МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВОЕННОЙ ПОДГОТОВКИ

Кафедра войск ПВО

«УТВЕРЖДАЮ»
Начальник военной кафедры Войск ПВО

полковник И. Калашников

«_____» ________________ 199___г.

Методическая разработка

для проведения занятий по разделу:

«Математические методы моделирования исследований боевых действий войск и анализа сложных систем (моделей операций)»

профиль ВУС 530700

ТЕМА: ***14 Метод динамики средних и его применения для исследования аналитических моделей динамики боевых действий***

ЗАНЯТИЕ: ***3÷6***

Обсуждена на заседании цикла 24

«__» __________ 1997 г.

ПРОТОКОЛ ____________________

Москва 1997 г.

Учебная и воспитательные цели:

Изучить возможность оценки эффективности взаимодействия двух противоборствующих группировок с использованием метода динамики средних, с использованием аналитических и статических моделей. Дать практику применения аналитических и статических моделей динамики боевых действий.

Воспитать у студентов чувство ответственности за этап разработки и построения моделей боя двух группировок, показать необходимость и важность данного этапа в задаче построения группировки ПВО.

Организационно-методические указания:

Сначала необходимо ознакомить студентов с математическим аппаратом, составляющим основу метода динамики средних. Затем рассмотреть две классические модели боя двух группировок и показать, как с помощью рассмотренного математического аппарата может быть описана динамика боя, то есть построенные аналитические модели боя. Целесообразно этот материал рассмотреть лекционно.

Затем, на групповых занятиях, необходимо дать практику в применении аналитических и статических моделей динамики боевых действий.

Занятия 3,4. Оценка боевых действий группировок с использованием аналитических моделей

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Научить студентов строить аналитические модели динамики боевых действий, дать практику в их использовании и анализа результатов работы модели.

Воспитать чувство ответственности за выполнение данного этапа работы.

Методика проведения занятия:

Начиная занятие, необходимо оговорить те ограничения и допущения, при которых возможно применения метода динамики средних для оценки результата боевых действий двух противоборствующих группировок с использованием аналитических моделей, а именно:

- каждая из группировок должна содержать однородные боевые единицы;
- боевые действия две группировки начинают одновременно;
- численность группировок не пополняется на протяжении всего боя.

Также могут присутствовать другие ограничения, связанные с конкретной задачей.

Далее необходимо дать постановку задачи, при этом целесообразно использование проектора со слайдом N «Постановка задачи».

После обдумывания к доске вызываются студенты, которые формализуют поставленную задачу, составляют алгоритм решения и получают результат по конкретным исходным данным.

При опросе студентов и их работы у доски необходимо добиться четких уставных взаимоотношений между студентами и преподавателем и между студентами. При ответе студентов прививать им методические навыки: четкое последовательное изложение материала, правильное использование доски, использование ТСО.

<u>Краткое содержание занятий 3,4.</u>

Учебный вопрос № 1.

Вычисление показателей эффективности боевых действий группировок с использованием моделей типа А.

Постановка задачи.

Группа самолетов красных в составе $\mathbf{N_1}$ единиц ведет бой с группой самолетов синих в составе $\mathbf{N_2}$ единиц. Самолеты красных обладают средней скорострельностью λ_1 выстрелов в минуту и поражают цели со средней вероятностью $\mathbf{P_1}$. Самолеты синих обладают средней скорострельностью λ_2 выстрелов в минуту и поражают цели со средней вероятностью $\mathbf{P_2}$. Если у одной группировки останется $\mathbf{N_i}\Delta$ единиц $(\mathbf{0} \le \Delta \le \mathbf{1})$, то группировка считается побежденной и бой заканчивается.

Определить:

1) победившую стороны $(\alpha = \mathbf{1,2})$
2) продолжительность боя $\mathbf{t_k}$
3) потери победившей стороны $\mathbf{Q}$.

Применение модели Ланчестера типа «А»

А) Допущения, применяемые при построении модели:

1) Каждая боевая единица производит случайный поток выстрелов.
2) Огонь является прицельным, каждый выстрел может поразить только одну единицу противника.
3) После поражения единицы огонь переносится на следующую.
4) Время полета снаряда не учитывается.
5) В любой момент времени боевая мощь группы самолетов пропорциональна математическому ожиданию числа сохранившихся боевых единиц.

Б) Вывод уравнений модели и получение решений.

$\mathbf{m_1(t)}$ - среднее число красных к моменту $\mathbf{t}$

$\mathbf{m_2(t)}$ - среднее число синих к моменту $\mathbf{t}$

$\Lambda_1 = \lambda_1 \mathbf{P_1}$ - средняя скорострельность успешных выстрелов боевых единиц красных

$\Lambda_2 = \lambda_2 \mathbf{P_2}$ - средняя скорострельность успешных выстрелов боевых единиц синих

Потери каждой стороны за $\Delta \mathbf{t}$ определяются:

$$\begin{matrix} \Delta \mathbf{m_1} = -\Lambda_2 \mathbf{m_2} \Delta \mathbf{t} \\ \Delta \mathbf{m_2} = -\Lambda_1 \mathbf{m_1} \Delta \mathbf{t} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \dfrac{\mathbf{dm_1}}{\mathbf{dt}} = -\Lambda_2 \mathbf{m_2} \\ \dfrac{\mathbf{dm_2}}{\mathbf{dt}} = -\Lambda_1 \mathbf{m_1} \end{matrix} \quad \text{, где } \mathbf{m_1(0)} = \mathbf{N_1}; \;\; \mathbf{m_2(0)} = \mathbf{N_2}$$

Для каждого нахождения решения системы дифференциальных уравнений продифференцируем каждое уравнение и заменим первые производные в правых частях их выражениями из соответствующих исходных уравнений.

Тогда для первого уравнения получим:

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = \Lambda_1 \Lambda_2 m_1$$

Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$m_1(t) = A_1 e^{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t}$$

Где A_1 и A_2 определяются из начальных условий:

$$m_1(0) = A_1 + A_2 = N_1$$

$$\frac{dm_1}{dt}\Big|_{t=0} = A_1 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - A_2 \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} = -\Lambda_2 m_2 = -\Lambda_2 N_2$$

Откуда:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(N_1 - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(N_1 + N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \right)$$

Следовательно:

$$m_1(t) = N_1 \mathrm{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \mathrm{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t$$

Аналогично:

$$m_2(t) = N_2 \mathrm{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t - N_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \mathrm{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t$$

Разделим первое уравнение на N_1, а второе на N_2 и введем следующие обозначения:

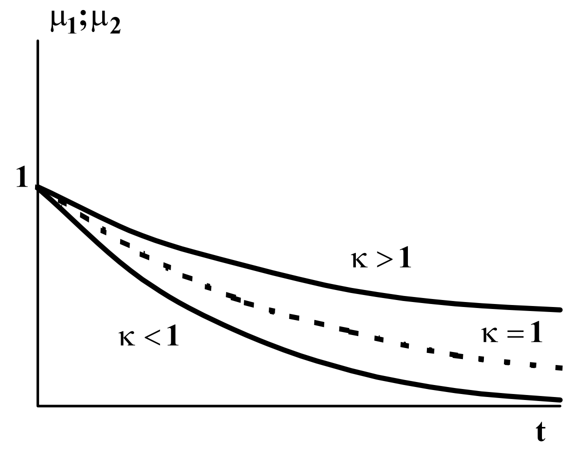
$$\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t = \tau \qquad \frac{m_1}{N_1} = \mu_1$$

$$\frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} = \kappa \qquad \frac{m_2}{N_2} = \mu_2$$

Окончательно получим следующие выражения для средних долей сохранившихся боевых единиц каждой стороны:

$$\mu_1 = \mathrm{ch}\tau - \frac{1}{\kappa} \mathrm{sh}\tau$$

$$\mu_2 = \mathrm{ch}\tau - \kappa \mathrm{sh}\tau$$



Из анализа полученных выражений для μ_1 и μ_2 следует:

1) Если $\kappa > 1$, то побеждает первая сторона
2) Если $\kappa < 1$, то побеждает вторая сторона
3) Если $\kappa = 1$, то боевая мощь каждой стороны убывает в равной степени («ничья»)
4) Продолжительность боя t_k определяется из уравнения для побежденной стороны:

$$ch\tau_k - k sh\tau_k = \Delta, \text{ где } k = \max\{\kappa, \frac{1}{\kappa}\}$$

откуда

$$t_k = \frac{\tau_k}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}, \text{ где } \tau_k = \ln C, \; C = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} + \left(\frac{\Delta}{k-1}\right)^2} - \frac{\Delta}{k-1}$$

5) Потери победившей стороны определяются:

$$Q = 1 - \left(ch\tau_k - \frac{1}{k} sh\tau_k \right), \text{ т.к. } e^{\tau_k} = c \text{ (из 4), то } Q = 1 - \frac{C^2(k-1) + (k+1)}{2Ck}$$

Учебный вопрос № 2.

Вычисление показателей эффективности боевых действий группировок с использованием моделей типа Б.

При построении модели типа «Б» вводятся допущения, отличающиеся от допущения, применяющихся в модели «А»:

1) Каждая сторона не получает информации о пораженных единицах противника, поэтому не производится перенос огня.
2) Огонь каждой стороны распределяется равномерно по всем единицам противника (в том числе по уже пораженным), поэтому каждая непораженная единица поражается успешным выстрелом с вероятностью $\frac{m_j}{N_j}, \; (j = 1,2)$.

С учетом допущений, потери каждой стороны за время Δt определяются следующим образом:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 \frac{m_1}{N_1}$$
$$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1 \frac{m_2}{N_2}$$
, где $m_1(0) = N_1; \ \ m_2(0) = N_2$

В модели Б нагляднее под m_1 и m_2 понимать не доли сохранившихся боевых единиц, как в модели А, а доли не пораженных площадей плацдармов. Модель Б отличается от модели А более медленным убыванием доли сохранившихся сил.

Получение решений.

Представим уравнения в виде:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -U_2\mu_1\mu_2$$
$$\frac{d\mu_2}{dt} = -U_1\mu_1\mu_2$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_1}{N_1}; \ \mu_2 = \frac{m_2}{N_2}; \ U_1 = \frac{\Lambda_1 P_1 N_1}{N_2}; \ U_2 = \frac{\Lambda_2 P_2 N_2}{N_1};$$
$$\mu_1(0) = 1; \ \mu_2(0) = 1$$

Разделив 1-ое уравнение на 2-е, получим:

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = \frac{U_2}{U_1}; \ d\mu_2 = \frac{U_1}{U_2} d\mu_1$$

Откуда:

$$\mu_2 = \frac{U_1}{U_2}\mu_1 + C_1 \text{, где } C_1 = \frac{U_2 - U_1}{U_2}$$

Подставим выражение для μ_2 в первое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -U_2\mu_1\left(\frac{U_1}{U_2}\mu_1 + C_1\right) = -U_1\mu_1\left(\mu_1 + C_1\frac{U_2}{U_1}\right)$$

или

$$-\frac{d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = U_1 dt \text{, где } C_2 = \frac{U_2}{U_1}C_1 = \frac{U_2 - U_1}{U_1}$$

Умножив правую и левую части равенства на C_2 будем иметь:

$$-\frac{C_2 d\mu_1}{\mu_1(\mu_1 + C_2)} = C_2 U_1 dt$$

или

$$\frac{d\mu_1}{\mu_1 + C_2} - \frac{d\mu_1}{\mu_1} = C_2 U_1 dt$$

Откуда:

$$\ln(\mu_1 + C_2) - \ln\mu_1 = C_2 U_1 t + C_3 \text{, где } C_3 = \ln(1 + C_2)$$

или

$$\mathbf{ln}\left(\frac{\mu_1 + C_2}{\mu_1}\right) = \mathbf{C_2 U_1 t + ln(1 + C_2)}$$

или

$$\mathbf{1 + \frac{C_2}{\mu_1} = e^{C_2 U_1 t}(1 + C_2)}$$

Решив относительно μ_1, будем иметь:

$$\mu_1 = \frac{\mathbf{C_2}}{\mathbf{(1 + C_2)e^{C_2 U_1 t} + 1}} = \frac{\mathbf{U_2 - U_1}}{\mathbf{U_2 e^{(U_2 - U_1)t} - U_1}}$$

Аналогично можно получить выражение для μ_2, тогда окончательно будем иметь:

$$\mu_1 = \frac{\mathbf{U_2 - U_1}}{\mathbf{U_2 e^{(U_2 - U_1)t} - U_1}}$$

$$\mu_2 = \frac{\mathbf{U_1 - U_2}}{\mathbf{U_1 e^{(U_1 - U_2)t} - U_2}}$$

При $\mathbf{U_1 \to U_2 \to U}$ можно представить $\mathbf{e^{(U_2 - U_1)t} \approx 1 + (U_2 - U_1)t}$

Тогда $\mu_1 = \mu_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + Ut}}$

Из анализа полученных выражений для μ_1 и μ_2 следует:

1) Если $\mathbf{U_1 > U_2}$ - побеждает 1-я сторона
2) Если $\mathbf{U_1 < U_2}$ - побеждает 2-я сторона
3) Если $\mathbf{U_1 \cong U_2}$ - боевая мощь каждой стороны исчерпывается в равной степени
4) Продолжительность боя $\mathbf{t_k}$ можно найти из уравнения для побежденной стороны

   $\frac{\mathbf{V_1 - V_2}}{\mathbf{V_1 e^{(V_1 - V_2)t_k} - V_2}} = \Delta$ - минимальная доля единиц группировки, способной вести бой

   откуда

$$\mathbf{t_k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{V_1 - V_2}} \mathbf{ln}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{V_1}}\left(\frac{\mathbf{V_1 - V_2}}{\Delta} + \mathbf{V_2}\right)\right]$$

   где

$$\mathbf{V_1 = max(U_1, U_2)}$$

$$\mathbf{V_2 = min(U_1, U_2)}$$

5) Потери победившей стороны:

$$\mathbf{Q = 1 - \frac{V_2 - V_1}{V_2 e^{(V_2 - V_1)t_k} - V_1}}$$

Учебный вопрос № 3.

Учет упреждающего удара и использование резервов при моделировании боевых действий группировок.

В условиях поставленной задачи вводятся дополнительные сведения (модель А):

1) Красные и синие начинают бой группами самолетов, представляющими собой доли q_1 и q_2 от численностей N_1 и N_2.
2) Используя внезапность, первыми открывают огонь красные и спустя время t_{02} открывают огонь синие.
3) Красные через время $t_{1р}$ вводят в бой свой резерв из оставшихся боевых единиц равномерно в речении времени $T_{1р}$, а синие через время $t_{2р}$ вводят в бой свой резерв из оставшихся боевых единиц равномерно в течении времени $T_{2р}$, $(t_{2р} \ge t_{02})$.
4) Бой проигрывает та сторона, у которой останется меньше ΔN боевых единиц.

Определить заданные показатели.

Построение модели и выбор метода решения задачи.

Изменения численности каждой стороны за время Δt можно представить в виде:

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = n_1(t) - \Lambda_2(t)m_2(t)$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = n_2(t) - \Lambda_1(t)m_1(t)$$

где

$$m_1(0) = N_1 q_1$$

$$\Lambda_1(t) = \lambda_1 p_1$$

$$n_1(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < t_{1р} \text{ или } t > t_{1р} + T_{1р} \\ \dfrac{N_1(1-q_1)}{T_{1р}}, \text{ при } t_{1р} \le t \le t_{1р} + T_{1р} \end{cases}$$

$$m_2(0) = N_2 q_2$$

$$\Lambda_2(t) = \lambda_2 p_2$$

$$n_2(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < t_{2р} \text{ или } t > t_{2р} + T_{2р} \\ \dfrac{N_2(1-q_2)}{T_{2р}}, \text{ при } t_{2р} \le t \le t_{2р} + T_{2р} \end{cases}$$

При решении системы дифференциальных уравнений можно использовать численный метод Эйлера:

$$m_1(t+\Delta t) = m_1(t) + \frac{dm_1(t)}{dt}\Delta t$$

$$m_2(t+\Delta t) = m_2(t) + \frac{dm_2(t)}{dt}\Delta t$$

Учебный вопрос № 4.

