Рецензенты:
кафедра высшей математики МИФИ,
профессор А.В. Гончарский

Федеральная программа
книгоиздания России на 1994 г.

Денисов А.М.
Д33 Введение в теорию обратных задач: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.
ISBN 5-211-03079-6.

Учебное пособие посвящено одному из современных направлений прикладной математики — теории обратных задач, непосредственно связанной с проблемами обработки и интерпретации экспериментальной информации. Рассматриваются особенности постановки обратных задач и методы их решения. Излагаются различного типа обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Значительное внимание уделено обратным задачам для уравнений в частных производных. Для этих уравнений рассматриваются как обратные коэффициентные задачи, так и задачи определения краевых или начальных условий. Излагаются задачи восстановления функции по значениям ее интегралов, в частности задачи компьютерной томографии.

Для студентов и аспирантов университетов и других вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика".

$Д\frac{1602110000(4309000000)-023}{077(02)-94}$ 58-94 ББК 22.161.6

ISBN 5-211-03079-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Несмотря на то что широкое исследование обратных задач началось сравнительно недавно, в этой области получено большое число существенных результатов. В теории обратных задач сформировался ряд направлений, обусловленных как различными сферами ее приложений, так и типами математических постановок обратных задач. Число научных публикаций по теории обратных задач и ее приложениям очень велико. Многие из полученных результатов нашли свое отражение в монографиях, в которых рассмотрены как общие вопросы теории, так и ее специальные разделы, посвященные конкретным направлениям исследований. В то же время в учебной литературе по прикладной математике, доступной для студентов и специалистов из других областей науки, впервые знакомящихся с теорией обратных задач, эти вопросы отражены достаточно слабо.

В основу книги положены курсы лекций, которые автор в течение ряда лет читает студентам факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Первая глава имеет вводный характер. Вторая глава посвящена методам решения некорректно поставленных задач, поскольку, как правило, обратные задачи являются некорректными. В третьей главе рассматриваются обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Четвертая и пятая главы посвящены различного типа обратным задачам для уравнений в частных производных. В шестой главе излагаются некоторые обратные задачи, связанные с определением функции по значениям ее интегралов.

При изложении материала автор стремился сделать его доступным для широкого круга читателей. В связи с этим, а также с ограниченным объемом книги некоторые важные результаты упомянуты достаточно кратко. Поскольку книга представляет собой учебное пособие, в тексте не всегда упоминаются авторы конкретных утверждений, а список литературы, приводимый в конце книги, не претендует на библиографическую полноту. Вместе с тем он может служить определенным указателем при более детальном изучении теории обратных задач или некоторых ее разделов.

На содержание книги большое влияние оказали многолетнее научное общение с А.Н. Тихоновым, а также многочисленные обсуждения затрагиваемых вопросов с коллегами по научной и педагогической работе.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

§1. ЗАДАЧИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ПРИМЕРЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Цель многочисленных экспериментов, проводимых в различных областях науки и техники, состоит в изучении свойств объектов или процессов, интересующих исследователей. При этом весьма распространенными являются ситуации, в которых объект или процесс либо принципиально недоступны для непосредственного наблюдения, либо оно связано с очень большими затратами. В качестве примеров можно привести астрофизические эксперименты по изучению звезд, медицинские эксперименты, направленные на исследование внутренних органов человека, эксперименты для проверки качества различных изделий (неразрушающий контроль качества), эксперименты по изучению внутреннего строения земли с целью поиска полезных ископаемых и многие другие. Характерной чертой возникающих при этом задач интерпретации результатов эксперимента является то, что исследователь должен сделать заключение о свойствах объекта или процесса по измеренным в результате эксперимента их косвенным проявлениям. Например, определить место и мощность произошедшего землетрясения по измерениям колебаний на поверхности земли. Таким образом, речь идет о задачах, в которых требуется определить причины, если известны полученные в результате наблюдений следствия. Задачи такого типа естественно называть обратными. Решение подобных задач, состоящих в обращении причинно-следственных связей, как правило, связано с преодолением существенных трудностей, и успешный результат зависит как от количества и качества экспериментальной информации, так и совершенства методов ее обработки. Первый из указанных факторов представляет собой техническую проблему, решаемую экспериментатором, в то время как второй — обработка результатов эксперимента — одна из обширных сфер приложения математических методов.

