < v$, но тогда и по-прежнему $E(i, Q_0) < v$. Откуда

$$E(P_0, Q_0) = \sum_{i=1}^m E(i, Q_0) p_i^0 < v \sum_{i=1}^m p_i^0 = v,$$

что противоречит тому, что v -- цена игры.

Аналогично доказывается и второе равенство.

Если для какого-либо $k, 1 \leq k \leq m$ выполняется $E(k, Q_0) < v$, то в

оптимальной смешанной стратегии $P_0, p_k^0 = 0$, т. е. стратегия p_k не участвует в оптимальном решении игрока X.

Пусть $p_k^0 > 0$, тогда $E(k, Q_0) p_k^0 < v p_k^0$, а так как $E(i, Q_0) p_i^0 < v p_i^0$ для всех остальных i , то получим $E(P_0, Q_0) < v$. Пришли к противоречию.

Аналогично, если для какого-либо $l, 1 \leq l \leq n$ выполняется $E(P_0, l) > v$, то в оптимальной смешанной стратегии Q_0 величина $q_l^0 = 0$.

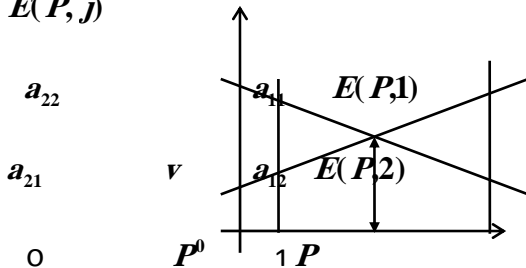
Рассмотрим игру 2x2 с платежной матрицей:

	Y_1	Y_2	P
X_1	a_{11}	a_{12}	p
X_2	a_{21}	a_{22}	$1-p$
Q	q	$1-q$	

$$E(P,1) = a_{11}p + a_{21}(1-p)$$

$$E(P,2) = a_{12}p + a_{22}(1-p)$$

$$E(P, j)$$



Оптимальной стратегии X соответствует $\max_{0 \leq p \leq 1} \min_{j=1,2} E(P, j)$

Для определения $P = P_0$ запишем следующее уравнение:

$$(a_{11} - a_{12})p + (a_{21} - a_{22})(1-p) = 0 \text{ или}$$

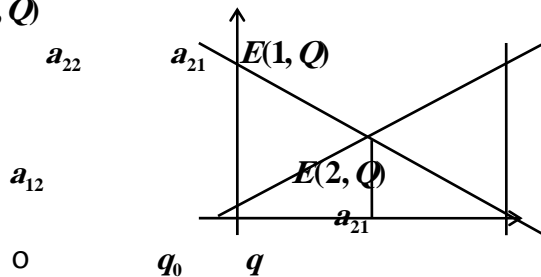
$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p = a_{22} - a_{21}, \text{ откуда } P_0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Для игрока Y $Q = (q, 1-q)$

$$E(1, Q) = a_{11}q + a_{21}(1-q)$$

$$E(2, Q) = a_{21}q + a_{22}(1-q)$$

$$E(i, Q)$$



Оптимальной стратегии Y соответствует $\min_{0 \leq q \leq 1} \max_{i=1,2} E(i, Q)$

Пусть $m=2, n=4$.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	p
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$1-p$

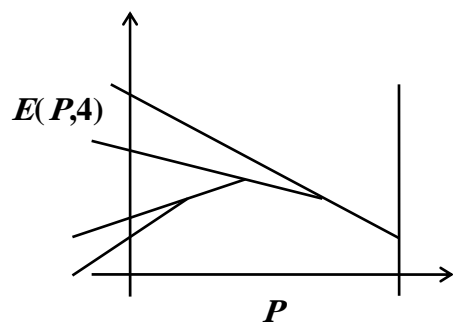
$$E(P, j)$$

$$E(P,3)$$

$$E(P,2)$$

$$E(P,1)$$

0



Геометрически видно, что $v < E(P, 1) \Rightarrow q_1^0 = 0$;
 $v < E(P, 4) \Rightarrow q_4^0 = 0$

Для игрока Y решение свелось к игре (2x2), т. е. его оптимальная смешанная стратегия есть $Q = (0, q_1 - q_0)$.

Соотношение превосходства.

Если в игре $\Gamma(m \times n)$, заданной платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ выполняется условие $a_{sj} \leq \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ik_j}$ (*), где $\lambda_k \geq 0, k=1, \dots, l; \sum_{k=1}^l \lambda_k = 1; j=1, \dots, n; i_k \in (1, 2, \dots, m), i_k \neq s$, то говорят, что s-я строка подчинена выпуклой линейной комбинации строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_l , или, что выпуклая линейная комбинация стратегий $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ доминирует над стратегией x_s . В этом случае можно отбросить s-ю строку в матрице $\|a_{ij}\|$ и перейти к игре Γ' размерности $((m-1) \times n)$.

Если неравенства (*) выполняются как строгие, то говорят о строгом доминировании (превосходстве). При этом решения игры Γ' представляют все решения игры Γ . При нестрогом превосходстве часть решений игры Γ может быть потеряна.

По свойству оптимальных смешанных стратегий для игры имеем:

$$E(i, Q_0) \leq v; i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, m$$

$$E(P_0, j) \geq v; j = 1, \dots, n$$

Запишем

$$E(s, Q_0) = \sum_{j=1}^n a_{sj} q_j^0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ik_j} q_j^0 = \sum_{k=1}^l \lambda_k \sum_{j=1}^n a_{ik_j} q_j^0 =$$

$$= \sum_{k=1}^l \lambda_k E(i_k, Q_0) \leq \sum_{k=1}^l \lambda_k v = v$$

Итак, первая группа неравенств выполняется и для $i = s$.