Алгоритмы вычисления показателей эффективности боевых действий группировок с использованием аналитических моделей.

1. Алгоритм вычислений показателей эффективности для модели А.

Последовательность вычислений.

1) $\Lambda_1 = \lambda_1 P_1; \ \Lambda_2 = \lambda_2 P_2$

2) $\kappa = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$

3) $$\mathbf{k} = \begin{cases} 1 \ (\alpha = 0), \ \text{если} \ \kappa = 1 \\ \kappa \ (\alpha = 1), \ \text{если} \ \kappa > 1 \\ \frac{1}{\kappa} \ (\alpha = 2), \ \text{если} \ \kappa < 1 \end{cases}$$

4) $$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{\mathbf{k}+1}{\mathbf{k}-1} + \left(\frac{\Delta}{\mathbf{k}-1}\right)^2} - \frac{\Delta}{\mathbf{k}-1}$$

5) $$\mathbf{t_k} = \frac{\ln \mathbf{C}}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}$$

6) $$\mathbf{Q} = 1 - \frac{\mathbf{C}^2(\mathbf{k}-1) + (\mathbf{k}+1)}{2\mathbf{C}\mathbf{k}}$$

2. Алгоритм вычислений показателей эффективности для модели Б.

Последовательность вычислений.

1) $$\mathbf{U_1} = \frac{\Lambda_1 \mathbf{P_1} \mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}}; \ \mathbf{U_2} = \frac{\Lambda_2 \mathbf{P_2} \mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}}$$

2) $$\alpha = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ U_1 = U_2 \ \text{(ничья)} \\ 1 \ \text{при} \ U_1 > U_2 \ \text{(побеждает 1 - я сторона)} \\ 2 \ \text{при} \ U_1 < U_2 \ \text{(побеждает 2 - я сторона)} \end{cases}$$

3) $$\mathbf{V_1} = \begin{cases} U_1 \ \text{при} \ U_1 > U_2 \\ U_2 \ \text{при} \ U_1 < U_2 \end{cases}; \quad \mathbf{V_2} = \begin{cases} U_1 \ \text{при} \ U_1 < U_2 \\ U_2 \ \text{при} \ U_1 > U_2 \end{cases}$$

4) $$\mathbf{t_k} = \frac{1}{\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}} \ln\left[\frac{1}{\mathbf{V_1}}\left(\frac{\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}}{\Delta} + \mathbf{V_2}\right)\right]$$

5) $$\mathbf{Q} = 1 - \frac{\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2} e^{(\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1})\mathbf{t_k}} - \mathbf{V_1}}$$

Задание на самостоятельную работу.

В качестве задания на самостоятельную подготовку может быть предложено закончить построение алгоритмов счета показателей эффективности боевых действий группировок.

Занятия 5,6. Оценка эффективности боевых действий группировок с использованием статистических моделей

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Научить студентов строить статистические модели динамики боевых действий, дать практику в их использовании и анализа результатов моделирования.

Воспитать чувство ответственности за выполнение данного этапа работы.

Методика проведения занятия:

В начале занятия необходимо путем опроса студентов вспомнить классическую постановку задачи, при которой возможно использование аналитической модели динамики боевых действий. Далее проверяется выполнение домашнего задания.

Потом студенты с помощью наводящих вопросов преподавателя должны прийти к выводу ограниченности возможности применения аналитической модели. Преподаватель при активном участии студентов формулирует возможные отклонения от классической постановки задачи (неоднородность боевых единиц группировок, неодновременное начало боевых действий группировок, ввод резерва и т.д.)

Далее по конкретным примерам строятся статистические модели. Занятие является практическим, т.е. студенты самостоятельно разрабатывают алгоритм и составляют программы. Статистические модели предполагают множество возможных вариантов составления алгоритма, поэтому из ряда предлагаемых студентами вариантов выбирается наиболее оптимальный, который в дальнейшем и будет реализован.

ТСО используется для демонстрации наименования темы и обрабатываемых вопросов (слайд № ____), постановки задач, а также возможна демонстрация алгоритмов для поставленных задач, для сравнения с алгоритмами, разработанными в ходе занятий.

Работу аудитории необходимо построить таким образом, чтобы максимальное количество студентов поработало у доски, для чего необходимо алгоритм четко разделить на функционально законченные блоки, каждый из которых отрабатывает очередной вызываемый к доске студент.

При проведении занятий отрабатывается выполнение уставных требований:

при обращении к студенту по фамилии, он должен встать и сказать «Я», если фамилия студента не называется преподавателем, то студент должен сам представиться по фамилии, обращение к преподавателю по званию.

Краткое содержание занятий 5,6.

Учебный вопрос № 1.

Постановка задачи.

Группа самолетов красных в составе N_1 единиц ведет бой с группой самолетов синих в составе N_2 единиц. Самолеты красных обладают средней скорострельностью λ_{1j} выстрелов в минуту и поражают цели со средней вероятностью P_{1j}. Самолеты красных обладают средней скорострельностью λ_{2j} выстрелов в минуту и поражают цели со средней вероятностью P_{2j}, j - номер боевой единицы i -й группировки т.е. $j = 1,2,...,N_i$. Если у одной группировки останется $N_i\Delta$ единиц $(0 \le \Delta \le 1)$, то группировка считается побежденной и бой заканчивается.

Определить:

1) победившую стороны $(\alpha = 1,2)$
2) продолжительность боя t_k
3) потери победившей стороны Q.

В случае однородности боевых единиц i -ой группировки величины λ_{ij} и P_{ij} не зависят от j и могут быть использованы обозначения λ_i и P_i.

Учебный вопрос № 2.

Модель боя 2-х многочисленных группировок, содержащих однородные единицы (модель А).

Последовательность вычислений.

1) В начальный момент текущая численность каждой i -ой группировки $(i = 1,2)$ m_i полагается равной N_i.
2) Каждая группировка производит один выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$. Моменты времени выстрелов t_i фиксируются.
3) Находится самый ранний момент выстрела. Если $t_1 < t_2$, то самый ранний выстрел принадлежит первой группировке $(i = 1)$, в противном случае второй группировке.
4) Производится розыгрыш $(\xi < P_i)$, был ли самый ранний выстрел успешным.
5) Если самый ранний выстрел оказался успешным, то исключается одна любая непораженная единица у противника (т.е. m_{3-i} уменьшается на 1). Если $m_{3-i} < \Delta$, то бой заканчивается, производится подсчет оставшихся единиц и других показателей.
6) Производится i -ой группировкой (которая произвела последний выстрел) очередной выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$. Фиксируется момент выстрела t_i и действия повторяются, начиная с п. 3).

Учебный вопрос № 3.

Модель боя 2-х группировок, содержащих неоднородные единицы (модель А).

По каждой группировке задаются:

1) $N_1,\ N_2$ - начальные численности единиц каждой группировки.
2) $\lambda_{11},\ldots,\ \lambda_{1N_1};\ \lambda_{21},\ldots,\ \lambda_{2N_2}$ - плотность потоков выстрелов производимых каждой единицей каждой группировки.
3) $P_{11},\ldots,\ P_{1N_1};\ P_{21},\ldots,\ P_{2N_2}$ - вероятность поражения единицы противника каждой единицей каждой группировки.

Последовательность вычислений.

1) Каждая единица красных и каждая единица синих производит по одному выстрелу. Моменты времени фиксируются: $t_{11},\ldots,\ t_{1N_1};\ t_{21},\ldots,\ t_{2N_2}$.
2) Находится ранний момент выстрела для красных и ранний момент выстрела для синих: $t_{min_1} = t_{1c_1},\ (c_1 = 1,\ldots,N_1);\ t_{min_2} = t_{2c_2},\ (c_2 = 1,\ldots,N_2)$
3) Если $t_{min_1} < t_{min_2}$, то самый ранний выстрел принадлежит красным $(i = 1)$, иначе синим $(i = 2)$.
4) Производится розыгрыш $(\xi < P_i)$, был ли самый первый выстрел успешным.
5) Если самый ранний выстрел оказался успешным, то исключается одна, любая непораженная единица у противника (ее номер можно разыграть случайным образом, выбросив случайную величину равномерно распределенную на интервале от 1 до m_{3-i}). Если число оставшихся единиц у противника меньше ΔN_{3-i}, то бой заканчивается, производится подсчет оставшихся единиц и других показателей.
6) Производится один выстрел той единицей (c_i), которая произвела самый ранний выстрел. Фиксируется момент выстрела t_{ic_i} и действия повторяются, начиная с п. 2).

Учебный вопрос № 4.

Модель боя 2-х группировок, содержащих однородные единицы (модель Б).

Последовательность вычислений.

1) В начальный момент текущая численность каждой i -ой группировки $(i = 1,2)$ m_i полагается равной N_i.
2) Каждая группировка производит один выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$. Моменты времени выстрелов t_i фиксируются.
3) Находится самый ранний момент выстрела. Если $t_1 < t_2$, то самый ранний выстрел принадлежит первой группировке $(i = 1)$, в противном случае второй группировке.

4) Производится розыгрыш $(\xi < \frac{m_{3-i}}{N_{3-i}})$, был ли самый ранний выстрел произведен по еще не пораженной цели.
5) Если выполнилось условие 4), то производится розыгрыш $(\xi < P_i)$, был ли этот выстрел успешным.
6) Если самый ранний выстрел оказался успешным, то исключается одна любая непораженная единица у противника (т.е. m_{3-i} уменьшается на 1). Если $m_{3-i} < \Delta$, то бой заканчивается, производится подсчет оставшихся единиц и других показателей.
7) Производится i -ой группировкой (которая произвела последний выстрел) очередной выстрел с плотностью $\lambda_i m_i$. Фиксируется момент выстрела t_i и действия повторяются, начиная с п. 3).

Методическую разработку составил

подполковник В. Ярошенко

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВОЕННОЙ ПОДГОТОВКИ

Кафедра войск ПВО

«УТВЕРЖДАЮ»
Начальник военной кафедры Войск ПВО

полковник И. Калашников

«______» __________________ 199___г.

Методическая разработка

для проведения занятий по разделу:

«Математические методы моделирования исследований боевых действий войск и анализа сложных систем (моделей операций)»

профиль ВУС 530700

ТЕМА: 15 ***Методы линейного программирования в задачах организации боевой деятельности войск***

ЗАНЯТИЕ: ***3÷6***

Обсуждена на заседании цикла 24

«__» ____________ 1997 г.

ПРОТОКОЛ ______________________

Москва 1997 г.

Учебная и воспитательная цели:

Ознакомить студентов с классом задач, решение которых целесообразно осуществлять с использованием метода линейного программирования. Изучить способы решения задач линейного программирования. Дать практические навыки в применении аппарата линейного программирования для решения задач планирования боевой деятельности войск.

При проведении занятий добиваться от студентов четкости ответа, подтянутости, строгого выполнения уставных взаимоотношений.

Организационно-методические указания:

Линейное программирование (ЛП) - один из наиболее распространенный в исследовании операций методов. Методы ЛП широко используются для решения разнообразных задач в области техники, экономики и управления.

При исследовании операций в военном деле встречаются как стандартные задачи ЛП, решаемые симплекс-методом, так и некоторые особые виды задач ЛП, такие как транспортные задачи о назначении.

При изучении этой темы рассматриваются вопросы применения методов ЛП к решению задач распределения средств нападения по объектам удара (или средств обороны по средствам нападения противника).

На лекциях подробно излагаются основные положения теории ЛП, рассматриваются примеры из области применения метода для исследования эффективности применения боевой техники и организации боевых действий.

На групповых занятиях рассматриваются алгоритмы решения задач по распределению авиации по объектам противника с использованием симплекс-метода решения задач линейного программирования.

Перед рассмотрением учебных вопросов необходимо проверить степень усвоения студентами теоретических положений, изложенных в лекции, путем постановки следующих контрольных вопросов:

1) Постановка задачи и существование решения задачи ЛП.
2) Основное свойство решения задачи ЛП.
3) Прямая и двойственная задачи ЛП.
4) Общая идея симплекс-метода решения задач ЛП.

В ходе занятий необходимо добиться усвоения способов получения опорного и оптимального решения задачи ЛП, а также твердого навыка решении задач различными способами.

<u>Занятия 3,4. Использование модифицированных Жордановых исключений для решения задач ЛП.</u>

<u>Время:</u> 4 часа.

<u>Учебная и воспитательная цели:</u>

Ознакомить студентов с классом задач, решаемых с использование линейного программирования, изучить способ приведения задач линейного программирования к каноническому виду, изучить симплекс-метод решения задач ЛП.

Привить студентам четкость, подтянутость.

<u>Методика проведения занятия:</u>

Перед рассмотрением учебных вопросов необходимо проверить степень усвоения студентами теоретических положений, данных на лекциях, путем постановки следующих контрольных вопросов:

1) Постановка задачи ЛП и приведение ее к каноническому виду.
2) Свойства оптимального решения задачи ЛП.
3) Общая идея решения задачи ЛП симплекс-методом.

Затем студентам дается под запись содержательная постановка задачи о распределении авиации по объектам удара и, совместно со студентами, формулируется математическая постановка задачи. Вызванный к доске студент приводит задачу к каноническому виду.

Преподаватель рассказывает студентам об обыкновенных и модифицированных Жордановых исключениях как аппарате линейной алгебры, показывая на примерах возможность применения ОЖИ и МЖИ для получения обратной матрицы, решения систем уравнений и т. д.

После этого преподаватель объясняет как составляется симплекс-таблица решения задачи ЛП с применением аппарата МЖИ. Подробно рассматриваются действия с таблицей при получении как опорного, так и оптимального решения задачи ЛП. При этом в качестве иллюстрации необходимо использовать числовой пример поставленной задачи, вводя в него необходимые дополнительные балансовые условия.

Для закрепления изученного материала в конце занятия фиксируются этапы решения задачи:

- формирование симплекс-таблицы;
- получение опорного решения;
- получение оптимального решения;
- получение результата решения задачи и его интерпретация.

При проведении занятий используются слайды с наименованием темы занятий и изучаемых вопросов, а также слайды с постановкой задачи и правилами преобразования симплекс-таблицы.

При ответах студентов добиваться четкости и ясности изложения материала, строевой подтянутости, строгого выполнения уставных взаимоотношений, а также отрабатываются методические навыки правильного использования доски и ТСО.

В качестве задания на самостоятельную работу необходимо дать студентам 1-2 задачи ЛП и потребовать их решения.

Пример № 1

В комплект изготовляемой аппаратуры входят 2 узла 1-ого типа и один узел 2-го типа. Производство типовых узлов может быль поставлено на одном из пяти типов предприятий. Производственная мощность предприятия в течение планируемого периода и количество предприятий каждого типа приведены в таблице

Тип предприятия	Число предприятий	Производственная мощность одного предприятия	
		по узлу 1	по узлу 2
1	5	1000	150
2	3	4000	2000
3	40	200	25
4	9	2000	500
5	2	6000	2500

Определить: сколько предприятий каждого типа надо поставить на производство первого и сколько на производство второго типового узла, чтобы обеспечить максимальный выпуск комплектов аппаратуры.

Ответ: $\mathbf{x_{12} = x_{21} = x_{32} = x_{51} = 0,\ x_{11} = 5,\ x_{41} = 6,\ x_{22} = 3,}$

$\mathbf{x_{52} = 2,\ x_{31} = 40,\ x_{42} = 3}$

$\mathbf{L = 12500}$ - количество комплектов полностью собранной аппаратуры

Краткое содержание занятий 3,4.

Учебный вопрос № 1.

Постановка задачи о распределении авиации по объектам удара.