Решение обратных задач проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта или процесса и состоит в определении параметров математической модели по имеющейся экспериментальной информации. Приведем примеры постановок обратных задач.

Пример 1. Процесс радиоактивного распада описывается физическим законом, заключающимся в том, что скорость распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества, имеющемуся в данный момент времени. Коэффициент пропорциональности α, являющийся характерной для данного вещества постоянной, носит название коэффициента распада. Таким образом, математическая модель процесса радиоактивного распада описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{dm}{dt} = -\alpha m(t), \quad t \geqslant t_0, \\ &m(t_0) = M, \end{aligned} \tag{1}$$

где $m(t)$ — количество вещества в данный момент времени, а M — количество радиоактивного вещества в начальный момент времени. Если постоянные α и M известны, то, решив задачу Коши, мы можем определить, как будет изменяться количество радиоактивного вещества с течением времени. Обратная задача для исследуемого процесса состоит в следующем. Вид радиоактивного вещества, т.е. постоянная α, и его первоначальное количество M неизвестны, но из эксперимента можно определить количество радиоактивного вещества $m(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$. Требуется по функции $m(t)$, заданной для $t \in [t_1, t_2]$, определить постоянные α и M. Таким образом, обратная задача заключается в определении коэффициента α в дифференциальном уравнении (1) и начального условия M по решению задачи Коши $m(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Рассмотренная обратная задача имеет естественное обобщение. Идет процесс радиоактивного распада нескольких веществ:

$$\frac{dm_i}{dt} = -\alpha_i m_i(t), \quad t \geqslant t_0, \; m_i(t_0) = M_i, \; i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Здесь $m_i(t)$ — количество радиоактивного вещества определенного типа в данный момент времени, M_i — его количество в начальный момент времени, α_i — коэффициент распада i-го радиоактивного вещества. Предположим, что величины α_i и M_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, неизвестны, но из эксперимента может быть найдена функция $\bar{m}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)$, где $m_i(t)$ — решения задачи (2). Постановка обратной задачи в этом случае такова. Для $t \in [t_1, t_2]$ задана функция $\bar{m}(t)$, требуется определить постоянные α_i и M_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Отметим, что у этой обратной задачи могут быть две постановки. В первой число различных радиоактивных веществ N известно, а во второй N неизвестно. Таким образом, во втором случае требуется определить количество радиоактивных веществ N, их коэффициенты распада α_i и первоначальные массы M_i, если известна суммарная масса радиоактивных веществ $\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Пример 2. Процесс химической кинетики описывается математической моделью, представляющей собой задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_i}{dt} = a_{i1}c_1(t) + a_{i2}c_2(t) + \cdots + a_{in}c_n(t), \tag{3}$$

$$c_i(t_0) = \bar{c}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Функция $c_i(t)$ представляет собой концентрацию i-го вещества, участвующего в процессе, в момент времени t. Постоянные параметры a_{ij}, определяющие ход процесса, характеризуют зависимость скорости изменения концентрации i-го вещества от концентрации веществ, участвующих в процессе. Для системы дифференциальных уравнений (3) может быть сформулирована следующая обратная задача. В течение некоторого интервала времени $t \in [t_1, t_2]$ измеряются концентрации веществ $c_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и требуется определить величины параметров a_{ij}, т.е. по решению системы дифференциальных уравнений (3) требуется определить ее коэффициенты. Эта обратная задача может рассматриваться в двух вариантах. Первый — начальные условия (4) известны, т.е. $\bar{c}_i$ заданы и измеряются решения $c_i(t)$, соответствующие этим $\bar{c}_i$, во втором варианте $\bar{c}_i$ неизвестны, и их нужно определить вместе с a_{ij}.

Пример 3. Пусть в пространстве расположено некоторое тело, которое по тем или иным причинам нам недоступно. Однако можно освещать тело с различных сторон и регистрировать получаемую при этом тень тела. При определенных допущениях мы приходим к следующей математической постановке обратной задачи. Требуется определить форму тела, если известны его ортогональные проекции на различные плоскости.