$E(P_0, j)$ можно представить в виде:

$$E(P_0, j) = E(P_0', j) + a_{sj} \cdot 0 = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 + a_{sj} \cdot 0; j = 1, \dots, n$$

Т. е. при $v = v', Q = Q_0$ получили

$$E(i, Q_0) \leq v; i = 1, \dots, m$$

$$E(P_0, j) \geq v; j = 1, \dots, n$$

Следовательно, стратегии $P_0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_{s-1}^0, p_{s+1}^0, \dots, p_m^0)$ и $Q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$ являются оптимальными смешанными стратегиями игроков X и Y в игре Γ , а $v = v'$ -- цена игры Γ , но p_s^0 не обязательно должно быть равно 0 и поэтому возможны другие оптимальные стратегии $(\sum_{i=1}^m p_i^0 = 1)$. Если же хотя бы одно неравенство (*) выполнено как строгое, то

$$E(s, Q_0) = \sum_{j=1}^n a_{sj} q_j^0 < v \Rightarrow p_s^0 = 0 \text{ -- по 4-му свойству оптимальных стратегий.}$$

Для игрока Y $\sum_{k=1}^l \lambda_k a_{ik} \leq a_{ir}$ выпуклая линейная комбинация стратегий y_{i_1}, \dots, y_{i_l} подчинена стратегии y_r , т. е. заведомо выгодна для игрока Y.

$$\Gamma' : \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \mathbf{a}_{1r} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m1} & \dots & \mathbf{a}_{mr} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix}$$

Лекции составил:
подполковник В. Ярошенко.

Занятие №1

Общая задача линейного программирования.

Учебные вопросы :

1. Постановка задачи линейного программирования.
2. Существование решения задачи линейного программирования.
3. Выпуклость области определения решения
4. Прямая и двойственная (сопряженная) задачи линейного программирования.

Занятие №2

Метод решения задач линейного программирования.

Учебные вопросы:

1. Опорный план и оптимальное решение задачи линейного программирования.
2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
3. Пример решения задачи.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №1

Учебный вопрос №1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Найти максимум линейной функции $Z = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j$ -целевой

функции (критерия) при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m \text{ - балансовые условия;}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \text{ - граничные условия, где } P_j, b_{ij}, c_i - \text{const.}$$

Такая постановка задачи ЛП называется стандартной. Могут быть и другие постановки задачи ЛП:

1. Найти $\min Z$.

2. Часть балансовых условий представлена равенствами;

$$\text{также возможно: } \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j \geq c_i;$$

3. Граничные условия заданы в виде $x_j \geq a_j$, где $a_j - \text{const}$.

Но задача нахождения \min функции переводится в задачу нахождения \max умножением функции на -1 . Также умножением на -1 производится изменение знака неравенства в балансовых условиях на противоположный. (Из числа переменных можно исключить столько x_j , сколько балансовых условий имеется в виде независимых равенств). И неравенства $x_j \geq a_j$ заменой переменных $x'_j = x_j - a_j$ переводятся в неравенства $x'_j \geq 0$. При этом $Z(x_j) \rightarrow Z(x'_j) + \text{const}$, т. е. $Z(x_j)$ достигает \max тогда же, когда и $Z(x'_j)$. Таким образом, другие возможные формулировки задачи ЛП сводятся к исходной формулировке.

Учебный вопрос №2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Опр. Совокупность величин x_1, \dots, x_n , удовлетворяющая балансовым и граничным условиям, называется допустимым решением задачи ЛП (допустимым планом, программой). В некоторых оптимизационных задачах возникает необходимость нахождения \max или \min линейной функции многих переменных при заданных ограничениях на область определения. Очевидно, что линейная функция достигает своих экстремальных значений на границе области определения.

Опр. Допустимое решение задачи ЛП, при котором целевая функция Z достигает \max , называется оптимальным решением (планом, программой).

Пусть требуется максимизировать $Z = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$ при следующих ограничениях:

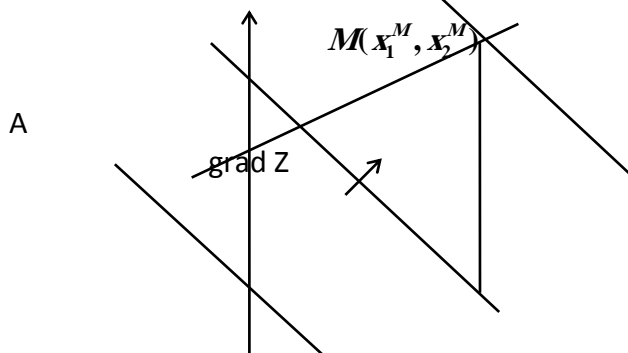
$$b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 \leq c_1;$$

$$b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 \leq c_2; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Тогда область возможных изменений переменных представляет собой часть плоскости, ограниченную координатными осями и прямыми

$$b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 = c_1;$$

$$b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 = c_2.$$



0

 $B(x_1^B, 0)$ 

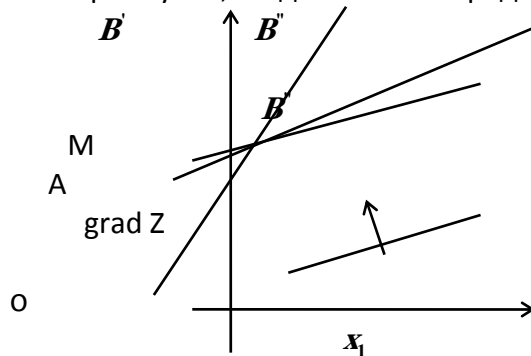
Рассмотрим семейство прямых $x_2 = -\frac{P_1}{P_2} \cdot x_1 + \frac{Z}{P_2}$ с параметром Z .

Из рис. видно, что максимальному значению Z отвечает прямая, проходящая через точку M . Теперь предположим, что прямые семейства параллельны прямой BM , тогда в качестве точки $M(x_1^0, x_2^0)$, дающей оптимальное решение задачи ЛП, можно принять любую точку, лежащую на отрезке BM :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \cdot x_1^M + (1 - \lambda) \cdot x_1^B; \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ x_2 &= \lambda \cdot x_2^M + (1 - \lambda) \cdot 0 = \lambda \cdot x_2^M, \end{aligned}$$

т. е. выпуклую линейную комбинацию точек B и M .