Постановка задачи

Планируется налет авиации на n объектов. В налете участвуют самолеты одного типа и каждому из них, назначенному на j-й объект, где $(j=1,\dots,n)$, выделяется b_j бомб и p_j ракет. После прорыва системы ПВО самолет наносит j-му объекту ущерб c_j. Общее количество средств - бомб (B), ракет (P) и самолетов (X) ограничено.

Требуется назначить на каждый j-й объект такое количество самолетов x_j, чтобы нанести противнику максимальный суммарный ущерб.

Математическая формулировка задачи ЛП.

Необходимо найти числа $x_j \geq 0$, максимизирующие функцию

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq X, \ \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq B, \ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq P$$

Учебный вопрос № 2.

Приведение задачи ЛП к каноническому виду.

Пусть есть m видов средств нападения. Если обозначить a_{ij} - число средств i-го типа, назначенных на j-й объект и A_i - общее число имеющихся средств i-го типа, то сформулированную задачу можно записать в общем виде:

максимизируется функция

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, \ (i=1,\dots,m)$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,\dots,n)$$

Приведем задачу ЛП к каноническому виду, для чего введем $\mathbf{m}$ зависимых переменных $\mathbf{y_1, y_2, ..., y_m}$. Мы получим задачу ЛП в виде:

максимизируется функция

$$\mathbf{z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

при ограничениях

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = A_i,\ (i = 1, ..., m)}$$

$$\mathbf{x_j \geq 0,\ (j = 1, ..., n)}$$

$$\mathbf{y_i \geq 0,\ (i = 1, ..., m)}$$

Поясним выполненные действия на примере. В условиях поставленной задачи зададим $\mathbf{n}$, а конкретные значения $\mathbf{b_j, p_j, c_j, B, P}$ и $\mathbf{X}$ определим таблицей:

$\mathbf{j=}$	1	2	3	Всего
$\mathbf{x_j}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	15
$\mathbf{b_j}$	5	3	2	100
$\mathbf{p_j}$	5	10	10	160
$\mathbf{c_j}$	5	10	12	___

В этом случае математическая постановка задачи ЛП запишется так:

максимизируется функция

$$\mathbf{z = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3}$$

при ограничениях

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 \leq 15}$$

$$\mathbf{5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100}$$

$$\mathbf{5x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 160}$$

$$\mathbf{x_j \geq 0,\ (j = 1,2,3)}$$

Введя три зависимых переменных $\mathbf{y_1, y_2, y_3}$ мы получим задачу ЛП, записанную в канонической форме с 6 неотрицательными переменными:

максимизируется функция

$$\mathbf{z = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3}$$

при ограничениях

$$\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 15}$$

$$\mathbf{5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + y_2 = 100}$$

$$\mathbf{5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + y_3 = 160}$$

$$\mathbf{x_j \geq 0,\ (j = 1,2,3)}$$

$$\mathbf{y_i \geq 0,\ (i = 1,2,3)}$$

Учебный вопрос № 3.

Жордановы исключения как метод линейной алгебры.

Пусть рассматривается система

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \ (i = 1, ..., m)$$

из m линейных форм с n независимыми переменными $x_1, x_2, ..., x_n$. Эта система может быть записана в виде таблицы:

	x_1	....	x_s	....	x_n
y_1	a_{11}	....	a_{1s}	....	a_{1n}
....	....	....	....	....	....
y_r	a_{r1}	....	a_{rs}	....	a_{rn}
....	....	....	...	....	....
y_m	a_{m1}	....	a_{ms}	....	a_{mn}

Определение: Шагом обыкновенного Жорданова исключения (ОЖИ), произведенным над таблицей, с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$, с r-й разрешающей строкой и s-м разрешающим столбцом называется схематизированная операция перемены ролями между зависимой переменной y_r и независимой x_s, т.е. операция решения уравнения $y_r = a_{r1}x_1 + ... + a_{rs}x_s + ... + a_{rn}x_n$ относительно x_s, подстановки его во все остальные уравнения системы и записи полученной системы в виде новой таблицы, аналогичной исходной. Легко убедится, что новая таблица имеет вид:

	x_1	....	y_r	....	x_n
y_1	b_{11}	....	a_{1s}	....	b_{1n}
....	....	....	....	....	....
x_s	$-a_{r1}$	....	1	....	$-a_{rn}$
....	....	....	...	....	....
y_m	b_{m1}	....	a_{ms}	....	b_{mn}

$:a_{rs}$

где $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$, причем все элементы таблицы следует разделить на a_{rs}.

Действительно, если $a_{rs} \neq 0$, то

$$x_s = \frac{-\sum_{j=1}^{s-1} a_{rj}x_j + y_r - \sum_{j=s+1}^{n} a_{rj}x_j}{a_{rs}}$$

Тогда

$$y_i = \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}x_j + a_{is}x_s + \sum_{j=s+1}^{n} a_{ij}x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}x_j + a_{is}\frac{-\sum_{j=1}^{s-1} a_{rj}x_j + y_r - \sum_{j=s+1}^{n} a_{rj}x_j}{a_{rs}} + \sum_{j=s+1}^{n} a_{ij}x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} x_j + \frac{a_{is}}{a_{rs}} y_r + \sum_{j=s+1}^{n} \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} x_j, \ (i = 1,\dots m)$$

Таким образом один шаг ОЖИ с разрешающим элементом a_{rs} переводит исходную таблицу в новую по следующей схеме:

1) Разрешающий элемент заменяется единицей;
2) Остальные элементы разрешающего (s-го) столбца остаются без изменений;
3) Остальные элементы разрешающей (r-й) строки меняют свой знак;
4) «Обыкновенные» элементы b_{ij}, ($i \neq r,\ j \neq s$) вычисляются по формуле

   $$b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj};$$

5) Все элементы новой таблицы делятся на разрешающий элемент a_{rs}.

Однако, как будет видно далее, при решении задач ЛП симплекс-методом гораздо удобнее использовать другой вид Жордановых исключений - т.н. **модифицированные Жордановы исключения** (МЖИ). В этом случае систему записывают как

$$y_i = -a_{i1}(-x_1) - a_{i2}(-x_2) - \dots - a_{in}(-x_n), \ (i = 1,\dots,m)$$

и тогда один шаг МЖИ выполняется по следующей схеме:

1) Разрешающий элемент заменяется единицей;
2) Остальные элементы разрешающей строки остаются без изменений;
3) Остальные элементы разрешающего столбца меняют свой знак;
4) «Обыкновенные» элементы b_{ij}, ($i \neq r,\ j \neq s$) вычисляются по формуле

   $$b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj};$$

5) Все элементы новой таблицы делятся на разрешающий элемент a_{rs}.

Действительно, из

$$y_r = -a_{r1}(-x_1) - \dots - a_{rs}(-x_s) - \dots - a_{rn}(-x_n)$$

находим

$$x_s = \frac{a_{r1}(-x_1) + \dots + y_r + \dots + a_{rn}(-x_n)}{a_{rs}}$$

Учебный вопрос № 4.

Правило составления симплекс-таблицы.

При изучении учебного вопроса № 2 мы получили каноническую форму записи задачи ЛП. Теперь нам необходимо записать симплекс-таблицу и перейти к решению задачи. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- Выразим балансовые условия относительно зависимых переменных $\mathbf{y_i},\ (\mathbf{i = 1,\dots,m})$.
- Полученные выражения сведем в таблицу, в которой (с учетом применения МЖИ) элементы $\mathbf{a_{ij}}$ есть коэффициенты при $\mathbf{x_j}$, столбец $\mathbf{a_{i,n+1}}$ есть столбец элементов $\mathbf{A_i}$ и $\mathbf{z}$-строка есть коэффициенты при $\mathbf{x_j}$ в максимизируемой линейной форме.

	$-\mathbf{x_1}$	$-\mathbf{x_2}$	....	$-\mathbf{x_n}$	
$\mathbf{y_1}$ $\mathbf{y_2}$ .... $\mathbf{y_m}$	$\mathbf{a_{11}}$ $\mathbf{a_{21}}$ .... $\mathbf{a_{m1}}$	$\mathbf{a_{12}}$ $\mathbf{a_{22}}$ .... $\mathbf{a_{m2}}$	....	$\mathbf{a_{1n}}$ $\mathbf{a_{2n}}$ .... $\mathbf{a_{mn}}$	$\mathbf{A_1}$ $\mathbf{A_2}$ .... $\mathbf{A_m}$
$\mathbf{z}$	$-\mathbf{c_1}$	$-\mathbf{c_2}$	....	$-\mathbf{c_n}$	$\mathbf{0}$

Или в рамках числового примера:

	$-\mathbf{x_1}$	$-\mathbf{x_2}$	$-\mathbf{x_3}$	
$\mathbf{y_1}$ $\mathbf{y_2}$ $\mathbf{y_3}$	1 5 5	1 3 10	1 2 10	15 100 160
$\mathbf{z}$	-5	-10	-12	0

Учебный вопрос № 5.

Применение МЖИ для нахождения опорного и оптимального решений.

А. Нахождение опорного решения.

В силу основного свойства решения задачи ЛП это решение содержит $\mathbf{n}$ нулевых значений $\mathbf{x_j}$ и $\mathbf{m}$ - положительных. Такое решение называют «опорным» или «базисным». Рассмотрим исходную симплекс-таблицу. Положим значение независимых переменных $\mathbf{x_j = 0},\ (\mathbf{j = 1,\dots,n})$ и посмотрим, будут ли значения зависимых переменных $\mathbf{y_i},\ (\mathbf{i = 1,\dots,m})$ положительны. Подобная проверка легко реализуется, т.к. при нулевых независимых переменных $\mathbf{y_i = a_{i,n+1}},\ (\mathbf{i = 1,\dots,m})$. Если все $\mathbf{a_{i,n+1}}$ неотрицательны, то это означает, что опорное решение задачи получено. Если же среди $\mathbf{a_{i,n+1}}$ есть отрицательные значения, то полученное решение не является опорным, т.к. не принадлежит области допустимых значений.

Таким образом, нахождение опорного решения задачи формально сводится к избавлению от отрицательных элементов в последнем столбце симплекс-таблицы. Эту операцию можно выполнить путем придания некоторого положительного значения одной из независимых переменных, находящихся в верху таблицы, причем на ее место с нулевым значением пойдет одна из зависимых переменных. Следует иметь в виду, что подобная перемена ролями двух переменных не должна привести к нарушению балансовых условий. Все это определяет следующее правило выбора разрешающего элемента для выполнения одного шага МЖИ:

- В строке, содержащей отрицательный элемент в последнем (свободном) столбце, находится отрицательный член (если его не существует, то задача несовместна). Пусть это будет член $\mathbf{a_{i,s}}$. Так отмечается разрешающий столбец $\mathbf{s}$. Придание некоторого положительного значения переменной $\mathbf{x_s}$ должно привести к получению опорного решения. Для определения этого значения находим минимальное неотрицательное значение отношения $\frac{\mathbf{a_{i,n+1}}}{\mathbf{a_{i,s}}}$ по всем $\mathbf{i = 1,\dots,m}$. Следует иметь в виду, что отношение типа $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{a_{i,s}}}$ не должны приниматься во внимание - они считаются «отрицательными». Строка таблицы, в которой достигается минимум и будет разрешающей строкой.
- Выполняется один шаг МЖИ и вновь проверяется последний (свободный) столбец таблицы. Эта процедура повторяется до тех пор, пока мы не получим опорное решение.

Б. Нахождение оптимального решения.

После получения опорного решения анализируется $\mathbf{z}$-строка таблицы. Если в ней содержаться только положительные элементы, то найденное решение является и оптимальным, т.к. переменные находящиеся, в верху таблицы и имеющие нулевое значение имеют отрицательные коэффициенты и попытка дать им какие-либо положительные значения приведет к ухудшению полученного результата.

Если же в $\mathbf{z}$-строке матрицы есть отрицательные коэффициенты, то полученное решение может быть улучшено если соответствующая ему переменная вместо нулевого значения получит какое-либо положительное значение. Для определение допустимого положительного значения этой переменной находится минимальное неотрицательное значение отношения $\frac{\mathbf{a_{i,n+1}}}{\mathbf{a_{i,s}}}$ по всем $\mathbf{i = 1,\dots,m}$, где $\mathbf{s}$ - номер столбца: содержащего отрицательный элемент в $\mathbf{z}$-строке. Отношения вида $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{a_{i,s}}}$ опять не рассматриваем, считая их «отрицательными». Строка таблицы, в которой достигается минимум и будет разрешающей строкой. Если же столбец над отрицательным членом $\mathbf{z}$-строки не содержит ни одного положительного элемента, то это означает что задача не имеет решения. С найденным таким образом разрешающим элементом выполняется один шаг МЖИ и снова просматривается $\mathbf{z}$-строка до тех пор, пока в ней не окажутся только положительные элементы.

Занятия 5,6. Решение задач по оптимальному целераспределению.

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Дать практику в решении задач с использованием аппарата линейного программирования.

В ходе проведения занятий привить студентам навыки уставных отношений.

Методика проведения занятия:

Перед рассмотрением учебных вопросов необходимо проверить степень усвоения студентами материала занятий 3-4 данной темы путем постановки следующих контрольных вопросов:

1) Схема выполнения одного шага МЖИ
2) Правило выбора разрешающих элементов при отыскании опорного и оптимальных решений.
3) Правило формирования результата.

Далее устанавливается постановка задачи о рассмотрении средств в общей форме и оговариваются ограничения.

Записывается математическая формулировка задачи, приводится к каноническому виду и определяется структура данных. При этом надо четко показать необходимость введения массивов ****** и определения их начальных значений.

Совместно со студентами пишутся алгоритмы отыскания опорного и оптимального решений. Алгоритм процедуры МЖИ записывается преподавателем или студентами после решения общих вопросов по организации процедуры.

Затем обязательно составляется полный алгоритм решения задачи.

При проведении занятий используются слайды с наименованием темы занятий и изучаемых вопросов, а также слайды с постановкой задачи. В случае необходимости в ходе занятий могут быть использованы слайды занятий 3 и 4 данной темы.

При ответах студентов добиваться четкости и ясности изложения материала, строевой подтянутости, строгого выполнения уставных взаимоотношений, а также отрабатываются методические навыки правильного использования доски и ТСО.

На самостоятельную: работу следует дать задание по модернизации блоков нахождения опорного и оптимального решений с нахождением максимального по модулю отрицательного элемента в столбце свободных членов или $\mathbf{z}$-строке соответственно.

Пример № 1

Найти минимум линей ной формы

$$\mathbf{L = -7x_1 - 5x_2}$$

удовлетворяющей ограничениям

$$\mathbf{19 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0}$$

$$\mathbf{13 - 2x_1 - x_2 \ge 0}$$

$$\mathbf{15 - 3x_2 \ge 0}$$

$$\mathbf{18 - 3x_1 \ge 0}$$

$$\mathbf{x_1, x_2 \ge 0}$$

Пример № 2

Найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 которые минимизируют линейную форму $L = 6 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5$ и удовлетворяют системе ограничений вида

$$2 - x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0$$
$$5 - x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 - 3x_5 = 0$$
$$4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

Краткое содержание занятий 5,6.

Учебный вопрос № 1.

Уточненная постановка задачи.

Планируется налет авиации на n объектов противника. Каждому самолету, назначенному на j-й объект $(j = 1,\dots,n)$ дается a_{ij} средств нанесения удара i -ого типа $(i = 1,\dots,m)$. Самолет, назначенный на j-й объект, после прорыва системы ПВО может нанести ему ущерб c_j. Общее число самолетов (X) и количество средств удара i -ого типа (A_i) ограничено.

Требуется назначить на каждый объект такое количество самолетов x_j, чтобы суммарный ущерб, наносимый противнику, был максимальным.

Учебный вопрос № 2.

Формализация задачи и определение структуры данных.