Пример 4. Движение материальной точки по прямой в соответствии с законом Ньютона описывается дифференциальным уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F, \tag{5}$$

где m — масса точки, $x(t)$ — ее положение в момент времени t, F — сила, действующая на точку. Начальное положение точки и ее скорость известны $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$. Требуется определить силу F, которая зависит от положения точки $F = F(x)$, если для различных значений массы задано положение, которое занимает точка в определенный момент времени $t = t_1$.Таким образом, величина массы точки m является параметром, и обратная задача состоит в определении функции $F(\xi)$ по решению дифференциального уравнения (5) $z(t,m)$, заданному при $t = t_1$ и $m \in [m_1, m_2]$.

Пример 5. Действие многих приборов, регистрирующих физические поля, может быть описано следующим образом. На вход прибора поступает сигнал $z(t)$, а на выходе регистрируется функция $u(t)$. Простая, линейная модель действия прибора определяется формулой

$$\int_0^t K(t,\tau)z(\tau)d\tau = u(t), \tag{6}$$

где $K(t,\tau)$ — известная функция. Таким образом, обратная задача, состоящая в определении входного сигнала $z(t)$ по регистрируемой на выходе функции $u(t)$, представляет собой задачу решения интегрального уравнения (6), в котором функции $K(t,\tau)$ и $u(t)$ заданы, а $z(t)$ неизвестна.

Пример 6. Один из классов обратных задач образуют задачи, в которых требуется определить неизвестную функцию по семейству интегралов от этой функции. Примером задачи такого типа является возникающая в компьютерной томографии задача определения функции двух переменных $f(x,y)$ по семейству интегралов

$$\int_{L(p,\varphi)} f(x,y)dl,$$

взятых вдоль различных прямых $L(p,\varphi)$ (p и φ параметры, определяющие прямую) в плоскости x, y.

Пример 7. Краевая задача для уравнения теплопроводности

$$cu_t = (ku_x)_x - qu + f, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T, \tag{7}$$

$$u(0,t) - \lambda_1 u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$u(l,t) + \lambda_2 u_x(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{10}$$

является математической моделью многих физических процессов. Коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, представляют собой некоторые эффективные характеристики исследуемого процесса. В том случае, когда задача (7)–(10) описывает процесс распространения тепла в стержне, коэффициенты c и k являются соответственно коэффициентами теплоемкости и теплопроводности и характеризуют материал, из которого изготовлен стержень. Теплофизическую интерпретацию имеют также все остальные функции, входящие в уравнение (7), краевые условия (8),

(9) и начальное условие (10). В рамках данной математической модели температура в стержне в точке x в момент времени t — функция $u(x,t)$, являющаяся решением задачи (7)–(10), определяется величинами c, k, q, f, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, φ — характеристиками теплофизического процесса. В том случае, когда они заданы, решив прямую задачу (7)–(10), можно найти $u(x,t)$, т.е. определить характер процесса распространения тепла в стержне. Однако во многих реальных теплофизических процессах те или иные характеристики среды не известны, но из эксперимента можно получить дополнительную информацию о температуре. Например, все коэффициенты и функции, определяющие решение $u(x,t)$, кроме коэффициента теплопроводности $k = k(x)$, известны. Из эксперимента определяется функция $g(t) = u(x_0,t)$ — температура в некоторой внутренней точке стержня — как функция от времени. Таким образом, возникает следующая обратная задача: определить коэффициент теплопроводности $k(x)$, если задана функция $g(t)$. Очевидно, что аналогично могут быть поставлены и другие обратные задачи для исходной краевой задачи (7)–(10), причем это могут быть как задачи определения коэффициентов уравнения, так и задачи определения одной из функций $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$, входящих в краевые и начальные условия. Многообразие возможных обратных задач определяется не только многими возможными неизвестными величинами, входящими в уравнение и дополнительные условия, но и различными типами задания дополнительной информации, т.е. характером проведения эксперимента.

Приведенные примеры не могут дать полного представления о многообразии обратных задач и их математических постановок. Следует особо выделить класс обратных задач для уравнений в частных производных, поскольку эти уравнения наиболее часто употребляются для построения математических моделей самых разнообразных процессов. В том случае, когда те или иные характеристики этих процессов неизвестны и их требуется определить по имеющейся экспериментальной информации, возникают обратные задачи для уравнений в частных производных.