Рассмотрим теперь случай, когда область определения функции неограниченна.



Пусть прямые семейства, соответствующие целевой функции Z , параллельны MB , тогда оптимальным решением будет любая точка прямой MB , лежащая правее точки M .

Если в рассматриваемой задаче изменить область определения функции Z и при этом прямая MB примет положение MB' , то линейная форма может возрасти неограниченно, т. е. оптимального решения не существует. Если же MB примет положение MB'' в результате изменения балансовых условий, то функция Z достигает максимума в единственной точке M , несмотря на неограниченность области определения Z .

Решения задачи ЛП не существует, если балансовые условия противоречивы или когда задача поставлена некорректно:

$$\begin{aligned} Z &= P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3; \quad b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 \leq c_1; \\ b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 &\leq c_2; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

На x_3 не наложено ограничений (при $P_3 \neq 0$).

Учебный вопрос №3. ВЫПУКЛОСТЬ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ.

На примере двумерных задач видно, что область определения целевой функции Z есть выпуклый многоугольник, одна из вершин которого может лежать и в бесконечности. Покажем, что и в общем случае область определения задачи ЛП—выпуклая.

Опр. Множество G точек n -мерного пространства называется выпуклым, если \forall точек $M'(x_1', \dots, x_n')$ и $M''(x_1'', \dots, x_n'')$ точка $M(x_1, \dots, x_n)$ также принадлежит G , где $x_j = \lambda \cdot x_j' + (1 - \lambda) \cdot x_j''$; $0 \leq \lambda \leq 1$.

Пусть точки $M'(x_1', \dots, x_n')$ и $M''(x_1'', \dots, x_n'')$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j' \leq c_i; \quad x_j' \geq 0;$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j'' \leq c_i; \quad x_j'' \geq 0; \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

т. е. принадлежат области определения функции Z.

Тогда для $x_j = \lambda \cdot x_j' + (1 - \lambda) \cdot x_j''$ имеем:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j' + (1 - \lambda) \cdot \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j'' \leq \lambda \cdot c_i + (1 - \lambda) \cdot c_i = c_i;$$

$x_j \geq 0$, т. к. $x_j \in [x_j', x_j'']$ (или $[x_j'', x_j']$), а оба конца отрезка неотрицательны (или $x_j = \lambda \cdot x_j' + (1 - \lambda) \cdot x_j'' \geq 0$)

Следовательно, выпуклая линейная комбинация точек M' и M'' также принадлежит области определения функции Z. Т. е. эта область есть выпуклое множество.

В трехмерном случае балансовые и граничные условия задают в пространстве (x_1, x_2, x_3) выпуклый многогранник, а целевая функция Z—однопараметрическое семейство параллельных плоскостей (Z) и направление возрастания функции Z: $\text{grad}Z = (P_1, P_2, P_3)$.

В 3-мерном пространстве, если задача ЛП имеет решение, то возможны следующие случаи:

1. плоскость (Z) проходит через вершину многогранника. В этом случае задача ЛП имеет единственное решение;
2. плоскость (Z) проходит через ребро многогранника. Любая точка ребра—оптимальное решение;
3. плоскость (Z) проходит через грань многогранника.

Любая точка грани—оптимальное решение. Если грань образуется k вершинами $M_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i), i = 1, \dots, k$, то произвольная точка грани $M(x_1, x_2, x_3)$ представляется в виде выпуклой линейной комбинации точек M_i :

$$x_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_j^i, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{где } \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Учебный вопрос №4. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ (СОПРЯЖЕННАЯ) ЗАДАЧИ ЛП.

Прямая задача:

$$Z = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j \rightarrow \max; \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n$$

Сопряженная задача:

$$V = \sum_{i=1}^m c_i \cdot y_i \rightarrow \min; \quad \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot y_i \geq P_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, m$$

Покажем, что $\min V \geq \max Z$ для допустимых решений.

$$V = \sum_{i=1}^m c_i \cdot y_i \geq \sum_{i=1}^m y_i \cdot \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot y_i \geq \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j = Z$$

Итак, $V \geq Z \quad \forall y_i, \forall x_j$, откуда $\min V \geq \max Z$.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №2.

Учебный вопрос №1. ОПОРНЫЙ ПЛАН И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Выведем одно важное свойство допустимых решений.

Пусть x_1^0, \dots, x_n^0 и y_1^0, \dots, y_m^0 – допустимые решения задачи ЛП.

Подставим их в балансовые условия. Выбрав нужным образом нумерацию, получим:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j^0 = c_i, i = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j^0 < c_i, i = k+1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot y_i^0 = P_j, j = 1, \dots, s; \quad \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot y_i^0 > P_j, j = s+1, \dots, n$$

Если при этом $x_{s+1}^0 = \dots = x_n^0 = 0$ и $y_{k+1}^0 = \dots = y_m^0 = 0$ то допустимые решения являются оптимальными.

Действительно, вычислим:

$$Z_0 = Z|_{x_j = x_j^0} = \sum_{j=1}^s P_j \cdot x_j^0 = \sum_{j=1}^s x_j^0 \cdot \sum_{i=1}^k b_{ij} \cdot y_i^0;$$

$$V_0 = Z|_{y_i = y_i^0} = \sum_{i=1}^k c_i \cdot y_i^0 = \sum_{i=1}^k y_i^0 \cdot \sum_{j=1}^s b_{ij} \cdot x_j^0;$$

Отсюда $V_0 = Z_0$. Учитывая, что $\min V \geq \max Z$, получим $\min V = V_0$ и

$\max Z = Z_0$, т. е. решения x_j^0 и y_i^0 – оптимальны. Покажем, что в проведенном рассуждении нужно полагать $k = s$. Так как n переменных x_1^0, \dots, x_n^0 связаны k балансовыми равенствами, то $n-k$ из них являются свободными и могут принимать произвольные значения. Мы предполагали, что $n-s$ $x_j^0 = 0$, следовательно, в общем случае $n-k \geq n-s \Rightarrow s \geq k$. С другой стороны, применительно к y_i^0 , имеем $m-s$ свободных переменных и $m-k$ $y_i^0 = 0$, откуда $m-s \geq m-k \Rightarrow k \geq s$. Таким образом, $k = s$.