Сформулируем математическую постановку задачи:

максимизируется функция

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \ (i = 1,\dots,m)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,\dots,n)$$

Введем m зависимых переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$.и приведем формулировку задачи к каноническому виду:

максимизируется функция

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = A_i, \ (i = 1, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i \geq 0, \ (i = 1, \dots, m)$$

Т.о. структура данных, необходимая для решения задачи, определяется так:

m - число распределяемых средств (или число балансовых условий).

n - число объектов.

Симплекс-таблица имеет размерность $A(1:n+1, 1:m+1)$, причем $n+1$-ая строка есть z-строка и $m+1$-й столбец есть столбец свободных членов.

Кроме того, для формулирования результата введем вещественный массив $xp(n)$ и два вспомогательных целочисленных $x(n)$ и $y(m)$, определив их начальные значения так:

$$x(j) = j, \ (j = 1, \dots, m)$$

$$y(i) = -i, \ (i = 1, \dots, n)$$

Эти массивы будут иметь значение индекса соответствующей переменной x или y, занимающих ту или иную строку (или столбец) таблицы, а знак «-» является признаком принадлежности индекса переменной y. При выполнении шага МЖИ кроме пересчета значений таблицы необходимо будет поменять местами значения $x(s)$ и $y(r)$. После получения оптимального решения анализ массивов $x(n)$ и $y(m)$ позволит сформулировать правильный результат.

Методическую разработку составили

подполковник	В. Ярошенко
подполковник	В. Черкасов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВОЕННОЙ ПОДГОТОВКИ

Кафедра войск ПВО

«УТВЕРЖДАЮ»
Начальник военной кафедры Войск ПВО

полковник И. Калашников

«______» __________________ 199___г.

Методическая разработка

для проведения занятий по разделу:

«Математические методы моделирования исследований боевых действий войск и анализа сложных систем (моделей операций)»

профиль ВУС 530700

ТЕМА: 16 ***Методы теории игр и их применение к исследованию эффективности боевых действий***

ЗАНЯТИЕ: ***3÷6***

Обсуждена на заседании цикла 24

«__» ___________ 1997 г.

ПРОТОКОЛ ______________________

Москва 1997 г.

Учебная и воспитательная цели:

Изучить и дать практику в применении аппарата теории игр к задачам исследования эффективности боевой деятельности войск. Показать, что правильное применение полученных знаний позволит военному инженеру успешно решать поставленные боевые задачи. Воспитывать у студентов строевую подтянутость, вырабатывать у них умение и навыки в проведении занятий с подчиненными.

Организационно-методические указания:

Материал данной темы изучается на лекциях и групповых занятиях.

В ходе лекций студентами изучаются основные понятия и классификация игр, прямоугольные игры с нулевой суммой и игры без седловых точек. Определяется решение игры в смешанных стратегиях и доказывается основная теорема прямоугольных игр, даются свойства оптимальных стратегий.

В ходе групповых занятий студенты должны усвоить и получить практику применения основных методов решения игровых задач в смешанных стратегиях.

На первых двух занятиях рассматриваются методы решения элементарных игр ($\mathbf{2 \times 2}$, $\mathbf{2 \times m}$, $\mathbf{n \times 2}$) графоаналитическими методами, а также решение игровых задач методом последовательного приближения.

Последующие 4 часа отводятся на изучение метода решения игровых задач путем сведения их к задаче линейного программирования.

Занятия 3,4. Решение игровых задач.

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Дать практику в применении метода последовательных вычислений для решения игровых задач. Воспитывать у студентов строевую подтянутость, вырабатывать у них методические и командные навыки.

Методика проведения занятия:

Изучение материала данных занятий должно начинаться с проверки усвоения студентами теоретических знаний, полученных в ходе лекций. Эта проверка может быть осуществлена путем постановки следующих контрольных вопросов:

1. Понятие прямоугольной игры с нулевой суммой;
2. Решение прямоугольных игр в смешанных стратегиях;
3. Свойство оптимального решения игровой задачи;
4. Принцип минимакса.

Затем необходимо приступить к изложения материала первого вопроса, дать содержательное описание задачи и ее математическую формулировку. Обратить внимание студентов на то, что основная теорема теории прямоугольных игр была доказана в ходе лекций.

Второй учебный вопрос посвящен предварительным действиям при решении игровых задач. Следует обратить внимание на необходимость выполнение каждого из этих действий, существенно упрощающих полученные решения.

В третьем учебном вопросе дается аналитический метод решения игр $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, а также графоаналитический метод решения игр $\mathbf{2} \times \mathbf{m}$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{2}$. При этом следует обратить внимание на использование диаграмм (графиков) для сведения указанных игровых задач к игре $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

В ходе изложения материала данного учебного вопроса рекомендуется использовать слайды, иллюстрирующие данные методы решения.

Четвертый учебный вопрос посвящен методу последовательных приближений. Рассматривается общая схема метода, на числовом примере детально разбирается алгоритм решения задачи. При этом, в целях улучшения усвоения материала, необходимо высветить соответствующий слайд, на котором отражена указанная последовательность вычислений.

В ходе занятий обращать внимание на правильность выполнения студентами строевых приемов, а также на последовательность изложения материала при ответах на поставленные преподавателем вопросы.

В качестве задания на самостоятельную работу необходимо дать студентам следующую задачу:

Пример № 1

Синие обороняются и могут занять любые две из четырех позиций одинаковым количеством боевых единиц. Красные из-за ограниченности боевых средств могут обстрелять три из четырех позиций синих. Обстрелянные единицы Синих на i -й позиции поражаются с вероятностью p_i: $p_1 = 0.5,\ p_2 = 0.7,\ p_3 = 0.6,\ p_4 = 0.8$.

Приняв в качестве показателя эффективности операции среднее число пораженных единиц Синих, определить оптимальные стратегии сторон. Для Синих - какие позиции занять, для Красных - какие позиции подвергнуть обстрелу.

В нормальной форме игра задается платежной матрицей:

	$C_1(1,2)$	$C_2(1,3)$	$C_3(1,4)$	$C_4(2,3)$	$C_5(2,4)$	$C_6(3,4)$
$K_1(1,2,3)$	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_3$	p_1	$p_2 + p_3$	p_2	p_3
$K_2(1,2,4)$	$p_1 + p_2$	p_1	$p_1 + p_4$	p_2	$p_2 + p_4$	p_4
$K_3(1,3,4)$	p_1	$p_1 + p_3$	$p_1 + p_4$	p_3	p_4	$p_3 + p_4$
$K_4(2,3,4)$	p_2	p_3	p_4	$p_2 + p_3$	$p_2 + p_4$	$p_3 + p_4$

Краткое содержание занятий 3,4.

Учебный вопрос № 1.

Постановка задачи об оптимальной пропорции применения различных типов средств в полосе обороны.

На вооружении ПВО имеется $\mathbf{n}$ типов зенитных комплексов: $\mathbf{K_1, K_2, ..., K_n}$.

Противник располагает $\mathbf{m}$ типами СВН: $\mathbf{C_1, C_2, ..., C_m}$.

Вероятность поражения $\mathbf{j}$-го типа самолета комплексом $\mathbf{i}$-го типа задается матрицей:

	C_1	C_2	...	C_m
K_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
K_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
K_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

Требуется определить оптимальную пропорцию применения различных типов комплексов в полосе обороны ПВО.

Математическая формулировка задачи прямоугольной игры с нулевой суммой.

Задана платежная матрица $\|\mathbf{a_{ij}}\|, \; (\mathbf{i} = \overline{1, n}; \; \mathbf{j} = \overline{1, m})$

Найти такие

$$\mathbf{p^0 = \left\{p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0\right\}, \; (\sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1)}$$

$$\mathbf{q^0 = \left\{q_1^0, q_2^0, ..., q_m^0\right\}, \; (\sum_{j=1}^{m} q_j^0 = 1)}$$

чтобы для любых

$$\mathbf{p = \left\{p_1, p_2, ..., p_n\right\}, \; (\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)}$$

$$\mathbf{q = \left\{q_1, q_2, ..., q_m\right\}, \; (\sum_{j=1}^{m} q_j = 1)}$$

выполнялось условие

$$\mathbf{E\left(p, q^0\right) \le E\left(p^0, q^0\right) \le E\left(p^0, q\right)}$$, где

$$\mathbf{E(p, q) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i q_j}$$ - средний выигрыш.

$$\mathbf{E\left(p^0, q^0\right) = \nu}$$ - цена игры.

$\left(p^0, q^0\right)$ - оптимальные смешанные стратегии.

Если $p^0_{i_0} = 1$ и $q^0_{j_0} = 1$, а $p^0_{i \neq i_0} = 0$ и $q^0_{j \neq j_0} = 0$, то i_0 и j_0 - чистые стратегии.

<u>Основная теорема</u> прямоугольных игр утверждает, что всегда существуют такие ν_1 и ν_2, что $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, где

$$\nu_1 = \max_p \min_q E(p, q)$$ - нижняя цена игры

$$\nu_2 = \min_q \max_p E(p, q)$$ - верхняя цена игры.

<u>Учебный вопрос № 2.</u>

<u>Предварительные действия при решении игровых задач.</u>

Приступая к решению игр во всех случаях следует придерживаться предварительной процедуры, выполнение которой может предотвратить лишнюю трату времени и усилий.

<u>Предварительная процедура состоит из следующих этапов:</u>

1) Преобразование исходной матрицы в матрицу с положительными элементами.

Определяется наибольший по модулю элемент K исходной матрицы A:

$$K = \max_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\}, \text{ где } a_{ij} < 0$$

и находится преобразованная матрица $A' = A + K$.

В этом случае цена игры ν увеличится на K, оптимальные стратегии не изменятся.

2) Проверка наличия доминирующих стратегий и понижение порядка игры.

Стратегии сторон сравниваются между собой поэлементно. Если одна из стратегий всеми своими элементами хуже или равна какой-либо стратегии, то она исключается из рассмотрения. Порядок игры при этом понижается.

Для красных l-я стратегия хуже s-й, если

$$a_{lj} \le a_{sj}, \ j = \overline{1, m}$$

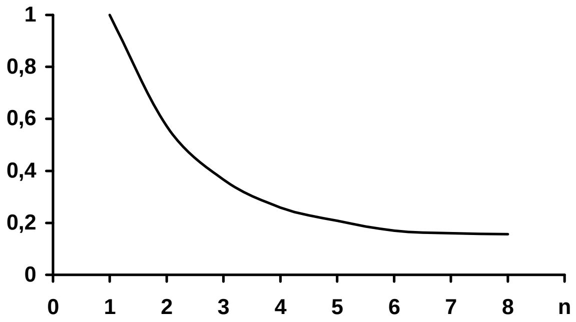
Для красных r-я стратегия хуже f-й, если

$$a_{ir} \ge a_{if}, \ i = \overline{1, n}$$

3) Проверка на седловую точку.

Если платежная матрица содержит элемент $a_{i_0 j_0}$, удовлетворяющий условию

$\min\limits_j \max\limits_i (a_{ij}) = \max\limits_i \min\limits_j (a_{ij}) = a_{i_0 j_0}$, то пара чистых стратегий i_0, j_0 и элемент $a_{i_0 j_0}$ есть искомое.



Исследования показали что:

Вероятность того, что прямоугольная игра содержит седловую точку, резко уменьшается с возрастанием размерности матрицы. Однако, для игры с произвольной размерностью платежной матрицы решение следует начинать с проверки на наличие седловой точки.

Пример

вычеркиваем
↓

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|ccc|c|c} 5 & 4 & 3 & 3 & \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & \\ \hline 5 & 6 & 6 & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

Учебный вопрос № 3.

Некоторые методы решения игр.

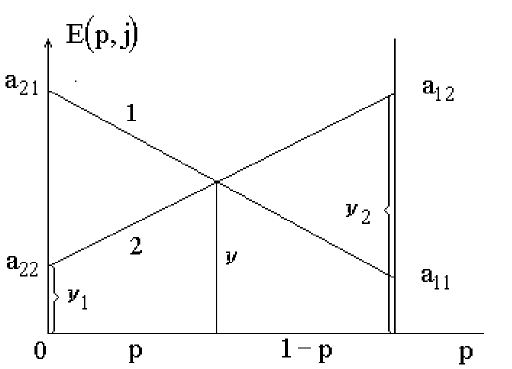
а) Графический метод решения игр 2×2 и $2 \times m$

Пусть задана платежная матрица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Решение для красных можно представить

$$E(p,1) = a_{11}p + a_{21}(1-p)$$
$$E(p,2) = a_{12}p + a_{22}(1-p)$$



Аналогично можно представить решение для синих.

Учебный вопрос № 4.

Метод последовательных приближений.

Последовательность вычислений.

1. Для $N = 1$ выбираем стратегию $i(1) = 1$ и получаем

$$C_1(1),\ldots,C_m(1)$$

2. Последующие стратегии выбираем следующим образом:

а) $j(N)$ выбирают так, чтобы оно было наименьшим целым числом, при котором

$$\min\left\{C_1(N),\ldots,C_j(N),\ldots,C_m(N)\right\} = C_{j(N)}(N)$$

б) $i(N)$ выбирают так, чтобы оно было наибольшим целым числом, при котором

$$\max\left\{K_1(N-1),\ldots,K_i(N-1),\ldots,K_n(N-1)\right\} = K_{i(N)}(N-1)$$

3. Последовательные значения величин $C_j(N)$ и $K_i(N)$ выбирают следующим образом:

$$C_j(1) = p_{i(1),j} \quad \text{для } N = 1$$

$$C_j(N) = C_j(N-1) + p_{i(N),j} \quad \text{для } N > 1$$

$$K_i(1) = p_{i,j(1)} \quad \text{для } N = 1$$

$$K_i(N) = K_i(N-1) + p_{i,j(N)} \quad \text{для } N > 1$$

4. Цена игры выбирается с помощью оценок:

$$\nu_1(N) = \frac{1}{N} C_{j(N)}(N)$$

$$\nu_2(N) = \frac{1}{N} K_{i(N+1)}(N)$$

5. Оптимальная стратегия определяется приближенными выражениями:

$$X(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} i(k)$$

$$Y(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} j(k)$$

6. О точности приближений полученных выражений ν_1 и ν_2 к истинной цене игры можно судить по относительной величине:

$$\frac{\nu_2(N) - \nu_1(N)}{\overline{\nu}(N)} \le \varepsilon, \text{ где } \overline{\nu}(N) = \frac{\nu_1(N) + \nu_2(N)}{2}$$

При $N \to \infty \quad \nu_2(N) - \nu_1(N) \to 0$

Доказано, что при решении игры, заданной матрицей $m \times n$ ошибка между значениями цены игры в N-м приближении и ее истинным значением не превосходит величины

$$\left|\nu(N) - \nu\right| \le \frac{C}{\sqrt[n+m-2]{N}}$$

Где C - некий постоянный коэффициент (см. Гермейер «Введение в исследование операций»). На практике же сходимость получается значительно лучше.

Пример.

N	i	C_1	C_2	C_3	j	K_1	K_2	K_3	ν_1	ν_2	$\bar{\nu}$	$\Delta\nu$
1	1	5	4	<u>3</u>	3	3	<u>6</u>	0	3	6	4.5	3
2	2	10	<u>7</u>	9	2	7	<u>9</u>	6	3.5	4.5	4.0	1
3	2	15	<u>10</u>	15	2	11	<u>12</u>	12	3.33	4	3.65	0.7
4	2	20	<u>13</u>	21	2	15	15	<u>18</u>	3.2	4.5	3.9	1.3
5	3	22	<u>19</u>	21	2	19	18	<u>24</u>	3.8	4.8	4.3	1
6	3	24	25	<u>21</u>	3	22	<u>24</u>	24	3.5	4	3.75	0.5

Замечание:

На практике замечена значительная «пульсация» метода, состоящая в том, что $\nu_1(N)$ и $\nu_2(N)$ сходятся к ν весьма немонотонно. Для уменьшения количества лишних повторений можно использовать при суждении о возможности окончания процесса на величину $\nu_2(N) - \nu_1(N)$

$$\Delta N = \min_{1 \le S \le N} \nu_2(S) - \max_{1 \le S \le N} \nu_1(S) > 0$$

В качестве оптимальных стратегий можно брать те $\{r_j(S)\}$ и $\{l_i(S)\}$, для номеров итераций которых реализуются $\min\limits_{1 \le S \le N} \nu_2(S)$ и $\max\limits_{1 \le S \le N} \nu_1(S)$ (см. Гермейер «Введение в исследование операций»).