Все обратные задачи, которые были рассмотрены выше, могут быть сведены в общую абстрактную формулировку. Обозначим через z неизвестную характеристику математической модели исследуемого объекта или процесса, а через A — оператор, ставящий в соответствие z величину u, которая наблюдается в результате эксперимента. Таким образом, обратная задача состоит в решении уравнения $Az = u$, где оператор A и правая часть u заданы и требуется определить z. Для обратной задачи, рассмотренной в первом примере, z представляет собой пару чисел α и M, оператор A определяется задачей Коши, а $u = m(t)$. В случае обратной задачи для уравнения теплопроводности, состоящей в определении коэффициента теплопроводности, $z = k(x)$ — коэффициент теплопроводности, A — оператор, определяемый краевой задачей (7)–(10), который при всех фиксированных остальных параметрах задачи ставит в соответствие различным коэффициентам теплопроводности $k(x)$ различные решения задачи (7)–(10) $u = u(x_0, t)$, заданные в фиксированной точке x_0. Аналогично могут быть записаны в виде $Az = u$ и остальные обратные задачи.

Важной особенностью обратных задач, возникающих при обработке результатов эксперимента, является то, что исходная информация в этих задачах известна приближенно. Это объясняется тем, что приборы, с помощью которых проводятся наблюдения, имеют определенный уровень погрешности. Таким образом, методы решения обратных задач должны обладать свойством устойчивости к малым изменениям в исходных данных.

§2. ПОНЯТИЕ О КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Понятие корректности постановки математической задачи было сформулировано Ж. Адамаром [94, 95] в связи с анализом различных задач для уравнений математической физики.

Решение любой количественной задачи состоит в определении некоторого элемента z (решения задачи) по исходным данным u и может быть записано в виде

$$z = R(u). \tag{1}$$

При этом обычно предполагается, что исходные данные u являются элементами некоторого метрического пространства U, а решение z ищется в метрическом пространстве Z, т.е. $z \in Z$.

Задача (1) называется корректно поставленной на паре пространств Z, U, если выполняются следующие условия:

1) для любого $u \in U$ решение задачи существует,

2) для любого $u \in U$ решение задачи единственно,

3) решение задачи z непрерывно зависит от исходных данных u.

Задачи, не удовлетворяющие этим условиям, называются некорректно поставленными.

Условия 1) и 2) характеризуют математическую определенность рассматриваемой задачи, а условие 3) — физическую детерминированность задачи. Достаточно естественно ожидать, что задачи, связанные с определением тех или иных следствий по причинам, будут корректными, в то время как задачи восстановления причин по их следствиям будут некорректными. Это соображение не имеет смысла рассматривать как точное утверждение, верное для любой из задач первого или второго типа. Оно является только выражением некоторых тенденций, характерных для этих типов задач. Приведем некоторые примеры корректно и некорректно поставленных задач.

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу вычисления значения интегрального оператора

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = z(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{2}$$

в которой при заданном ядре $K(x,s)$ требуется для любой функции $u(s)$, принадлежащей некотóрому пространству U, вычислить функцию $z(x)$ из пространства Z. Пусть функции $K(x,s)$, $K_x(x,s)$, $K_s(x,s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \leqslant x \leqslant d$, $a \leqslant s \leqslant b$, а U и Z представляют собой пространства непрерывных функций $U = C[a,b]$, $Z=C[c,d]$. Задача вычисления функции $z(x)$ по $u(s)$ является корректной. Действительно, для любой $u(s) \in C[a,b]$ интеграл, стоящий в левой части (2), представляет собой функцию, непрерывную на отрезке $[c,d]$, и эта функция определяется однозначно. Таким образом, первое и второе условия корректности задачи выполнены. Покажем, что выполняется и третье условие. Обозначим через

$$K_0 = \max_{\substack{c \leqslant x \leqslant d \\ a \leqslant s \leqslant b}} |K(x,s)|.$$

Пусть $z_i(x)$ — функции, вычисленные по $u_i(s)$, $i = 1,2$. Тогда из (2) следует, что

$$\|z_1 - z_2\|_{C[c,d]} \leqslant K_0 \|u_1 - u_2\|_{C[a,b]}.$$

Таким образом, условие непрерывной зависимости решения от исходных данных задачи также выполнено, и задача корректно поставлена.