Докажем теперь, что если x_1^0, \dots, x_n^0 и y_1^0, \dots, y_m^0 — искомые оптимальные решения задачи ЛП и при этом ? балансовых условий выполняются в виде равенств (как прямой, так и двойственной задачи ЛП), то $x_{k+1}^0 = \dots = x_n^0 = 0$ и $y_{k+1}^0 = \dots = y_m^0 = 0$.

Пусть это не так, т. е. какое-либо $y_i^0 > 0$ ($k+1 \leq i \leq m$), тогда

$$V_0 = \sum_{i=1}^m c_i \cdot y_i^0 > \sum_{i=1}^m y_i^0 \cdot \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j^0 = \sum_{j=1}^n x_j^0 \cdot \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot y_i^0 = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j^0 = Z_0;$$

В то время как при $y_i^0 = 0$ $V_0 = Z_0 = \min V = \max Z$.

Следовательно, в данном случае либо V_0 не дошло до своего min, либо Z_0 до своего max, т. е. либо $V_0 > \min V$ либо $Z_0 < \max Z$, что противоречит предположению об оптимальности решений.

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть $m < n$ и канонический вид получен из стандартного, как это сделано выше. Пусть, кроме того, m положительных величин допустимого решения (x_1^0, \dots, x_{n-m}^0) имеют индексы от 1 до n , а остальные $x_j = 0$. Тогда из (*)

получим $\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j = c_i, i = 1, \dots, m$, т. е. m балансовых условий стандартной задачи выполнены

в виде равенств и, следовательно, в силу основного свойства оптимальных решений задачи ЛП наше допустимое решение является оптимальным.

Теперь без доказательства будем утверждать, что оптимальным решением является одно из базисных и, кроме того, что базисные решения являются вершинами выпуклого многогранника, ограничивающего область допустимых решений, причем количество этих вершин конечно. Таким образом, перебирая всевозможные базисные решения мы, в конце концов, выйдем на оптимальное.

Будем предполагать в дальнейшем, что среди балансовых условий не содержится зависимых соотношений, отличных друг от друга, т. е. ранг матрицы $\|b_{ij}\|$ равен m и, следовательно существует m линейно независимых столбцов матрицы $\|b_{ij}\|$.

Пусть базисное решение известно и нумерация выбрана так, что

$$x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0; \quad x_{n+1}^0 > 0; \dots; \quad x_{n+m}^0 > 0$$

Перейдем от этого базисного решения к другому так, чтобы ΔZ было > 0 и было max. В качестве линейно независимых столбцов матрицы выберем:

????????????????????

Действительно, $\|b_{i,n+1}\| \cdot x_{n+1} + \dots + \|b_{i,n+m}\| \cdot x_{n+m} \cdot \|I\|$

($\|...\|$ --вектор-столбцы здесь), $I = 1, \dots, m$. Имеем систему m уравнений с m неизвестными. Возможны следующие случаи. Разложим по ним, как по базису, остальные столбцы $b_{ik}, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$:

$$b_{ik} = \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot \lambda_{jk} \text{ для каждого фиксированного } k.$$

При базисном решении балансовые условия принимают вид:

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot x_j^0 = c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Прибавим к ним следующее соотношение:

$$\theta - \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot \lambda_{jk} + b_{ik} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\theta > 0$ --произвольная константа.

{-----}

Итак, мы доказали основное свойство оптимальных решений задачи ЛП: оптимальные решения задачи ЛП содержат, по крайней мере, столько нулевых значений величин x_j^0, y_i^0 , сколько балансовых условий выполняется в виде строгих неравенств. Остальные величины, как правило, положительны.

Если число нулевых величин x_j^0, y_i^0 больше, чем $n-k$, соответственно $m-k$, то задача ЛП называется вырожденной. Мы будем рассматривать только невырожденные задачи ЛП. В невырожденном случае оптимальное решение задачи ЛП имеет столько положительных значений величин x_j^0, y_i^0 , сколько балансовых условий выполнено в виде равенств, остальные x_j^0, y_i^0 равны 0.

Учебный вопрос №2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП. (Метод последовательного улучшения плана- Данциг).

Любой метод решения задачи ЛП сводится к перебору вершин выпуклого многогранника. Но число вершин может быть огромно, поэтому перебор необходимо упорядочить.

Задачу ЛП можно сформулировать в так называемом каноническом виде.

$$Z = \sum_{j=1}^{n+m} P_j \cdot x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} b_{ij} \cdot x_j = c_i; \quad i = 1, \dots, m \quad (*)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n+m$$

Действительно, если задача ЛП задана в стандартном виде :

$$Z = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j \leq c_i; \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n,$$

то вводятся дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ и балансовые условия записываются в виде:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = c_i,$$

P_{n+i} при этом полагаем равными нулю.

Применительно к такой записи задачи ЛП введем понятие базисного решения, или опорного плана.

Опр. Допустимое решение задачи ЛП называется базисным, если оно содержит ровно m положительных величин из набора (x_1^0, \dots, x_m^0) и n нулевых.

{-----}

$$\text{Получим } \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot (x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk}) + b_{ik} \cdot \theta = c_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если θ выбрать так, чтобы $x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk} \geq 0$, то величины

$$\begin{cases} x_j = x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk}, & n+1 \leq j \leq n+m \\ x_k = 0, & 0 \leq k \leq m \\ x_l = 0, & 0 \leq l \leq n \wedge l \neq k \end{cases} \quad (*)$$

для каждого фиксированного k будут допустимым решением задачи ЛП.

А если, кроме того, выбором добьемся того, чтобы только одно из

$x_j, n+1 \leq j \leq n+m$ обращалось в 0, а остальные $x_j > 0$, то получим новый опорный план.