Используя таблицу расчета примера, представим таблицу расчета

N	ν_1	ν_2	$\min \nu_2$	$\max \nu_1$	ΔN
1	3	6	6	3	3
2	3.5	4.5	4.5	3.5	1
3	3.33	4	4	3.5	0.5
4	3.2	4.5	4	3.5	0.5
5	3.8	4.8	4	3.8	0.2
6	3.5	4.0	4	3.8	0.2
7	3	4.2	4	3.8	0.2
8	2	4.5	4	3.8	0.2

После окончания процесса приближений в качестве цены игры берется величина:

$$\frac{1}{2}\left(\min_{1 \le S \le N} \nu_2(S) + \max_{1 \le S \le N} \nu_1(S)\right)$$

Занятия 5,6. Решение игровых задач методом линейного программирования.

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Получить практику в решении игровых задач путем сведения их к задаче линейного программирования. Воспитывать у студентов строевую подтянутость, вырабатывать у них методические и командные навыки.

Методика проведения занятия:

Первый учебный вопрос аналогичный учебный вопрос занятий 3,4, так как целесообразно рассмотреть решение одной и той же задачи различными методами. Поэтому указав на этот факт, рекомендуется начать изложение материала с постановки перед студентами следующих вопросов:

1. Сформулировать задачу определения оптимальной пропорции применения различных типов ЗРК.
2. Математическая формулировка поставленной задачи.

Учебный вопрос № 2 очень важен. Необходимо показать студентам прием, с помощью которого игровая задача сводится к задаче линейного программирования. Кроме того необходимо провести детальный анализ сведения игровой задачи (красных и синих).

Третий учебный вопрос следует начать с приведения задачи линейного программирования к каноническому виду и записи симплекс-таблиц для их решения. Затем к доске следует вызвать двух студентов, которые независимо должны решить задачу каждый за свою сторону.

Необходимо добиться, чтобы они получили одинаковые ответы, из которых следует независимость решений от того, для какой стороны решается задача.

В ходе занятий обращать внимание на правильность выполнения студентами строевых приемов, а также на последовательность изложения материала при ответах на поставленные преподавателем ответы.

В задании на самостоятельную работу можно дать задачу:

Во время второй мировой войны японские самолеты, пилотируемые летчиками-смертниками, причиняли большие потери ВМС США. Это вынудило командование ВМС США рассмотреть вопрос о выборе наилучшего маневра судна для уклонения от нападающего самолета. В результате были разработаны следующие рекомендации по оптимальной тактике поведения атакуемых самолетами кораблей:

- все корабли должны подставлять борт круто пикирующим самолетам и отворачивать борт от полого пикирующих;
- крупные корабли должны применять резкое маневрирование, меняя курс;
- мелкие суда должны маневрировать медленно, не снижая эффективности зенитного огня.

На основании этих рекомендаций можно заключить, что японские летчики применяли следующие способы атаки (стратегии):

J_1 - круто пикирующий самолет, атакующий корабль с кормы или носа;

J_2 - круто пикирующий самолет, атакующий с борта;

J_3 - полого пикирующий самолет, атакующий с кормы или носа;

J_4 - круто пикирующий самолет, атакующий с борта;

Американские корабли могли применять следующие виды маневров:

A_1 - подставить борт при резком маневрировании;

A_2 - подставить борт при медленном маневрировании;

A_3 - отворачивать борт при резком маневрировании;

A_4 - отворачивать борт при медленном маневрировании;

Найти оптимальные стратегии американцев и японцев и цену игры в предположении, что значения вероятностей поражения крупных кораблей и мелких судов p_{ij}, принятых в качестве показателя эффективности операции при фиксированных стратегиях (J_i, A_j), образуют следующие платежные матрицы:

Для крупных кораблей

	A_1	A_2	A_3	A_4
J_1	0.23	0.51	0.65	0.83
J_2	0.16	0.34	0.76	0.9
J_3	0.8	0.91	0.36	0.41
J_4	0.66	0.72	0.53	0.12

Для мелких кораблей

	A_1	A_2	A_3	A_4
J_1	0.5	0.16	0.9	0.48
J_2	0.37	0.2	0.82	0.53
J_3	0.1	0.48	0.6	0.85
J_4	0.66	0.5	0.2	0.3

Краткое содержание занятий 5,6.

Учебный вопрос № 1.

А. Постановка задачи.

На вооружении группировки ПВО имеется $\mathbf{n}$ типов ЗРК $\left(\mathbf{K_1, K_2, ..., K_n}\right)$.

Противник располагает $\mathbf{m}$ типами СВН $\left(\mathbf{C_1, C_2, ..., C_m}\right)$.

Вероятность поражения $\mathbf{j}$-го типа СВН $\mathbf{i}$ -м типом ЗРК задается матрицей

$\left\|\mathbf{p_{ij}}\right\|, \ (\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1, n}}; \ \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1, m}})$

Требуется определить оптимальную пропорцию применения различных типов ЗРК в полосе обороны ПВО.

Б. Математическая формулировка задачи.

Задана платежная матрица $\left\|\mathbf{a_{ij}}\right\|, \ (\mathbf{i} = \overline{\mathbf{1, n}}; \ \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1, m}})$

Найти такие

$$\mathbf{p^0} = \left\{\mathbf{p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0}\right\}, \ (\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{p_i^0} = \mathbf{1})$$

$$\mathbf{q^0} = \left\{\mathbf{q_1^0, q_2^0, ..., q_m^0}\right\}, \ (\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{q_j^0} = \mathbf{1})$$

чтобы для любых

$$\mathbf{p} = \left\{\mathbf{p_1, p_2, ..., p_n}\right\}, \ (\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{p_i} = \mathbf{1})$$

$$\mathbf{q} = \left\{\mathbf{q_1, q_2, ..., q_m}\right\}, \ (\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{q_j} = \mathbf{1})$$

выполнялось условие

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{p, q^0}\right) \le \mathbf{E}\left(\mathbf{p^0, q^0}\right) \le \mathbf{E}\left(\mathbf{p^0, q}\right)$$, где

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{p, q}\right) = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij} p_i q_j}$$ - средний выигрыш.

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{p^0, q^0}\right) = \nu$$ - цена игры.

$$\left(\mathbf{p^0, q^0}\right)$$ - оптимальные смешанные стратегии.

__Учебный вопрос № 2.__

__Сведение игровой задачи к задаче ЛП.__

__За красную сторону__

Рассмотрим действие системы ПВО (красная сторона).

Их задача заключается в том, чтобы независимо от действий СВН противника обеспечить поражение их с вероятностью не меньшей, чем цена игры, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq \nu \text{ для любого } j = \overline{1, m}$$

$$\text{причем } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Введем новую переменную

$$x_i = \frac{p_i}{\nu}$$

Мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1, \ (j = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{\nu}$$

Максимизируя свой выигрыш (вероятность поражения целей), мы должны найти минимум функции

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1, \ (j = \overline{1, m})$$

$$x_i \geq 0$$

Мы получили типичную постановку задачи ЛП при условии минимизации целевой функции.

__За синюю строну__

Проведем те же рассуждения за противника. Его цель - выбрать частоту применения своих типов СВН таким образом, чтобы при любых действиях системы ПВО вероятность поражения цели была не более цены игры, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq \nu \text{ для любого } i = \overline{1, n}$$

$$\text{причем } \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

Введем новую переменную

$$y_j = \frac{q_j}{\nu}$$

Мы получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le 1, \ (i = \overline{1, n})$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \frac{1}{\nu}$$

Минимизируя свой проигрыш, синие должны получить максимум функции

$$z = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le 1, \ (i = \overline{1, n})$$

$$y_j \ge 0$$

<u>Учебный вопрос № 3.</u>

<u>Решение задачи симплекс-методом.</u>

Запишем обе задачи в канонической форме:

<u>За красную сторону:</u>

$$\max(-z) = \sum_{i=1}^{n} (-x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge 1, \ (j = \overline{1, m})$$

$$x_i \ge 0$$

Введем зависимые переменные $\tilde{y}_j, \ (j = \overline{1, m})$ и запишем балансовые условия в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} (-a_{ij}) x_i + \tilde{y}_j = -1, \ (j = \overline{1, m})$$

И выразим их относительно $\tilde{y}_j$

$$\tilde{y}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) - 1$$

В результате мы получим симплекс-таблицу следующего вида:

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	
$\tilde{y}_1$	$-a_{11}$	$-a_{21}$	…	$-a_{n1}$	-1
$\tilde{y}_2$	$-a_{12}$	$-a_{22}$	…	$-a_{n2}$	-1
…	…	…	…	…	…
$\tilde{y}_m$	$-a_{1m}$	$-a_{2m}$	…	$-a_{nm}$	-1
z	1	1	…	1	0

<u>За синюю сторону:</u>

$$\max z = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le 1, \ (i = \overline{1, n})$$

$$y_j \ge 0$$

Введем зависимые переменные $\tilde{x}_i, \ (i = \overline{1, n})$ и запишем балансовые условия в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + \tilde{x}_i = 1, \ (i = \overline{1, n})$$

И выразим из относительно $\tilde{x}_i$

$$\tilde{x}_i = \left(\sum_{j=1}^{m} (-a_{ij}) y_j \right) + 1$$

Симплекс-таблица будет иметь вид:

	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_m$	
$\tilde{x}_1$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	1
$\tilde{x}_2$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
$\tilde{x}_n$	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	1
z	-1	-1	…	-1	0

Методическую разработку составили

подполковник В. Ярошенко
подполковник В. Черкасов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВОЕННОЙ ПОДГОТОВКИ

Кафедра войск ПВО

«УТВЕРЖДАЮ»
Начальник военной кафедры Войск ПВО

полковник О. Калашников

«_____» ________________ 199___г.

Методическая разработка

для проведения занятий по разделу:

«Математические методы моделирования исследований боевых действий войск и анализа сложных систем (моделей операций)»

профиль ВУС 530700

ТЕМА: 17 ***Методы динамического программирования и их применение к задачам планирования боевых действий***

ЗАНЯТИЕ: ***3÷6 Решение задач по определению оптимальной стратегии при исследовании боевых действий***

Обсуждена на заседании цикла 24

«__» __________ 1997 г.

ПРОТОКОЛ ____________________

Москва 1993 г.

Учебная и воспитательная цели:

Привить студентам практические навыки в применении метода динамического программирования при исследовании боевых действий. Привить навыки работы с личным составом при решении задач исследования операций с АСУ.

Организационно-методические указания:

Материал данной темы изучается на лекциях и групповых занятиях. В ходе лекций изучаются следующие вопросы:

1. Модели боевых операций ПВО, исследуемые методы динамического программирования;
2. Понятие дискретного многошагового процесса;
3. принцип оптимальности Беллмана;
4. Функциональные уравнения процесса;
5. Составление основных рекуррентных соотношений;
6. Общая вычислительная схема метода динамического программирования;
7. Решение задач об оптимальном распределении ресурсов и оптимальном управлении.

На групповых занятиях студенты должны закрепить теоретические знания, полученные на лекциях и получить практические навыки в решении военных задач методом динамического программирования.

Занятия 3,4. Решение задач по выбору оптимальной стратегии при исследовании боевых действий.

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Привить студентам практические навыки в решении задач по исследованию боевых действий методом динамического программирования. Привить студентам навыки в постановке задач личному составу, планирование ее решения.

Методика проведения занятия:

Перед началом группового занятия преподаватель производит опрос студентов по основным вопросам лекций: область применения метода, формулировка задачи, теоретические предпосылки метода.

После выяснения контрольных вопросов преподаватель обобщает математическую формулировку задачи динамического программирования, как формулировку процесса пошаговой оптимизации с уяснением физического смысла принципа оптимальности Беллмана.

Основной целью группового занятия является получение практических навыков студентами: в алгоритмизации поставленной задачи и в построении вычислительной схемы задачи.

По каждому этапу решения задачи преподаватель дает объяснения и рекомендации, после чего студенты работаю самостоятельно под контролем преподавателя, при этом один студент работает у доски.

В качестве задач рассматриваются: выбор оптимального маршрута и оптимальное распределение снарядов при стрельбе по групповой цели

В качестве задания на самостоятельную работу необходимо дать студентам следующую задачу об оптимальном распределении средств по объектам удара.

Постановка задачи об оптимальном распределении средств по объектам удара.

Для нанесения удара по $\mathbf{n}$ объектам выделяется $\mathbf{S}$ однотипных средств. Каждое средство может воздействовать только по одному объекту. Ущерб, наносимый $\mathbf{i}$ -му объекту $\mathbf{j}$-м количеством $(\mathbf{i}=1,\ldots,\mathbf{n};\ \mathbf{j}=0,\ldots,\mathbf{m})$ в условных единицах составляет $\mathbf{Q_i(j)}$. Распределить $\mathbf{S}$ средств между $\mathbf{n}$ объектами так, чтобы суммарный ущерб, нанесенный всем объектам, был максимальным.

Пример. $\mathbf{n}=4$; $\mathbf{S}=5$; $\mathbf{Q_i(j)}$ заданы таблицей

j \ i	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13

i / j	1	2	3	4
5	18	15	18	16

Краткое содержание занятий 3,4.

Учебный вопрос № 1.

Математическая формулировка задач динамического программирования.

1. Принцип оптимальности Беллмана

Найти числа $\mathbf{x_i \geq 0, (i = 1,..., n)}$

максимизирующие функцию $\mathbf{R_n(x_1,..., x_n) = g_1(x_1) + ... + g_n(x_n)}$

при ограничениях $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} x_i \leq x}$

Из выражения $\mathbf{f_n(x)}$ следует вывод функционального уравнения

$$\mathbf{f_n(x) = \max\left[g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\right]}$$

где $\mathbf{f_1(x) = \max_{x_1} g_1(x_1)}$

Доказательство:

Имеем

$$\mathbf{\max R_n = \max_{x_n} \max_{[x_{n-1},...,x_1,]} R_n}$$

Следовательно

$$\mathbf{f_n(x) = \max_{[x_1,...,x_n]} \left[g_1(x_1) + ... + g_n(x_n)\right] = \max_{x_n} \max_{[x_{n-1},...,x_1,]} \left[g_n(x_n) + ... + g_1(x_1)\right] =}$$

$$\mathbf{= \max_{x_n} \left\{ g_n(x_n) + \max_{[x_1,...,x_n]} \left[g_{n-1}(x_{n-1}) + ... + g_1(x_1)\right] \right\} = \max_{x_n} \left[g_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n)\right]}$$

Полученное выражение отражает принцип оптимальности Беллмана. Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальную стратегию относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Часто процесс оптимизации строится с конца, тогда функциональные уравнения представляются в виде:

$$\mathbf{f_{k-1}(x) = \max\left[g_{k-1}(x_{k-1}) + f_k(x - x_{k-1})\right]}$$

$$\mathbf{f_n(x) = \max g_n(x_n), (k = n,...,2)}$$

Динамическое программирование - метод оптимизации в задачах, процесс решения которых может быть расчленен на отдельные этапы (шаги).