П р и м е р 2. Рассмотрим задачу, обратную к предыдущей, т.е. задачу решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{3}$$

в которой при заданном ядре $K(x,s)$ требуется для любой функции $u(x)$ найти решение $z(s)$. Как и в предыдущем примере, предполагаем, что $K(x,s)$, $K_x(x,s)$, $K_s(x,s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \leqslant x \leqslant d$, $a \leqslant s \leqslant b$, $u(x) \in C[c,d]$ и $z(s) \in C[a,b]$. Задача решения уравнения (3) является некорректной. Действительно, для нее не выполняется первое условие, поскольку решение существует не для любой функции $u(x) \in C[c,d]$. Для того чтобы доказать это, достаточно взять функцию $u_0(x)$, непрерывную на

$[c,d]$, но не являющуюся дифференцируемой на этом отрезке. Для такой правой части $u_0(x)$ уравнение не может иметь непрерывное решение $z_0(s)$, поскольку из условий на ядро уравнения $K(x,s)$ следует, что для любой непрерывной функции $z(s)$ интеграл, стоящий в левой части (3), представляет собой функцию, непрерывно дифференцируемую.

Для уравнения (3) не выполнено также условие непрерывной зависимости решения от исходных данных. Рассмотрим последовательность $z_n(s) = z_0(s) + n\sin(n^2 s)$, $n = 0,1,2,\dots$. Эти функции являются решениями уравнения (3) с правыми частями

$$u_n(x) = \int_a^b K(x,s) z_n(s)\,ds, \quad n = 0,1,\dots .$$

Оценим $\|u_n - u_0\|_{C[c,d]}$. Так как

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leqslant \left| \int_a^b K(x,s) n \sin(n^2 s)\,ds \right| =$$

$$= \left| -K(x,s)\frac{1}{n}\cos(n^2 s)\Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b K_s(x,s)\cos(n^2 s)\,ds \right| \leqslant \frac{k_1}{n},$$

где постоянная k_1 не зависит от n, то

$$\|u_n - u_0\|_{C[c,d]} \leqslant \frac{k_1}{n}, \quad n = 1,2,\dots .$$

С другой стороны, из определения последовательности $z_n(s)$ следует, что

$$\|z_n - z_0\|_{C[a,b]} \to \infty \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Таким образом, исходные данные $u_n(x)$ сколь угодно близки к $u_0(x)$ при $n \to \infty$, а соответствующие решения $z_n(s)$ не сходятся к $z_0(s)$ при $n \to \infty$, что и означает отсутствие непрерывной зависимости.

Отметим, что единственность решения уравнения (3), т.е. выполнение второго условия корректности решения этой задачи зависит от конкретного вида ядра $K(x,s)$. Так как уравнение (3) является линейным, то его решение будет единственным при любой правой части $u(x)$ в том и только в том случае, если для $u(x) = 0$ уравнение имеет только нулевое решение. Покажем в качестве примера, что в случае $K(x,s) = e^{(x-s)}$ решение уравнения

(3) неединственно, а при $K(x,s) = e^{xs}$ — единственно. В первом случае однородное уравнение имеет вид

$$\int\limits_a^b e^{x-s} z(s)ds = 0, \quad c \leqslant x \leqslant d,$$

или

$$\int\limits_a^b e^{-s} z(s)ds = 0, \quad c \leqslant x \leqslant d,$$

и, очевидно, имеет ненулевое решение. Во втором случае однородное уравнение записывается так:

$$\int\limits_a^b e^{xs} z(s)ds = 0, \quad c \leqslant x \leqslant d.$$

Дифференцируя это уравнение n раз, получим

$$\int\limits_a^b e^{xs} s^n z(s)ds = 0, \quad c \leqslant x \leqslant d. \tag{4}$$

Это равенство выполнено при любом $n = 0, 1, \ldots$. Положив в (4) $x = x_0$, где x_0 — произвольная точка отрезка $[c, d]$, и обозначив через $z_1(s)$ функцию $e^{x_0 s} z(s)$, получим

$$\int\limits_a^b s^n z_1(s)ds = 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

Так как система функций s^n, $n = 0, 1, \ldots$, полна на отрезке $[a, b]$, то из равенств (5) следует, что $z_1(s) = 0$ для $s \in [a, b]$, а значит, $z(s) = 0$ для $s \in [a, b]$ и уравнение (3) с данным ядром имеет единственное решение.