Вычислим приращение функции Z при переходе от одного опорного плана к другому:

$$Z = \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot (x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk}) + P_k \cdot \theta = Z^0 + \theta \cdot (P_k - Z_k), \text{ где}$$

$$Z^0 = \sum_{j=n+1}^{n+m} P_j \cdot x_j^0; \quad Z_k = \sum_{j=n+1}^{n+m} P_j \cdot \lambda_{jk}.$$

Итак, $\Delta Z = Z - Z^0 = \theta \cdot (P_k - Z_k)$, т. е. из всех разностей $P_k - Z_k > 0$ надо выбрать такую $P_{k_0} - Z_{k_0} > 0$, чтобы она равнялась $\max_k (P_k - Z_k)$.

Приходим к следующему алгоритму симплексного метода:

Исходя из известного базисного решения

$$x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0; \quad x_{n+1}^0 > 0; \dots; x_{n+m}^0 > 0$$

1. Образует разложение $b_{ik} = \sum_{j=n+1}^{n+m} b_{ij} \cdot \lambda_{jk}$, или в матричном виде:

$$\|b_{ik}\| = \|b_{ij}\| \cdot \|\lambda_{jk}\|, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, m; \quad j = n+1, \dots, n+m$$

$$\text{Откуда } \|\lambda_{jk}\| = \|b_{ij}\|^{-1} \cdot \|b_{ik}\| = \|B_{ij}\| \cdot \|b_{ik}\|, \text{ где } \|B_{ij}\| = \|b_{ij}\|^{-1}.$$

2. Вычислим $Z_k = \sum_{j=n+1}^{n+m} P_j \cdot \lambda_{jk}$.

В матричном виде: $\|Z_k\| = \|P_j\| \cdot \|\lambda_{jk}\|$.

3. Найдем $\max_k (P_k - Z_k) = P_{k_0} - Z_{k_0}$, тем самым определим $k = k_0$, причем $P_{k_0} - Z_{k_0} > 0$.

4. Так как $x_j = x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk} = 0$ при $\theta = \frac{x_j^0}{\lambda_{jk}} > 0$, то среди элементов k_0 столбца матрицы $\|\lambda_{jk}\|$

выберем только положительные и составим отношения $\frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}}$.

$$\text{при } j = j_0 \quad \frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}} - \theta = 0;$$

$$\text{при } j \neq j_0 \quad \frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}} - \theta \geq 0;$$

5. Найдем $\min_j \frac{x_j^0}{\lambda_{jk_0}} = \frac{x_{j_0}^0}{\lambda_{j_0 k_0}}$ и положим его равным 0. В силу невырожденности рассматриваемой задачи ЛП x_{j_0} будет равным 0, а остальные $x_j > 0$ (но не ≥ 0), т. е. \min единственен.

Таким образом, выражения (*) действительно задают новый опорный план. При этом функция Z увеличилась на величину $\Delta Z = \theta \cdot (P_{k_0} - Z_{k_0})$.

Повторяя данный алгоритм, мы можем на некотором шаге столкнуться со следующими случаями:

1. Все $P_k - Z_k \leq 0$; это означает, что оптимальное решение получено на предыдущем шаге.

2. Среди $P_k - Z_k$ имеются положительные. Тогда, если среди соответствующих λ_{jk} есть положительные, то можно сделать еще один шаг и улучшить решение, если же все $\lambda_{jk} < 0$, то $\max Z = 0$, и оптимального решения не существует.

Действительно, если $\lambda_{jk} < 0$, то $x_j = x_j^0 - \theta \cdot \lambda_{jk} > 0 \quad \forall \theta > 0$ и следовательно $Z = Z_0 + \theta \cdot (P_k - Z_k)$ может неограниченно возрастать с ростом θ .

Учебный вопрос №3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

Нахождение базисного решения задачи ЛП.

1. Пусть задача ЛП задана в виде:

$$Z = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j \leq c_i; \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n,$$

Если при этом все $c_i > 0$, то, введя дополнительные переменные x_{n+i} , получим:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = c_i, \quad \text{откуда имеем следующее базисное решение: } x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$$

$$x_{n+i}^0 = c_i; \quad i = 1, \dots, m.$$

2. В более общем случае рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$Z = \sum_{j=1}^n P_j \cdot x_j \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j = c_i; \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n, \quad (n > m).$$

Причем можем считать, что $c_i \geq 0$.

Рассмотрим также вспомогательную задачу:

$$\tilde{Z} = -(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n+m$$

При $c_i > 0$ базисное решение этой задачи: $x_1 = \dots = x_n = 0, \quad x_{n+i} = c_i$.

Если $\max \tilde{Z} = 0$, то оптимальное решение вспомогательной задачи является базисным решением исходной. Действительно, $\max \tilde{Z} = 0$ при $x_{n+i} = 0$, а остальные переменные x_1, \dots, x_n содержат ровно m положительных величин и удовлетворяют балансовым и граничным условиям исходной задачи. Если $\max \tilde{Z} < 0$, то исходная задача не имеет ни одного базисного решения. В самом деле, если бы исходная задача имела базисное решение, то при нем $\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j^0 = c_i$ и, следовательно, из балансовых условий вспомогательной задачи

получили бы $x_{n+i} = 0$, т. к. x_j ненулевые уже стоят в $\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot x_j$. Таким образом, $\tilde{Z} < 0$, что противоречит исходному предположению.

Лекции составил:
полковник В. Дегодюк.

ЗАНЯТИЕ №1.

Основные понятия алгебры логики.

Учебные вопросы:

1. Булевы функции.
2. Базис и изображающие числа булевых функций.
3. Операции над изображающими числами.
4. Нахождение явного вида булевой функции по изображающему числу.

ЗАНЯТИЕ №2.

Применение алгебры логики для решения задач обработки информации.

Учебные вопросы:

1. Логическая зависимость и независимость высказываний.
2. Решение системы булевых уравнений.
3. Применение перестановочной матрицы.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №1.

Учебный вопрос №1. БУЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ.

Алгеброй называется непустое множество элементов вместе с заданным набором операций, которые можно совершать над элементами, не выходя за пределы множества.