В общем случае процесс пошаговой оптимизации представляется так:

Рассматривается система, которая на каждом $\mathbf{k}$-м шаге $\mathbf{(k = 1,..., n)}$ под влиянием $\mathbf{\bar{u}_k}$ переходит из состояния $\mathbf{\bar{x}_{k-1}}$ в состояние $\mathbf{\bar{x}_k}$.

$$\mathbf{(\bar{x}_0) \xrightarrow{\bar{u}_1} (\bar{x}_1) \xrightarrow{\bar{u}_2} (\bar{x}_2) .... (\bar{x}_{n-1}) \xrightarrow{\bar{u}_n} (\bar{x}_n)}$$

Если $\mathbf{q_k}$ - показатель эффективности на $\mathbf{k}$-ом шаге, то $\mathbf{q_k = g_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k)}$, при этом предполагается отсутствие последействия $\mathbf{\bar{x}_k = \bar{x}_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{u}_k)}$. Показателем эффективности процесса $\mathbf{n}$ шагов является целевая функция, которая должна удовлетворять условию аддитивности.

$$R=\sum_{k=1}^{n} g_k(\bar{x}_{k-1},\bar{u}_k)$$

Задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом: определить совокупность допустимых (удовлетворяющих некоторым ограничениям) управлений $\bar{u}_1,....,\bar{u}_n$ переводящих систему из начального состояния $\bar{x}_0$ в конечное $\bar{x}_n$ и оптимизирующих целевую функцию.

2. Постановка задачи о выборе оптимального маршрута.

Для оценки радиационной обстановки произведено в разных точках местности ряд замеров уровней радиации. После обработки и интерполяции была получена сеть с шагом Δ, узлам которой $S(x_i,y_j)$ поставлены в соответствие числа $P(x_i,y_j)$, представляющие собой уровни радиации в данных точках $(i=1,...,n;\ j=1,...,m)$. Определить маршрут движения от пункта $S_1(x_1,y_1)$ до пункта $S_k(x_n,y_m)$, при котором будет получена минимальная суммарная доза радиации.

3. Формализация задачи.

Для каждой точки $S(x_i,y_j)$ задано число $P(x_i,y_j)$ $(i=1,...,n;\ j=1,...,m)$.
Необходимо найти такую последовательность точек $S_r(x_i,y_j)$
$(r=1,...,n+m-1; i=1,...,n; j=1,...,m; \Delta x\ge 0; \Delta y\ge 0)$
чтобы $F=\min\sum_{r=1}^{n+m-1}P_r(x_i,y_j)$

4. Последовательность вычислений.

1-й этап - обратных ход:

$$F(x_i,y_j)=\begin{cases}P(x_i,y_j)\ \text{при}\ i=n\ \text{и}\ j=m\\ P(x_i,y_j)+F(x_i,y_{j+1})\ \text{при}\ i=n\\ P(x_i,y_j)+F(x_{i+1},y_j)\ \text{при}\ j=m\\ P(x_i,y_j)+\min\{F(x_{i+1},y_j),F(x_i,y_{j+1})\}\ \text{при}\ i<n\ \text{и}\ j<m\end{cases}$$

2-й этап - прямой ход:

После узла $S(x_i,y_j)$ выбирается один из узлов $S(x_{i+1},y_j)$ или $S(x_i,y_{j+1})$, для которого найдется

$$F(x_{i+1,}y_j)=\min\{F(x_{i+1},y_j),F(x_i,y_{j+1})\}$$

или

$$F(x_{i,}y_{j+1})=\min\{F(x_{i+1},y_j),F(x_i,y_{j+1})\}$$

Числовой пример.

y_j								
y_7	20	18	16	15	14	12	15	17
y_6	17	14	13	10	11	13	14	17
y_5	14	13	12	10	11	8	11	15
y_4	12	13	12	10	11	13	15	20
y_3	10	8	8	8	10	12	13	15
y_2	11	9	8	7	9	13	14	18
y_1	12	11	10	9	13	14	17	20
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_i

а) Обратных ход

y_j								
y_7	127	107	89	73	58	44	32	17
y_6	132	115	91	78	68	57	46	34
y_5	123	109	96	84	74	65	57	49
y_4	131	119	106	94	85	78	72	69
y_3	128	118	110	102	95	90	85	84
y_2	137	126	117	109	104	103	99	102
y_1	149	137	127	118	117	117	116	122
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_i

б) Прямой ход

$$S_1(x_1,y_1) \to S_2(x_1,y_2) \to S_3(x_2,y_2) \to S_4(x_3,y_2) \to$$
$$S_5(x_4,y_2) \to S_6(x_4,y_3) \to S_7(x_4,y_4) \to S_8(x_4,y_5) \to$$
$$S_9(x_5,y_5) \to S_{10}(x_6,y_5) \to S_{11}(x_6,y_6) \to S_{12}(x_6,y_7) \to$$
$$S_{13}(x_7,y_7) \to S_{14}(x_8,y_7)$$

Учебный вопрос № 1.

Постановка задачи об оптимальном распределении снарядов при стрельбе по рассредоточенной групповой цели без перенесения огня.

1. Постановка задачи

Планируется стрельба $\mathbf{S}$ снарядами по рассредоточенной групповой цели, состоящей из $\mathbf{n}$ единиц, без перенесения огня. Каждая единица групповой цели обстреливается независимо от остальных, заранее назначенным количеством снарядов. Вероятность поражения $\mathbf{i}$-й единицы одним снарядом равна $\mathbf{P_i, (i = 1,..., n)}$. Назначить для обстрела каждой $\mathbf{i}$-й единицы групповой цели такое количество снарядов $\mathbf{m_i, (\sum_{i=1}^{n} m_i = S)}$, чтобы среднее число пораженных единиц было максимальным.

Пример: Получить решение поставленной задачи при следующих исходных данных:

$$\mathbf{S = 4; n = 3; P_1 = 0.3; P_2 = 0.5; P_3 = 0.6;}$$

2. Формализация поставленной задачи.

Поставленную задачу можно представить следующим образом:

Найти:

$$\mathbf{m_i \geq 0, (i = 1,..., n)}$$

максимизирующие функцию

$$\mathbf{M(m_1,..., m_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - P_i)^{m_i}\right]}$$

при ограничении

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} m_i \leq S}$$

Так как $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - P_i)^{m_i}\right] = n - \sum_{i=1}^{n} (1 - P_i)^{m_i}}$, то задачу можно сформулировать иначе:

Найти:

$$\mathbf{m_i \geq 0, (i = 1,..., n)}$$

минимизирующие функцию

$$\mathbf{M(m_1,..., m_n) = \sum_{i=1}^{n} (1 - P_i)^{m_i}}$$

при ограничении

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} m_i = S}$$

Критерий максимизации математического ожидания числа пораженных целей эквивалентен критерию минимизации математического ожидания прорвавшихся (не пораженных) целей.

3. Последовательность вычислений.

Обозначим через x_i число снарядов, выделенных для обстрела i целей, тогда $m_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1,...,n; x_0 = 0)$.

В этом случае можно считать:

m_i - фазовой координатой, характеризующей состояние системы в конце i-го шага;

x_i - параметром управления на i-м шаге.

Совокупность функциональных уравнений представим в виде:

$$f_1(x_1) = \min_{0 \le x \le x_1} (1 - P_1)^x, (0 \le x_1 \le S)$$

$$f_2(x_2) = \min_{0 \le x_1 \le x_2} \left\{ (1 - P_2)^{x_2 - x_1} + f_1(x_1) \right\}, (0 \le x_2 \le S)$$

. . . .

$$f_n(x_n) = \min_{0 \le x_{n-1} \le x_n} \left\{ (1 - P_n)^{x_n - x_{n-1}} + f_{n-1}(x_{n-1}) \right\}, (0 \le x_n \le S)$$

Задача нахождения x_i может быть решена численным методом, который сводится к расчету таблиц функций (обратный ход):

$$f_i(x_i) = \min_{0 \le x_{i-1} \le x_i} \left\{ (1 - P_i)^{x_i - x_{i-1}} + f_{i-1}(x_{i-1}) \right\}, (0 \le x_i \le S)$$

После расчета таблиц, имея на i-м шаге значение x_i, определяется по таблице $f_i(x_i)$ значение x_{i-1} (прямой ход). По значения x_i и x_{i-1} рассчитывается $m_i = x_i - x_{i-1}$.

Пример расчета, в условиях поставленной задачи, приведен в таблицах, где

Расчет таблицы обратного хода.

x_k	x_{k-1}	1 шаг	2 шаг			3 шаг		
		$R_k(x_k)$ $f_1(x_1)$	$R_2(x_k - x_{k-1})$	$f_1(x_k - x_{k-1})$	$f_2(x_2)$	$R_3(x_k - x_{k-1})$	$f_2(x_k - x_{k-1})$	$f_3(x_3)$
0	0	1	1	1	2	1	2	3
1	0	0.7	0.5	1	1.5	0.4	2	2.4
	1		1	0.7	1.7	1	1.5	2.5
2	0	0.49	0.25	1	1.25	0.16	2	2.16
	1		0.5	0.7	1.2	0.4	1.5	1.9
	2		1	0.49	1.49	1	1.2	2.2
3	0	0.343	0.125	1	1.125	0.064	2	2.064
	1		0.25	0.7	0.95	0.16	1.5	1.66
	2		0.5	0.49	0.99	0.4	1.2	1.6
	3		1	0.343	1.343	1	0.95	1.95
4	0	0.2401	0.0625	1	1.0625	0.0256	2	2.0256
	1		0.125	0.7	0.828	0.064	1.5	1.564
	2		0.25	0.49	0.74	0.16	1.2	1.36
	3		0.5	0.343	0.843	0.4	0.95	1.35
	4		1	0.2401	1.2401	1	0.74	1.74

Таблица обратного хода

x_i	x_1	x_2
0	0	0
1	0	0
2	1	1
3	1	2
4	2	3

Таблица прямого хода

i	x_i	x_{i-1}	m_i
3	4	3	1
2	3	1	2
1	1	0	1

$$M(m_1 = 1; m_2 = 2; m_3 = 1) = 1.35$$

Занятия 5,6. Задача об оптимальном распределении авиации в налетах на объекты удара.

Учебная и воспитательная цели:

Дать практику студентам в решении задач по исследованию боевых действий методом динамического программирования.

В процессе решения задачи отработать возможные формы доклада о полученных результатах.

Методика проведения занятия:

Групповое занятие преподаватель начинает с повторения основных понятий метода динамического программирования, необходимых студентам для самостоятельного решения практических задач.

После уяснения основных понятий метода преподаватель ставит перед студентами задачу о распределении авиации по объектам удара, при этом для частного примера задает функции эффективности ущерба и функции потерь - линейными.

Над формализацией задачи студенты работают самостоятельно, после чего лучшие формулировки задачи воспроизводятся на доске и из них одна принимается в качестве окончательной.

Отработать при объяснении вариантов формализации задачи воспитательные цели занятия. Дать возможность студентам выступить в роли начальника (командира) подразделения, решающего задачи исследования боевых действий.

Это даст возможность привить командные и методические навыки студентам.

Преподаватель, используя частный пример, предлагает получить аналитическое решение студентам и осуществляет контроль за их работой. Решение поставленной задачи в общем случае осуществляется студентами численным методом с использованием таблицы расчета под контролем преподавателя.

В качестве задания на самостоятельную работу необходимо дать студентам следующую задачу об оптимальном усилении группировок ПВО.

Постановка задачи об оптимальном усилении группировок ПВО.

Оборона возможных направлений налета воздушного противника на объект осуществляется $\mathbf{n}$ группировками ПВО. Для усиления группировок дополнительно выделяется $\mathbf{S}$ средств.

При усилении $\mathbf{i}$-й группировки $\mathbf{j}$-м количеством средств $(\mathbf{i}=1,\dots,\mathbf{n};\ \mathbf{j}=0,\dots,\mathbf{S})$ учитывается вероятность $\mathbf{P_i(j)}$ - не допустить прорыва ни одного самолета противника через зону поражения группировки.

Распределить $\mathbf{S}$ средств между $\mathbf{n}$ группировками так, чтобы вероятность не допустить прорыва ни одного самолета противника к объекту была максимальной.

Пример. $\mathbf{n=3}$; $\mathbf{S=4}$; $\mathbf{P_i(j)}$ заданы таблицей

j \ i	1	2	3
0	0.4	0.3	0.5

j \ i	1	2	3
1	0.5	0.4	0.6
2	0.6	0.5	0.6
3	0.8	0.6	0.7
4	0.9	0.7	0.8

Краткое содержание занятий 5,6.

Учебный вопрос № 1.

Задача об оптимальном распределении авиации в последовательных налетах на объекты удара.

1. Постановка задачи

На 2 объекта планируется n налетов авиации. Перед каждым i-м налетом $(i=1,...,n)$ количество средств x_i распределяется между двумя объектами следующим образом:

y_i - средств назначается на 1-й объект;

$x_i - y_i$ - средств назначается на 2-й объект.

После каждого налета на 1-й объект определяются:

$C_1(y_i)$ - эффективность ущерба;

$P_1(y_i)$ - сохранившееся число средств.

После каждого налета на 2-й объект определяются:

$C_2(x_i - y_i)$ - эффективность ущерба;

$P_2(x_i - y_i)$ - сохранившееся число средств.

После каждого налета число средств не пополняется, а сохранившиеся средства перераспределяются. Первоначальное число средств x_0. Требуется так распределить средства между объектами в каждом налете (выбрать величины $y_1,..., y_n$), чтобы нанесенный противнику ущерб был максимальным.

Пример. Получить решение поставленной задачи при следующих исходных данных:

$$n = 3; x_0 = 3;$$
$$C_1(x) = 0.8x; C_2(x) = 0.7x;$$
$$P_1(x) = 0.5x; P_2(x) = 0.6x$$

2. Математическая формулировка задачи.

Поставленную задачу можно сформулировать следующим образом:

Найти

$$y_i, (i = 1,..., n; 0 \le y_i \le x_i)$$

максимизирующие функцию

$$R = \sum_{i=1}^{n} \left[C_1(y_i) + C_2(x_i - y_i)\right]$$

при ограничениях

$$x_1 = x_0; x_{i+1} = P_1(y_i) + P_2(x_i - y_i)$$

3. Аналитическое решение частного примера.

Линейность функций $C_1(x), C_2(x), P_1(x), P_2(x)$ в частном примере позволяет реализовать решение многошагового процесса в аналитической форме.

Представим совокупность функциональных уравнений и уравнений состояний в виде:

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le y_3 \le x_3} \left[0.8y_3 + 0.7(x_3 - y_3)\right]$$

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} \left[0.8y_2 + 0.7(x_2 - y_2) + f_3(x_3(x_2))\right]$$

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le y_1 \le x_1} \left[0.8y_1 + 0.7(x_1 - y_1) + f_2(x_2(x_1))\right]$$

$$x_3(x_2) = 0.5y_2 + 0.6(x_2 - x_2)$$

$$x_2(x_1) = 0.5y_1 + 0.6(x_1 - x_1)$$

Каждое выражение $f_i(x_i), (i = 1,2,3)$ находим при $y_i = 0$ или $y_i = x_{???}$, в силу линейности функций $C_1(x), C_2(x), P_1(x), P_2(x)$.

Для $f_3(x_3)$ будем иметь:

$f_3(x_3) = 0.8x_3$ при $y_3 = x_3$

Выражение $f_2(x_2)$ представим в виде:

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} \left\{\left[0.8y_2 + 0.7(x_2 - y_2)\right] + 0.8\left[0.5y_2 + 0.6(x_2 - y_2)\right]\right\}$$

Откуда следует:

$f_2(x_2) = 1.2x_2$ при $y_2 = x_2$

Выражение $f_1(x_1)$ также представим в виде:

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le y_1 \le x_1} \left\{\left[0.8y_1 + 0.7(x_1 - y_1)\right] + 1.2\left[0.5y_1 + 0.6(x_1 - y_1)\right]\right\}$$

Откуда:

$f_1(x_1) = 1.42x_1$ при $y_1 = 0$

Таким образом получено решение задачи:

$y_1 = 0; y_2 = x_2$ и $y_3 = x_3$

Т.е. в 1-м налете все средства следует направить на 2-й объект, а во 2-м и в 3-м налетах оставшиеся средства следует направить на 1-й объект.