Пример 3. Рассмотрим задачу решения системы линейных алгебраических уравнений n-го порядка

$$Az = u, \tag{6}$$

где A — квадратная матрица, а $u \in R^n$ и $z \in R^n$. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то для любого вектора правой части $u \in R^n$ существует единственное решение системы (6) — вектор $z \in R^n$, который имеет вид $z = A^{-1}u$, где A^{-1} — матрица, обратная к A. Из этого представления для решения следует также его непрерывная зависимость от исходных данных u.

В том случае, когда определитель A равен нулю, система (6) имеет решение не для любого $u \in R^n$, а если для некоторого u_0 решение существует, то оно будет неединственно. Следовательно, при $\det A = 0$ задача является некорректной.

Следует отметить, что корректность или некорректность задачи зависит не только от того, какого типа уравнением она определяется, но и от пространств U и Z. Поясним это на следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим задачу решения интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

в которой при заданном ядре $K(x,s)$ требуется для любой функции $u(x)$ найти решение $z(s)$. Предположим, что функция $K(x,s)$ непрерывна, имеет непрерывные первые частные производные при $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$ и $K(x,x) = 1$ для $x \in [0,1]$.

Рассмотрим задачу решения уравнения (7) в предположении, что $z(x)$ ищется в пространстве $C[0,1]$, а исходные данные $u(x) \in C_0[0,1]$, где через $C_0[0,1]$ обозначено множество непрерывных на $[0,1]$ функций, таких, что $u(0) = 0$, с введенной на нем равномерной метрикой. В этом случае аналогично тому, как это было сделано для уравнения Фредгольма 1-го рода в примере 2, можно показать, что задача решения уравнения (7) будет некорректна.

Предположим теперь, что функции $u(x)$ принадлежат пространству $C_0^1[0,1]$, т.е. множеству непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, таких, что $u(0) = 0$, в котором введена норма, равная

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)| + \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u'(x)|.$$

Пусть решение $z(x)$, как и в предыдущем случае, ищется в пространстве $C[0,1]$. Дифференцируя (7), имеем уравнение

$$z(x) + \int_0^x K_x(x,s)z(s)ds = u'(x), \tag{8}$$

являющееся интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Задача решения этого уравнения эквивалентна задаче решения уравнения (7). Для любой непрерывной правой части $u'(x)$ уравнение (8) имеет единственное непрерывное решение

$$z(x) = u'(x) + \int_0^x \Gamma(x,s)u'(s)ds, \tag{9}$$

где $\Gamma(x, s)$ — резольвента уравнения (8) [22]. Функция $\Gamma(x, s)$ непрерывна при $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$. Из представления (9) следует, что

$$\|z\|_{C[0,1]} \leqslant \text{const} \, \|u\|_{C_0^1[0,1]}.$$

Таким образом, в данном случае задача решения уравнения (7) корректна.

Следует, однако, отметить, что при решении задач, связанных с обработкой результатов эксперимента, выбор метрики, как правило, определяется характером эксперимента.

В качестве последнего приведем пример некорректной задачи, предложенный Адамаром.

Пример 5. Требуется найти функцию $z(x, y)$, такую, что $z(x, y)$ и $z_y(x, y)$, непрерывны при $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, l]$, $z_{xx}(x, y)$ и $z_{yy}(x, y)$ непрерывны при $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, l]$, $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$z_{xx} + z_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \; 0 < y \leqslant l,$$

и условиям

$$z(x, 0) = 0, \quad z_y(x, 0) = u(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Будем предполагать, что функции $u(x)$ ограничены и непрерывны при $x \in (-\infty, \infty)$. Введем на множествах функций $u(x)$ и $z(x, y)$ равномерные метрики. Покажем, что рассматриваемая задача является некорректной. Рассмотрим последовательность $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $u_0(x) = 0$. Этим функциям соответствуют решения $z_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny)$, $z_0(x, y) = 0$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |u_n(x) - u_0(x)| \to 0,$$

а

$$\sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqslant y \leqslant l}} |z_n(x, y) - z_0(x, y)| \to \infty.$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи не выполнено условие непрерывной зависимости решения от исходных данных, и она является некорректной.