Элементами алгебры логики являются высказывания. Высказывание—законченное предложение, про которое можно сказать истинно оно или ложно. Будем обозначать высказывания заглавными латинскими буквами A, B, C, \dots

В алгебре логики определены три операции:

1. Логическое сложение (дизъюнкция)—соответствует объединению высказываний союзом “или”. Обозначается $A + B, A \vee B$. Читается “ A или B ”. $A + B$ истинно, если истинно хотя бы одно из высказываний A или B .
2. Логическое умножение (конъюнкция)—соответствует объединению высказываний союзом “и”. Обозначается $A \cdot B, A \wedge B$. Читается “ A и B ”. $A \cdot B$ истинно, когда истинны A и B .
3. Отрицание--одноместная операция. Обозначается \bar{A} . Читается “не A ”. \bar{A} истинно, когда A ложно.

В результате применения операций 1-3 к какому-либо исходному набору элементов A, B, C, \dots получаются сложные высказывания, которые называются булевыми функциями от соответствующих аргументов: $f(A, B, C, \dots); X(A, B, C, \dots)$ и т. д.

Рассмотрим некоторые булевы функции:

1. Импликация: $\bar{A} + B$

Допустим, что $\bar{A} + B$ истинное высказывание, тогда, если A --истинно, то и B также истинно, если B ложно, то A --тоже ложно. Однако, если B истинно, то A может быть как истинно, так и ложно. Читается “если A то B ”, или “из A следует B ”. Записывается $A \rightarrow B$.

2. Эквивалентность: $A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Пусть это высказывание истинно, тогда A и B имеют одинаковые значения истинности, т. е. A и B либо оба истинны, либо оба ложны. Читается “ A эквивалентно B ”, Записывается $A = B$.

3. Тавтология—всегда истинная булева функция при любых комбинациях значений истинности аргументов:

Все тавтологии обозначаются I , поэтому $A + \bar{A} = I; \bar{A} \cdot B + B = I$

Вместе с этим символ I используется для обозначения связей между элементами:

$$\bar{A} + B = I; \text{-- это то же, что и } A \rightarrow B;$$

$$A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = I \text{--означает эквивалентность } A = B.$$

Отрицание I , т. е. $\bar{I} = 0$ --тавтологически ложный элемент.

Правила булевой алгебры.

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $A + A = A;$ | 7. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C;$ | 14. $A \cdot 0 = 0;$ |
| 2. $A \cdot A = A;$ | 8. $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C);$ | 15. $A + \bar{A} = I;$ |
| 3. $A + B = B + A;$ | 9. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B};$ | 16. $A \cdot \bar{A} = 0;$ |
| 4. $A \cdot B = B \cdot A;$ | 10. $\overline{\bar{A} \cdot B} = \bar{A} + \bar{B};$ | 17. $A + \bar{A} \cdot B = A + B;$ |
| 5. $(A + B) + C = A + (B + C) =$
$= A + B + C;$ | 11. $A + I = I;$ | 18. $A + A \cdot B = A;$ |
| 6. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) =$
$= A \cdot B \cdot C;$ | 12. $A \cdot I = A;$ | 19. $A \cdot \bar{B} + C \cdot B =$
$= A \cdot \bar{B} + C \cdot B + A \cdot C;$ |
| | 13. $A + 0 = A;$ | 20. $\overline{\bar{A}} = A;$ |

Учебный вопрос №2. БАЗИС И ИЗОБРАЖАЮЩИЕ ЧИСЛА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ.

Булева функция считается заданной, если мы можем указать значения истинности этой функции при всех возможных комбинациях значений истинности входящих в нее элементов.

Таблица чисел, которая представляет все возможные комбинации значений истинности заданного набора элементов A, B, C, \dots называется базисом для этих элементов. Строка этой таблицы, соответствующая, например, элементу A , называется изображающим числом A и обозначается $\#A$. Обозначим 1—истина, 0—ложь, тогда для одного элемента $\#A = 01$; для двух $\#A = \overset{0\ 1\ 2\ 3}{0101}$; 2^0

$$\#B = 0011; 2^1 \text{ и т. д.}$$

Для n элементов базис будет содержать 2^n столбцов. Колонки базиса можно занумеровать теми двоичными числами, которые представляют сами колонки. Если номера колонок упорядочены по возрастанию слева направо, то базис называется стандартным:

$0, 1, \dots, 2^n - 1$ и обозначается $\mathcal{H}[A, B, C, \dots]$.

Учебный вопрос №3. ОПЕРАЦИИ НАД ИЗОБРАЖАЮЩИМИ ЧИСЛАМИ.

1. $\#(A + B) = \#A + \#B$ поразрядно, без переноса в старшие разряды, по правилу: $0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 1$.

В базисе $\mathcal{H}[A, B]$ $\#A = 0101; \#B = 0011; \#(A + B) = 0111;$

2. $\#(A \cdot B) = \#A \#B$. Поразрядно по правилу: $0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1$; $\#(A + B) = 0001$.

3. $\#(\overline{A}) = (\overline{\#A})$ поразрядно по правилу: $\overline{0} = 1; \overline{1} = 0$.

Теперь можно вычислять изображающие числа функции $f(A, B, C, \dots)$ по отношению к базису $\mathcal{H}[A, B, C, \dots]$, например:

$$\begin{aligned} \#((A \cdot B) + \overline{B} \cdot C) &= (\#A) \cdot (\#B) + (\overline{\#B}) \cdot (\#C) = 01010101 \cdot 00110011 + \\ &+ 11001100 \cdot 00001111 = 00010001 + 00001100 = \underset{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}{00011101} \end{aligned}$$

номера колонок базиса

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	1	0	1	0	1	0	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	0	0	0	1	1	1	1

Следовательно, данная функция истинна только при таких комбинациях значений истинности элементов A, B, C , которые соответствуют 3, 4, 5 и 7 столбцам базиса.

Изображающим числом I является $\#I = 11..11$, а $0 \rightarrow \#0 = 00..0$.

Заметим, что $X = Y$ тогда и только тогда, когда $\#X = \#Y$ и $X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда $\#Y$ имеет единицы, по крайней мере, в тех разрядах, в которых $\#X$ содержит единицы (или $\#\overline{X} + \#Y = \#I$).