4. Численных метод решения задачи.

В случае нелинейности функций $C_1(x), C_2(x), P_1(x), P_2(x)$ задача решается численным методом.

Численным метод сводится к расчету таблиц функций (обратных ход):

$$f_i(x_i), (i = 1,2,3; 0 \le x_i \le x_0)$$

$$0 \le y_i \le x_i$$

Значение функций $f_i(x_{i-1})$ определяются путем интерполяции по таблице $f_i(x_i)$ для аргумента $x_i = P_1(y_{i-1}) + P_2(x_{i-1} - y_{i-1})$. После расчета таблиц, имея на каждом i-м шаге x_i, определяются по таблице $f_i(x_i)$ значения y_i и рассчитываются, с использованием уравнения состояния, значение x_{i+1} (прямой ход). Если число средств велико, то таблицы рассчитываются с шагом _____.

Пример расчета приведен в таблицах для:

$$x_0 = 3; n = 3; C_1(x) = 0.8; C_2(x) = 0.7; P_1(x) = 0.5; P_2(x) = 0.6.$$

Из таблицы обратного хода следует, что независимо от количества средств перед каждым налетом, в 1-м налете все средства следует направить на 2-й объект ($y_1 = 0$), а во 2-м и в 3-м налетах оставшиеся средства следует направить на 1-й объект ($y_2 = x_2$ и $y_3 = x_3$). Оптимальная эффективность при этом определяется:

$$\sum_{i=1}^{3}\left[C_1(y_i) + C_2(x_i - y_i)\right] = 4.26$$

Расчет обратного хода.

[1] - $x_{k+1} = P_1(x_k) + P_2(x_k - y_k)$

[2] - $R(x_k) = C_1(x_k) + C_2(x_k - y_k); f_3(x_3) = \max R(x_k)$

[3] - $f_3(x_2)$

[4] - $f_2(x_2) = R(x_k) + f_3(x_2)$

[5] - $f_2(x_1)$

[6] - $f_1(x_1) = R(x_k) + f_2(x_1)$

			3-й шаг	2-й шаг		3-й шаг	
x_k	y_k	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
1	0	0.6	0.7	0.48	1.18	0.72	**1.42**
	1	0.5	**0.8**	0.40	**1.20**	0.60	1.40
2	0	1.2	1.4	0.96	2.36	1.44	**2.84**
	1	1.1	1.5	0.88	2.38	1.32	2.82
	2	1.0	**1.6**	0.80	**2.40**	1.20	2.80
3	0	1.8	2.1	1.44	3.54	2.16	**4.26**
	1	1.7	2.2	1.36	3.56	2.04	4.24
	2	1.6	2.3	1.28	3.58	1.92	4.22
	3	1.5	**2.4**	1.20	**3.60**	1.80	4.20

Таблица обратного хода

x	y_1	y_2	y_3
1	0	1	1
2	0	2	2
3	0	3	3

Таблица прямого хода

k	x_k	y_k	$x_k - y_k$
1	3	0	3
2	1.8	1.8	0
3	0.9	0.9	0

Методическую разработку составили

подполковник В. Ярошенко

подполковник В. Черкасов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВОЕННОЙ ПОДГОТОВКИ

Кафедра войск ПВО

«УТВЕРЖДАЮ»
Начальник военной кафедры Войск ПВО

полковник И. Калашников

«_____» ________________ 199___г.

Методическая разработка

для проведения занятий по разделу:

«Математические методы моделирования исследований боевых действий войск и анализа сложных систем (моделей операций)»

профиль ВУС 530700

ТЕМА: 18 ***Применение методов алгебры логики к решению задач обработки информации специального характера***

ЗАНЯТИЕ: ***3÷4***

Обсуждена на заседании цикла 24

«__» ___________ 1997 г.

ПРОТОКОЛ _____________________

Москва 1997 г.

Учебная и воспитательная цели:

Дать студентам понятие о возможности применения формального аппарата булевой алгебры к задачам обработки смысловой информации. Научить применять аппарат булевой алгебры и привить практические навыки в постановке, формализации и решении задач обработки смысловой информации в АСУ военного назначения.

Привить навыки изложения материала по теме у доски. Организовать методический разбор их объяснения материала личному составу.

Организационно-методические указания:

На данных занятиях при решении задач используется теоретический материал, изложенный на лекциях (занятия 1,2), где были даны сведения об аппарате булевой алгебры, определены понятия булевых переменных и функций; базиса и изображающих чисел булевых функций и действий над ними; логической зависимости и независимости высказываний. Необходимо перед началом практических занятий с целью напоминания этих теоретических сведений провести опрос студентов по следующим вопросам:

1) Основные формулы булевой алгебры.
2) Изображающие числа и базис.
3) Представление булевых функций в совершенной дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме.
4) Восстановление булевой функции по изображающему числу.
5) Логическая зависимость и независимость булевых функций.

После опроса, на который затратить 25-30 мин., подвести итог и остановиться на тех вопросах, которые студенты усвоили плохо.

В качестве итога этого обсуждения разъяснить суть задачи обработки смысловой информации и дать общую формулировку этой задачи.

Далее сформулировать условия задачи обработки разведанных с помощью перестановочной матрицы. Вызвать студентов для ее решения. На это затратить время порядка 65 минут.

Рассмотреть на конкретной задаче вопросы проверки противоречивости, зависимости и избыточности высказываний. Сформулировать условия задачи и решить ее силами студентов, затратив на решение 45 минут.

Задание на самостоятельную работу.

Алгоритмизация задач обработки смысловой информации. Составить алгоритмы решения рассмотренных на занятиях задач и подготовить распечатку.

Занятия 3,4. Обработка смысловой информации с использованием булевой алгебры.

Время: 4 часа.

Учебная и воспитательная цели:

Дать практику применения аппарата булевой алгебры к задачам обработки разведанных. Привить навыки в постановке, формализации и решения задач обработки смысловой информации в АСУ.

Привить навыки проведения занятий с подчиненными по теме.

Методика проведения занятия:

В начале занятия провести опрос по материалам лекций с целью уяснения степени знакомства студентов с основными понятиями алгебры логики. Основное внимание уделить понятиям «изображающие числа», «базис», «дизъюнктивная нормальная форма» и «конъюнктивная нормальная форма». Дать навыки в решении задач на нахождение явного вида логической зависимости высказываний. Напомнить общую методику решения булевых управлений.

В процессе изучения материала учебного вопроса № 2 обратить особое внимание на методику применения аппарата алгебры логики для решения задач смысловой обработки информации, указать также на связь излагаемых математических методов с проблемами принятия решений во время подготовки и ведения боевых действий, а также с перспективами развития методов алгебры логики применительно к концепции компьютеров пятого поколения. В процессе решения задач рекомендуется воспользоваться диапроектором для экономии времени и более наглядного изложения вычисления перестановочной матрицы. Особое внимание обратить на интерпретация полученных результатов.

Для рассмотрения учебного вопроса № 3 дать конкретную задачу для самостоятельной работы и последующего объяснения студентам решения задачи и использование методов у доски.

Для объяснения материала учебного вопроса № 4 целесообразно дать задание на самоподготовку.

Краткое содержание занятий 3,4.

Учебный вопрос № 1.

Общая формулировка задачи обработки смысловой информации.

Прежде чем будет сформулирована такая задача, необходимо провести опрос студентов с целью напоминания необходимых для дальнейшего теоретических сведений. Вот вкратце эти основные понятия:

А) Основные понятия алгебры логики.

Алгеброй называется непустое множество элементов, являющееся ее областью, вместе с некоторым набором операций, которые можно совершить над элементами, не выходя за пределы области.

Алгебра логики - один из основных разделов математической логики, в котором методы алгебры используются в логических преобразованиях высказываний.

Область алгебры логики состоит из множества высказываний.

Высказыванием называется законченное предложение, которое может иметь два значения истинности: либо быть истинным, либо быть ложным. Обозначение высказываний: $\mathbf{A, B, C, \ldots, A_I, B_I, \ldots}$.

Из простых высказываний при помощи операций:

$$\vee(+),\ \ \wedge(\times),\ \ \rightarrow,\ \ \overline{\mathbf{A}},\ \ =$$

образуются сложные высказывания или булевские функции.

Основные формулы булевой алгебры

1. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}+\mathbf{A}=\mathbf{A}\\ \mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{A}\end{array}\right\}$ правило абсорбации.
2. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}\\ \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}\end{array}\right\}$ правило коммутативности
3. **Ошибка! Ошибка внедренного объекта.** ассоциативность
4. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\\ \mathbf{A}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times(\mathbf{A}+\mathbf{C})\end{array}\right\}$ дистрибутивность
5. $\left.\begin{array}{l}\overline{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}\\ \overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}\end{array}\right\}$ правило Моргана
6. $\mathbf{A}+\mathbf{1}=\mathbf{1}$
7. $\mathbf{A}\times\mathbf{1}=\mathbf{A}$
8. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$
9. $\mathbf{A}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$
10. $\mathbf{A}+\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{1}$
11. $\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{0}$
12. $\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}$
13. $\mathbf{A}+\overline{\mathbf{A}}\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$
14. $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{B}+\mathbf{CB}=\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}+\mathbf{CB}+\mathbf{AC}$

15. $\overline{(\overline{\mathbf{A}})} = \mathbf{A}$

Б) Изображающие числа и базис.

Б.ф. считается заданной, если мы можем указать значение истинности этой функции при всех возможных комбинациях значений истинности входящих в нее элементов.

Таблицу, которая представляет все возможные комбинации значений истинности некоторого набора элементов $\mathbf{A, B, C, \ldots}$ - называется **базисом**.

Для $\mathbf{n}$ элементов базис содержит $\mathbf{n}$ строк и $\mathbf{2^n}$ столбцов. Так для одного элемента базисом будет

$$\#\mathbf{A} = \mathbf{01}$$

Для двух элементов $\mathbf{A, B}$ базисом будет

$$\#\mathbf{A} = \mathbf{0101}$$

$$\#\mathbf{B} = \mathbf{0011}$$

Для трех элементов $\mathbf{A, B, C}$ базисом будет

$$\#\mathbf{A} = \mathbf{01010101}$$

$$\#\mathbf{B} = \mathbf{00110011}$$

$$\#\mathbf{C} = \mathbf{00001111}$$

Если колонки базиса рассматривать как целые двоичные числа, записанные так, что самый младший разряд их соответствует первой строке базиса, а самый старший - последней строке, то колонки базиса для $\mathbf{n}$ элементов представляют собой числа от $\mathbf{0}$ до $\mathbf{2^n - 1}$.

Будем считать эти числа номерами колонок базиса. Если колонки базиса упорядочены в записи в возрастающем порядке их номеров слева направо, то базис называется **стандартным**. Все другие базисы нестандартные.

Для $\mathbf{n}$ элементов существует столько различных базисов, сколько можно составить перестановок из $\mathbf{n}$ колонок.

Стандартный базис для элементов $\mathbf{A, B, C, \ldots}$ обозначается в $\mathbf{[A, B, C, \ldots]}$.

Строки базиса называются **изображающими числами** соответствующих элементов и обозначаются знаком #.

$$\#(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} \quad \mathbf{0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 1}$$

$$\#(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \#\mathbf{A} \times \#\mathbf{B}$$

$$\#\mathbf{1} = \mathbf{111..}$$

$$\#\mathbf{0} = \mathbf{000...}$$

Например, найти изображающее число б.ф. $\#\mathbf{f(A, B, C)} = \mathbf{A\overline{B}C}$ в стандартном базисе в $\mathbf{[A, B, C]}$.

$$\#\mathbf{A} = \mathbf{01010101}$$

$$\#\mathbf{B} = \mathbf{00110011} \qquad \#\mathbf{f(A, B, C)} = \#(\mathbf{A\overline{B}C}) = \mathbf{00000100}$$

$$\#\mathbf{C} = \mathbf{00001111}$$

В) Нахождение изображающих чисел булевых функций.

Цель - перейти от булевой функции, заданной в виде изображающего числа, к явному изображению ее через элементы.

1. Дизъюнктивная нормальная форма.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма булевой функции является суммой элементарных произведений.

Например:

$$\#(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 10000000$$

$$\#(\overline{A}BC) = 00000010$$

Для восстановления булевой функции в дизъюнктивной форме по изображающему числу, нужно просуммировать те элементарные произведения, изображающие числа которых имеют единицы в тех же разрядах, что и изображающее число булевой функции.

Например, восстановить б.ф. по изображающему числу : 10010110. Единицы стоят на $0,3,5,6$ местах. Для этих позиций стандартного базиса находим

$$10010110 = \#(\overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC).$$

2. Конъюнктивная нормальная форма.

К.Н.Ф. представляет собой произведение элементарных сумм:

$$\#(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) = 11111110$$

$$\#(A + \overline{B} + \overline{C}) = 11111101$$

и т.д.

Для восстановления явного вида булевой функции по числу К.Н.Ф., необходимо перемножить те элементарные суммы, на позициях которых в изображающем числе стоят нули.

Например, число 10010110 имеет нули в $1,2,4$ и 7 разрядах, поэтому

$$10010110 = \#\left[(\overline{A} + B + C) \times (A + \overline{B} + C) \times (A + B + \overline{C}) \times (\overline{A} + \overline{B} + C)\right]$$

Г) Логическая зависимость и независимость высказываний. Нахождение явного вида логической зависимости

Каждая б.ф. имеет два значения истинности. Следовательно, n функций могут образовывать 2^n комбинаций значений истинности. По определению, n б.ф.: $f_1(A,B,C,\ldots),\ldots,f_n(A,B,C,\ldots)$ являются **независимыми**, если в совокупности при всевозможных значениях аргументов $A,B,C,\ldots$ они могут принимать все 2^n комбинаций значений истинности. Следовательно, для проверки независимости функций $f_1(A,B,C,\ldots),\ldots,f_n(A,B,C,\ldots)$ необходимо по отношению к базису $[A,B,C,\ldots]$ вычислить их изображающие числа и проверить, образуют ли столбцы набора изображающих чисел все 2^n чисел. Если имеются все 2^n чисел, то функции независимы.

Например, функции $\overline{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}$ независимы, так как

$$\begin{array}{r}
\#(\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}})=\mathbf{1001}\\
\#\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{1100}\\
\overline{\mathbf{3201}}
\end{array}$$

Столбцы наборов образуют числа $\mathbf{0,1,2,3}$ соответственно. Т.е. образуются все $\mathbf{2^n}=\mathbf{4}$ чисел.

А функции $\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}}+\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}$ зависимы, ибо столбцы набора

$$\begin{array}{r}
\#(\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{B}})=\mathbf{1001}\\
\#\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{1100}\\
\#(\mathbf{A}\times\overline{\mathbf{B}}+\overline{\mathbf{A}}\times\mathbf{B})=\mathbf{0110}\\
\overline{\mathbf{3641}}
\end{array}$$

имеют только числа $\mathbf{1,3,4,6}$, а числа $\mathbf{0,2,5}$ и $\mathbf{7}$ отсутствуют, но $\mathbf{2^3}=\mathbf{8}$.