Рассмотрим вопрос о корректности задачи решения операторного уравнения

$$Az = u, \tag{10}$$

где A — оператор, отображающий пространство Z в U (Z, U — линейные нормированные пространства). В соответствии с данным выше определением задача решения уравнения (10) будет корректной, если для любого $u \in U$ решение уравнения (10) существует, единственно и z непрерывно зависит от u. Из этих условий следует, что задача решения уравнения (10) будет корректной, если на U определен обратный оператор A^{-1}, являющийся непрерывным на U.

Приведем теорему Банаха об обратном операторе [55].

Теорема 1.2.1. *Если линейный ограниченный оператор A отображает все банахово пространство Z на все банахово пространство U взаимнооднозначно, то существует линейный ограниченный оператор A^{-1}, обратный оператору A, отображающий U на Z.*

Из этой теоремы следует, что для линейного непрерывного оператора, отображающего взаимно однозначно пространство Z на U, где Z и U — банаховы пространства, задача решения уравнения (10) является корректной. Теорема 1.2.1 показывает также определенную зависимость условий корректности задачи решения линейного операторного уравнения $Az = u$ в банаховых пространствах. Действительно, предположим, что оператор A непрерывен и уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение, т.е. выполнено второе условие корректности решения задачи. Тогда, если решение уравнения $Az = u$ существует для любого $u \in U$ (выполнено условие 1)), то существует ограниченный обратный оператор A^{-1} (выполнено условие 3)). Если же условие 3) не выполнено (нет непрерывной зависимости решения от правой части), то обязательно не выполнено и условие 1) (уравнение разрешимо не для любого $u \in U$).

Рассмотрим вопрос о корректности решения уравнения (10) в случае, когда A — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий банахово пространство Z в банахово пространство U, причем пространство Z таково, что шар в Z не является компактным множеством. Покажем, что в этом случае оператор A не имеет непрерывного обратного A^{-1}. Предположим, что это не так и оператор A^{-1} существует и непрерывен. Рассмотрим в пространстве Z шар S. Так как множество S не является компактным, то существует последовательность $z_n \subset S$, такая, что из нее нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к какому-нибудь элементу. С другой стороны, множество S ограничено, а оператор A вполне непрерывный. Следовательно, множество AS является компактным в U и из последовательности $u_n = Az_n \subset AS$ можно выделить подпоследовательность[1] $u_m = Az_m \subset AS$, сходящуюся к некоторому элементу u_0. Так как, по предположению, оператор A^{-1} непрерывен, то последовательность $z_m = A^{-1}u_m$

[1] С целью упрощения записи здесь и далее при обозначении подпоследовательности, как правило, изменяется буква, обозначающая целочисленный индекс.

сходится к элементу $A^{-1}u_0$, что противоречит исходным условиям выбора последовательности z_n. Таким образом, оператор A не имеет непрерывного обратного оператора A^{-1} и задача решения уравнения (10) не является корректной.

Уравнение (10) с линейным вполне непрерывным оператором A обычно называют линейным операторным уравнением 1-го рода, а уравнение $z - Az = u$ — линейным операторным уравнением 2-го рода. Как уже отмечалось, задача решения уравнения 1-го рода, при условии, что шар в пространстве Z не является компактным множеством, некорректна. В то же время из теорем Фредгольма [55] следует, что задача решения уравнения 2-го рода корректна, если единица не является собственным значением оператора A, и некорректна в противном случае.

§3. О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Понятия и примеры, приведенные в предыдущих параграфах, показывают, что обратные задачи, возникающие при обработке результатов экспериментов, как правило, являются некорректно поставленными. В связи с этим вопросы, связанные с существованием и единственностью решения этих задач, а также непрерывной зависимости решения от исходных данных обратной задачи, требуют дополнительного анализа. Этот анализ можно проводить для абстрактной постановки обратной задачи в виде задачи решения операторного уравнения $Az = u$.