Учебный вопрос №4. НАХОЖДЕНИЕ ЯВНОГО ВИДА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПО ИЗОБРАЖАЮЩЕМУ ЧИСЛУ.

а). Представление булевой функции в дизъюнктивной нормальной форме.

Составим всевозможные, так называемые, элементарные произведения для трех элементов A, B и C и выпишем их изображающие числа $\mathcal{H}[A, B, C]$:

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	1	0	1	0	1	0	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	0	0	0	1	1	1	1

$$\#(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 10000000; \quad \#(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = 00001000;$$

$$\#(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 01000000; \quad \#(A \cdot \bar{B} \cdot C) = 00000100;$$

$$\#(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) = 00100000; \quad \#(\bar{A} \cdot B \cdot C) = 00000010;$$

$$\#(A \cdot B \cdot \bar{C}) = 00010000; \quad \#(A \cdot B \cdot C) = 00000001;$$

ДНФ булевой функции является суммой элементарных произведений, причем суммировать нужно те произведения, изображающие числа которых имеют единицы в тех же разрядах, что и изображающее число булевой функции. Например,

$$00011101 = \#(A \cdot B \cdot \bar{C}) + \#(A \cdot \bar{B} \cdot C) + \#(A \cdot B \cdot C) = \#(A \cdot B + \bar{B} \cdot C)$$

б) Представление булевой функции в конъюнктивной нормальной форме.

Составим всевозможные элементарные суммы для A, B и C и выпишем их изображающие числа:

$$\#(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = 11111110; \quad \#(\bar{A} + \bar{B} + C) = 11101111;$$

$$\#(A + \bar{B} + \bar{C}) = 11111101; \quad \#(A + \bar{B} + C) = 11011111;$$

$$\#(\bar{A} + B + \bar{C}) = 11111011; \quad \#(\bar{A} + B + C) = 10111111;$$

$$\#(A + B + \bar{C}) = 11110111; \quad \#(A + B + C) = 01111111;$$

$$\begin{aligned} 00011101 &= \#((A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C})) = \\ &= \#((A + (B + C)) \cdot (\bar{A} + (B + C)) \cdot ((A + \bar{B}) + C) \cdot ((A + \bar{B}) + \bar{C})) = \\ &= \#((B + C) \cdot (A + \bar{B})) = \#(A \cdot \bar{B} + A \cdot C + C \cdot \bar{B}) = \#(A \cdot B + \bar{B} \cdot C). \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ №2.

Учебный вопрос №1. ЛОГИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

Опр. n булевых функций

$$f_1(A, B, C, \dots), \dots, f_n(A, B, C, \dots)$$

$$f_1(A_1, A_2, \dots, A_m), \dots, f_n(A_1, A_2, \dots, A_m); n \leq m$$

независимы, если при всех возможных значениях аргументов A, B, C, \dots они могут принимать все 2^n комбинаций значений истинности. В противном случае функции зависимы (функции всегда зависимы при $n > m$).

Чтобы установить, зависимы или нет функции f_1, f_2, \dots, f_n , нужно относительно $H[A, B, C, \dots]$ вычислить:

$$\# f_1(A, B, C, \dots) = **...**$$

.....

$$\# f_n(A, B, C, \dots) = **...**, \text{ где } * = 0 \vee 1$$

Колонки набора (*) будем рассматривать как двоичные числа. Тогда, если в наборе содержатся все 2^n чисел от 0 до $2^n - 1$, то функции независимы, в противном случае зависимы.

Рассмотрим следующий пример:

$$f_1 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}, \quad \# f_1 = \overset{1}{1} \overset{2}{0} \overset{2}{1} \overset{1}{0} \overset{1}{1}$$

$$f_2 = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B, \quad \# f_2 = 0110$$

	i	0	1	2	3
Базис для двух элементов: A		0	1	0	1
B		0	0	1	1

В наборе нет чисел 0 и 3, поэтому $f_1(A, B)$ и $f_2(A, B)$ --зависимы. Найдем явный вид зависимости этих функций в форме $F(f_1, f_2) = 1$. Отсутствие чисел 0 и 3 говорит о том, что f_1 и f_2 --не могут принимать значения нулевого и третьего столбцов базиса $H[f_1, f_2]$.

Положим, $\#F(f_1, f_2) = \overset{0}{0} \overset{1}{1} \overset{2}{1} \overset{3}{1} = \#(f_1 \cdot \overline{f_2} + \overline{f_1} \cdot f_2)$ относительно $H[f_1, f_2]$, откуда имеем $f_1 \cdot \overline{f_2} + \overline{f_1} \cdot f_2 = I$. Действительно, $\#f_1 \# \overline{f_2} + \# \overline{f_1} \# f_2 = 1001 \cdot 1001 + 0110 \cdot 0110 = 1111 H[A, B]$.

Итак, для построения $\#F$ в базисе $H[f_1, f_2, \dots, f_n]$ необходимо в те разряды $\#F$, номера которых содержатся в наборе (*) поставить единицы, а в остальные -- нули, или, другими словами, F принимает значение "истина" для всех возможных комбинаций значений истинности функций f_1, f_2, \dots, f_n и значение "ложь" для комбинаций, которых вообще не может быть, поэтому $F(f_1, f_2, \dots, f_n) = I$ для всех возможных комбинаций значений истинности высказываний A, B, C, \dots

Учебный вопрос №2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ.