Для того, чтобы найти явную форму логической связи зависимых булевых функций $\mathbf{f_1(A,B,C,\dots),\dots,f_n(A,B,C,\dots)}$ в виде $\mathbf{F(f_1,\dots,f_n)}=\mathbf{1}$, необходимо найти изображающее число $\#\mathbf{F(f_1,\dots,f_n)}$, которое формулируется следующим образом: На тех позициях $\overline{\mathbf{(0,2^n-1)}}$, где есть числа, полученные в столбцах набора $\begin{pmatrix}\#\mathbf{f_1}\\ \#\mathbf{f_2}\end{pmatrix}$, ставим $\mathbf{1}$, в противном случае $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{11100111}=\#\left(\overline{\mathbf{f_1}}\,\overline{\mathbf{f_2}}\mathbf{f_3}+\mathbf{f_1f_2}\overline{\mathbf{f_3}}\right)$$

Получим уравнение

$$\overline{\mathbf{f_1}}\,\overline{\mathbf{f_2}}\mathbf{f_3}+\mathbf{f_1f_2}\overline{\mathbf{f_3}}=\mathbf{0}$$

Его отрицание

$$\overline{\left(\overline{\mathbf{f_1}}\,\overline{\mathbf{f_2}}\mathbf{f_3}\right)}\times\overline{\left(\mathbf{f_1f_2}\overline{\mathbf{f_3}}\right)}=\mathbf{1}\;\Rightarrow\;\left(\overline{\left(\overline{\mathbf{f_1}}\,\overline{\mathbf{f_2}}\right)}+\overline{\mathbf{f_3}}\right)\times\left(\overline{\mathbf{f_1f_2}}+\overline{\overline{\mathbf{f_3}}}\right)=\mathbf{1}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\left(\mathbf{f_1}+\mathbf{f_2}+\overline{\mathbf{f_3}}\right)\left(\overline{\mathbf{f_1}}+\overline{\mathbf{f_2}}+\mathbf{f_3}\right)=\mathbf{1}$$

Например, рассмотрим функции:

$$\begin{array}{lrr}
\mathbf{f_1}=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{C}+\overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{C}} & \#\mathbf{A}=\mathbf{01010101} & \#\mathbf{f_1}=\mathbf{11001010}\\
\mathbf{f_2}=\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{C}}+\overline{\mathbf{B}}\mathbf{C} & \#\mathbf{B}=\mathbf{00110011} & \#\mathbf{f_2}=\mathbf{10101100}\\
\mathbf{f_3}=\overline{\mathbf{B}} & \#\mathbf{C}=\mathbf{00001111} & \#\mathbf{f_3}=\mathbf{11001100}\\
 & & \overline{\mathbf{75207610}}
\end{array}$$

Из полученного набора чисел отсутствуют числа $\mathbf{3}$ и $\mathbf{4}$.

Следовательно, $\#F(f_1, f_2, f_3) = 11100111$

$$11100111 = \#\left(\overline{f_1} + \overline{f_2} + f_3\right) \times \left(f_1 + f_2 + \overline{f_3}\right) = 1$$

$$\#\overline{f_1} = 00110101$$

$$\#\overline{f_2} = 01010011$$

$$\#\overline{f_3} = 00110011$$

Преобразуя это выражение, получим все зависимости между f_1, f_2 и f_3:

$$\left(\overline{f_1} + \overline{f_2}\right) \times \overline{f_3} + \left(f_1 + f_2\right) \times f_3 = 1$$

<u>Проверка на совместимость высказываний</u>

Если $\prod_{i=1}^{n} \#f_i = 0,\ldots,0$, то в совокупности все высказывания несовместны, т.е. среди них есть противоречивые. Для исключения противоречивых высказываний необходимо последовательно исключать из произведения по одному $\#f_j$, до тех пор, пока не станет $\prod_{i=1}^{n-1} \#f_i \neq 0$.

<u>Например</u>,

$$\#f_1 = 10101011$$

$$\#f_2 = 10111011$$

$$\#f_3 = 00001100$$

$$\#f_4 = 01000100$$

$$\prod_{i=1}^{4} \#f_i = \overline{00000000}$$

При исключении $\#f_4$ $\prod_{i=1}^{3} \#f_i \neq 0$. Следовательно, высказывание f_4 противоречит стальным.

<u>Д) Решение булевых уравнений с помощью перестановочной матрицы.</u>

Решение б.у. сводится к выражению одних переменных через другие. Понятие замены переменных в булевой алгебре аналогично этому понятию в обычной алгебре. Общая методика решения булевых уравнений состоит в следующем:

1) По описанию задачи **<u>выделяются элементарные высказывания</u>**.
2) В соответствии с сутью задачи составляются булевы выражения (уравнения).
3) Определяются изображающие числа булевых функций в соответствующих базисах.
4) Находится соответствие между столбцами, имеющими одинаковые числа с помощью перестановочной матрицы.
5) По полученным изображающим числам восстанавливается явный вид б.ф.

Подводя итог первому вопросу необходимо дать такое резюме:

суть логической выработки смысловой информации с целью получения содержательных выводов состоит в том, чтобы пользуясь некоторыми логическими соотношениями, например: соотношениями эквивалентности, выразить булевы функции, стоящие в правых частях этих соотношений, через логические переменные, от которых зависят правые части (или наоборот). Затем дать интерпретацию полученным формулам на обычном языке.

Учебный вопрос № 2.
Задача обработки разведанных с использованием перестановочной матрицы.

Разведчик, проводивший в течении некоторого времени наблюдения за действиями противника с целью выявления способов преодоления системы ПВО, представил своему командованию доклад следующего содержания:

1) На больших высотах при малой облачности прорыв ПВО производится бомбардировщиками на узком фронте совместно с истребителями.
2) На малых высотах в ночное время или на малых высотах при большой облачности применялись штурмовики и никогда не предпринимался прорыв бомбардировщиков на широком фронте, совместно с помехоносителями.
3) На больших высотах ночью или при большой облачности в дневное время использовался прорыв бомбардировщиков на широком фронте совместно с истребителями или прорыв бомбардировщиков на узком фронте совместно с помехоносителями.
4) При большой облачности ночью или при большой облачности на малых высотах или же при малой облачности на больших высотах применялись либо прорыв бомбардировщиков на узком фронте, либо прорыв на широком фронте совместно с истребителями и помехопостановщиками.

На основе докладов требуется определить:

1. Как влияет на тактику противника:
   a) малые высоты $\mathbf{A} = \mathbf{f_1}(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$?
   b) ночное время $\mathbf{B} = \mathbf{f_2}(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$?
   c) большая облачность $\mathbf{C} = \mathbf{f_3}(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$?
2. При каких условиях будет предпринято:
   a) прорыв обороны ПВО бомбардировщиками на широком фронте
   b) использованы истребители
   c) использованы помехопостанощики
3. Если предположить, что ожидается налет на малых высотах в ясный день, то какова будет тактика противника?

Решение

1. Выделение элементарных высказываний.

2. Выделим основные понятия, использованные в донесении разведчика.

/1/ **Высоты** - или большие ($\overline{\mathbf{A}}$), или малые ($\mathbf{A}$);

/2/ **Время проведения операции** - или день ($\overline{\mathbf{B}}$), или ночь ($\mathbf{B}$);

/3/ **Облачность** - большая ($\mathbf{C}$), или малая ($\overline{\mathbf{C}}$);

/4/ **Прорыв бомбардировщиков через систему ПВО** - или на широком ($\mathbf{A}'$), или на узком ($\overline{\mathbf{A}'}$) фронте;

/5/ **Средства активной поддержки** - или истребители ($\mathbf{B}'$), или штурмовики ($\overline{\mathbf{B}'}$);

/6/ **Средства пассивной поддержки** - помехопостановщики ($\mathbf{C}'$), или без помехопостановщиков ($\overline{\mathbf{C}'}$).

В соответствии с перечисленными понятиями введем в рассмотрение след. Элементарные высказывания:

$\mathbf{A} =$ малая высота;
$\overline{\mathbf{A}} =$ большая высота;
$\mathbf{B} =$ ночь;
$\overline{\mathbf{B}} =$ день;
$\mathbf{C} =$ большая облачность;
$\overline{\mathbf{C}} =$ малая облачность;
$\mathbf{A}' =$ прорыв обороны ПВО бомбардировщиков на широком фронте;
$\overline{\mathbf{A}'} =$ прорыв обороны ПВО бомбардировщиков на узком фронте;
$\mathbf{B}' =$ истребители;
$\overline{\mathbf{B}'} =$ штурмовики;
$\mathbf{C}' =$ помехопостановщики;
$\overline{\mathbf{C}'} =$ без помехопостановщиков.

3. Составление булевых выражений.

Донесения разведчика могут быть представлены следующими булевыми соотношениями:

1) $\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}'} \times \mathbf{B}'$
2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \overline{\mathbf{B}'} \times (\overline{\mathbf{A}'\mathbf{C}'})$
3) $\overline{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \overline{\mathbf{B}} \times \mathbf{C} = \overline{\mathbf{A}'} \times \mathbf{C}' + \mathbf{A}' \times \mathbf{B}'$
4) $\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}'} + \mathbf{A}' \times \mathbf{B}' \times \mathbf{C}'$

Определение изображающих чисел булевых функций.

Вычислим по отношению к базисам в $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ и в $(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$ соответственно изображающие числа булевых функций в правых частях произведенных соотношений эквивалентности:

в базисе в $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$

		разряды							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$\#\mathbf{f}_1 = \#\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{C}}$	=	1	0	1	0	0	0	0	0
$\#\mathbf{f}_2 = \#\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$	=	0	0	0	1	0	1	0	1
$\#\mathbf{f}_3 = \#\overline{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \overline{\mathbf{B}} \times \mathbf{C}$	=	0	0	1	0	1	1	1	0
$\#\mathbf{f}_4 = \#\mathbf{C} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{C}}$	=	1	0	1	0	0	1	1	1
		9	0	13	2	4	14	12	10
		значения столбцов							

в базисе в $[\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}']$

		разряды							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$\#\mathbf{f}_1' = \#\overline{\mathbf{A}}' \times \mathbf{B}'$	=	0	0	1	0	0	0	1	0
$\#\mathbf{f}_2' = \#\overline{\mathbf{B}}' \times (\overline{\mathbf{A}' \times \mathbf{C}'})$	=	1	1	0	0	1	0	0	0
$\#\mathbf{f}_3' = \#\overline{\mathbf{A}}' \times \mathbf{C}' + \mathbf{A}' \times \mathbf{B}'$	=	0	0	0	1	1	0	1	1
$\#\mathbf{f}_4' = \#\overline{\mathbf{A}}' + \mathbf{A}' \times \mathbf{C}' \times \mathbf{B}'$	=	1	0	1	0	1	0	1	1
		10	2	9	4	14	0	13	12
		значения столбцов							

Легко видеть, что один набор изображающих чисел может получен из другого простой перестановкой столбцов одним единственным способом. Это означает, что существует одно решение как относительно $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, так и относительно $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$.

4. Составление перестановочной матрицы $\mathbf{R}_{ij}$.

Для преобразования функций от переменных $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ к переменным $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ необходимо осуществить переход от изображающих чисел левого набора функций, вычисленного относительно базиса в $(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$, к изображающим числам правого набора функций, вычисленного относительно базиса в $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Этот переход сводится просто к перестановке столбцов при помощи перестановочной матрицы $\mathbf{R}_{ij}$, которая должна быть такой, чтобы:

$$\#\mathbf{f}_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{R}_{ij}) = \#\mathbf{f}_i'(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}')$$

Запишем элементы матрицы $\mathbf{R}_{ij} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{R}_{02} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{15} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{26} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{31} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{43} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{54} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{67} = \mathbf{1};\ \mathbf{R}_{70} = \mathbf{1}.$$

Тогда:

$$\mathbf{R_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Преобразование переменных от $\mathbf{A, B, C}$ к $\mathbf{A', B', C'}$.

Искомое преобразование переменных есть:

$$\begin{array}{rl} \#\mathbf{A}\ /\mathbf{A,B,C}/ & = \\ \#\mathbf{B}\ /\mathbf{A,B,C}/ & = \\ \#\mathbf{C}\ /\mathbf{A,B,C}/ & = \\ \#\mathbf{AB\overline{C}}\ /\mathbf{A,B,C}/ & = \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{0101\ 0101} \\ \mathbf{0011\ 0011} \\ \mathbf{0000\ 1111} \\ \mathbf{0100\ 0000} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{R_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1100\ 1100} \\ \mathbf{1100\ 0011} \\ \mathbf{1001\ 1001} \\ \mathbf{0000\ 1000} \end{pmatrix} \begin{array}{l} = \#\mathbf{A}\ /\mathbf{A',B',C'}/ \\ = \#\mathbf{B}\ /\mathbf{A',B',C'}/ \\ = \#\mathbf{C}\ /\mathbf{A',B',C'}/ \\ = \#\mathbf{A\overline{B}\overline{C}}\ /\mathbf{A',B',C'}/ \end{array}$$

Откуда находим:

a) $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{B}'}$, $(\overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \mathbf{A}'\overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}\mathbf{C}' + \mathbf{A}'\overline{\mathbf{B}'}\mathbf{C}' = \overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \overline{\mathbf{B}'}\mathbf{C}' = \overline{\mathbf{B}'})$

b) $\mathbf{B} = \mathbf{B}'\mathbf{C}' + \overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'}$, $(\overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \mathbf{A}'\overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \overline{\mathbf{A}'}\mathbf{B}'\mathbf{C}' + \mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \mathbf{B}'\mathbf{C}')$

c) $\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}' + \overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}$, $(\overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}\,\overline{\mathbf{C}'} + \mathbf{A}'\mathbf{B}'\overline{\mathbf{C}'} + \overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'}\mathbf{C}' + \mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \overline{\mathbf{A}'}\,\overline{\mathbf{B}'} + \mathbf{A}'\mathbf{B}')$

Переведем полученные соотношения на обычный язык:

a) на малых высотах будут применяться штурмовики;
b) в ночное время противник будет применять истребители и помехопостановщики или же штурмовики без помехопостановщиков;
c) При большой облачности противник будет применять прорыв обороны ПВО бомбардировщиками на широком фронте совместно с истребителями или прорыв ПВО бомбардировщиками на узком фронте совместно с штурмовиками.

6. Преобразование переменных от $\mathbf{A', B', C'}$ к $\mathbf{A, B, C}$.

Обратное преобразование осуществляется матрицей:

$$(\mathbf{R_{ij}})^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{R_{ij}})^{\mathbf{T}} = (\mathbf{R_{ji}})$, т.е. $\mathbf{R_{02}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R_{20}}$ и т.д.

И имеет вид

$$\begin{matrix} \#\mathbf{A'} = \\ \#\mathbf{B'} = \\ \#\mathbf{C'} = \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0101\ 0101} \\ \mathbf{0011\ 0011} \\ \mathbf{0000\ 1111} \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{R_{ji}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0101\ 0101} \\ \mathbf{1010\ 1010} \\ \mathbf{0110\ 0110} \end{pmatrix} \begin{matrix} = \#\mathbf{A'}\ /\mathbf{A,B,C}/ \\ = \#\mathbf{B'}\ /\mathbf{A,B,C}/ \\ = \#\mathbf{C'}\ /\mathbf{A,B,C}/ \end{matrix}$$

Или в явном виде:

a) $\mathbf{A' = A\overline{C} + \overline{A}C}$;
b) $\mathbf{B' = \overline{A}}$;
c) $\mathbf{C' = A\overline{B} + \overline{A}B}$;
d) $\mathbf{A\overline{B}\overline{C} = A'\overline{B'}C'}$.

Переводи на обычный язык:

a) прорыв бомбардировщиков на широком фронте будет производится при малой облачности на малых высотах или при большой облачности на больших высотах;
b) истребители будут применяться при действиях на больших высотах;
c) постановщики помех будут использоваться в дневное время на малых высотах или в ночное время на больших высотах.

7. Запись булевых выражений в явной форме.

Для ответа на третий вопрос найдем изображающее число элементов $\mathbf{A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$ в базисе в $(\mathbf{A', B', C'})$ и запишем булевы выражения в явной форме:

$\#\mathbf{A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}\ /\mathbf{A', B', C'}/ = (\mathbf{0000\ 0111})$, тогда $\mathbf{A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = A'\overline{B'}C'}$.

Таким образом, если ожидается налет противника на малых высотах в ясный день, то прорыв обороны будет осуществляться на широком фронте совместно со штурмовиками и помехопостановщиками.

Методическую разработку составили

подполковник В. Ярошенко

подполковник В. Черкасов