Примеры:

1). $X \cdot (A + B) = A \cdot B$
 $\#(A + B) = 0111; \#A \cdot B = 0001;$
 $\#X \cdot 0111 = 0001 \Rightarrow \#X = \times 001; \times$ --либо 0, либо 1,

отсюда: $X = A \cdot B$ или $X = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

2). $X \cdot (A + B) \rightarrow A \cdot B; \#X = \times 00 \times$, отсюда
 $\#X \cdot 0111 = 000 \times;$
 $X = A \cdot B; \overline{A} \cdot \overline{B}; 0; A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

Заметим, что уравнение в форме импликации всегда можно записать как соотношение эквивалентности:

$$\overline{X \cdot (A + B) + A \cdot B} = I \text{ или } \overline{\overline{X} + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B} = I$$

Общий подход к решению булевых уравнений рассмотрим на следующем примере:

$$A + B \cdot X \cdot \overline{Y} + C \cdot Y = \overline{A} \cdot \overline{X} \cdot \overline{Y} + \overline{B} \cdot \overline{X} + C + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Составим таблицу:

Таблица 1

	Изображающие числа коэффициентов относит. $H[A, B, C]$	Изображающие числа неизвестных относит. $H[X, Y]$:
		$\#X = 0101$ $\#Y = 0011$
Левая часть уравнения	$i=01234567$ $\#A = 01010101$ $\#B = 00110011$ $\#C = 00001111$	$j=0123$ $\#I = 1111$ $\#X \cdot \overline{Y} = 0100$ $\#Y = 0011$
Правая часть уравнения	$\#\overline{A} = 10101010$ $\#\overline{B} = 11001100$ $\#(C + A \cdot B) = 00011111$	$\#\overline{X} \cdot \overline{Y} = 1000$ $\#\overline{X} = 1010$ $\#I = 1111$

Найдем # X и # Y относительно $\{A, B, C\}$:

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7
# X	1,1	0,0	0,1	0,1,0,1	0,1	0,1,0,1	1,0,1	0,1,0,1
# Y	0,1	0,1	1,1	0,0,1,1	1,1	0,0,1,1	0,1,1	0,0,1,1

При $i=0$ для пары $(X, Y) = (0,0)$ имеем $(0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ для левой части уравнения, а для

правой $(1\ 1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$; $0 \neq 1$; для этой пары уравнение не удовлетворяется;

Для пары $(1,0)$ ($j=1$) $(0\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; $(1\ 1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$; $0 = 0$; уравнение удовлетворяется.

Запишем эту пару в таблицу 2 и т. д. Окончательно получим $2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 4$ пар решений исходного уравнения. Запишем теперь решения задачи в матричной форме:

$$\begin{matrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 2\ 0\ 1\ 0 \\ 3\ 1\ 1\ 0 \\ 4\ 0\ 0\ 1 \\ 5\ 1\ 0\ 1 \\ 6\ 0\ 1\ 1 \\ 7\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} j\ 0\ 1\ 2\ 3 \\ \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} i\ j\ 0\ 1\ 2\ 3 \\ 0\ \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 4\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 5\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 6\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ 7\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = (c_{ij}) \quad \text{для левой части}$$

$$\begin{matrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} j\ 0\ 1\ 2\ 3 \\ \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} i\ j\ 0\ 1\ 2\ 3 \\ 0\ \begin{pmatrix} 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 5\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 6\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 7\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = (d_{ij}) \quad \text{для правой части}$$

Для каждого i ищем j , при котором $(c_{ij}) = (d_{ij})$ и по $[X, Y]$ находим пару (X, Y) , удовлетворяющую нашему уравнению.

При решении системы из "n" булевых уравнений проверяется "n" равенств $(c_{ij}^k) = (d_{ij}^k)$, $k=1, \dots, n$ -- номер уравнения. Если все "n" равенств выполняются, то, как и раньше, по j находим изображающие числа переменных.

Замена переменных осуществляется посредством соотношений:
 $A = A(A', B', C', \dots); B = B(A', B', C', \dots); C = C(A', B', C', \dots); \dots$

Функции перехода независимы.

Например, $A = A' \cdot B' + \overline{A'} \cdot \overline{B'}$; $\# A = \overset{3}{1} \overset{0}{0} \overset{2}{0} \overset{1}{1}$ относительно $[A', B']$
 $B = \overline{A'}$; $\# B = 1010$

Функции $A(A', B')$ и $B(A', B')$ независимы, следовательно, данное преобразование допустимо.

Пусть задана функция $F(A, B, C, \dots)$. Требуется найти функцию $G_1(A', B', C', \dots) = F_1(A(A', B', C', \dots), B(A', B', C', \dots), \dots)$. Для нахождения $\# G_1(A', B', C', \dots)$ вычисляются изображающие числа $\# A, \# B, \# C, \dots$ по отношению к $h[A', B', C', \dots]$ и производятся над ними действия, задаваемые $F_1(A, B, C, \dots)$.

В более общем случае требуется одновременно преобразовать несколько функций, например, $F_1(A, B, C, \dots)$ и $F_2(A, B, C, \dots)$ от переменных A, B, C, \dots к переменным A', B', C', \dots

Замена переменных в функциях F_1 и F_2 эквивалентна переходу от $\# F_1$ и $\# F_2$, вычисленных относительно $h[A, B, C]$ к $\# G_1$ и $\# G_2$, вычисленных относительно $h[A', B', C', \dots]$. Этот переход сводится просто к перестановке столбцов в наборе

$$\begin{array}{l} \# F_1(A, B, C, \dots) \\ \# F_2(A, B, C, \dots) \end{array} \text{ так, что получается набор } \begin{array}{l} \# G_1(A', B', C', \dots) \\ \# G_2(A', B', C', \dots) \end{array}$$

Перестановка столбцов выполняется с помощью перестановочной булевой матрицы (R_{ij}) : $(F_{ki}) \cdot (R_{ij}) = (G_{kj}), k = 1, 2$

В нашем примере переход от A, B к A', B' приводит к следующему равенству:

$$i = 0123 \quad j = 0123$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (R_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Заметим, что столбец $i = 0$ переходит в столбец $j = 1$;

$i = 1 \rightarrow j = 3; i = 2 \rightarrow j = 2; i = 3 \rightarrow j = 0$, тогда

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная перестановочная матрица (R_{ij}) , содержащая ровно одну 1 в каждой строке и каждом столбце имеет обратную $(R_{ij})^{-1}$ равную транспонированной $(R_{ij})^T = (R_{ij})$. Тогда $(G_{ki}) \cdot (R_{ij}) = (F_{ki})$.

Лекции составил:
 подполковник В. Ярошенко.