Исследование любой обратной задачи, связанной с изучением некоторого реального объекта или процесса, проводится в рамках определенной математической модели. Это означает, что выбраны оператор A и класс элементов Z, содержащий искомую неизвестную характеристику $\bar{z}$. Класс U, которому принадлежит правая часть уравнения u, определяется типом экспериментальной информации, которая привлекается для решения обратной задачи. При этом предполагается, что в классе U существует элемент $\bar{u} = A\bar{z}$, который и пытаются измерить в результате эксперимента. Однако, так как в любом эксперименте измерения проводятся с некоторой погрешностью, то элемент $\bar{u}$ неизвестен, а задан приближенный элемент $\tilde{u}$ и величина погрешности δ, характеризующая близость $\tilde{u}$ к $\bar{u}$ в некоторой метрике. Таким образом, в рассматриваемой постановке задачи особое значение приобретают вопросы единственности и устойчивости решения обратной задачи. Исследование единственности решения обратной задачи, по сути дела, представляет собой ответ на вопрос о том, достаточно ли имеющейся экспериментальной информации для однозначного определения искомой характеристики изучаемого объекта или процесса. Проблема устойчивого решения обратных задач связана с построением таких методов, которые позволяют определять приближенные решения $\tilde{z}$, близкие к искомому $\bar{z}$, на основе имеющейся, приближенно заданной исходной информации $\tilde{u}$ и δ.

Впервые проблема устойчивого решения обратных задач была поставлена А.Н. Тихоновым [76]. В этой работе предложен подход к устранению неустойчивости решения обратной задачи, который основывается на использовании априорной информации о точном решении задачи $\bar{z}$. Априорная информация о точном решении достаточно часто имеется при анализе различных обратных задач. Как правило, она связана с тем, что неизвестная характеристика $\bar{z}$ представляет собой некоторую физическую величину, имеющую определенные свойства. В качестве примеров подобных свойств можно привести положительность, монотонность, ограниченность производной и многие другие. Такого типа априорная информация позволяет в ряде случаев сузить класс элементов Z, которому принадлежит точное решение $\bar{z}$, до некоторого множества M, на котором решение обратной задачи будет устойчиво. Обоснованием подобного подхода к устойчивому решению обратных задач является следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Пусть множество M метрического пространства Z взаимно однозначно отображается оператором A на множество N метрического пространства U. Тогда, если оператор A непрерывен на M и M — компакт, то обратный оператор A^{-1} непрерывен на N.*

Доказательство. Так как множество $N = AM$ есть взаимно однозначный образ множества M, то обратный оператор A^{-1} на множестве N существует. Покажем, что он непрерывен на N.

Предположим, что это не так. Тогда существует элемент $u_0 \in N$ и последовательность элементов $u_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\rho(u_n, u_0) \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как

$$\rho(z_n, z_0) \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $z_n = A^{-1}u_n$, $z_0 = A^{-1}u_0$. Так как последовательность z_n принадлежит множеству M и M — компакт, то из z_n можно выделить подпоследовательность z_m, такую, что $\rho(z_m, \hat{z}) \to 0$ при $m \to \infty$, где элемент $\hat{z} \in M$. Тогда из (1) следует, что $\rho(z_0, \hat{z}) \geqslant \varepsilon$. Так как оператор A непрерывен на M, а $\rho(z_m, \hat{z}) \to 0$ и $\rho(u_m, u_0) = \rho(Az_m, u_0) \to 0$ при $m \to \infty$, то $\rho(A\hat{z}, u_0) = 0$. Следовательно, $A\hat{z} = Az_0 = u_0$. Так как отображение A взаимно однозначно на M, то $\hat{z} = z_0$. Но это равенство противоречит неравенству $\rho(\hat{z}, z_0) \geqslant \varepsilon$. Таким образом, исходное предположение неверно и теорема доказана.

Идея сужения класса возможных решений обратной задачи до некоторого множества, на котором ее решение устойчиво, лежит в основе введенного М.М. Лаврентьевым [44] понятия корректности по Тихонову или условной корректности задачи.

Задача решения уравнения $Az = u$ называется корректно поставленной по Тихонову (условно-корректной), если выполнены следующие условия:

1) априори известно, что решение уравнения существует и принадлежит некоторому заданному множеству M пространства Z;

2) решение уравнения единственно на множестве M;

3) существует непрерывная зависимость решения уравнения от правой части u, когда вариации u не выводят решение за пределы множества M.

Соответствующее множество M называется множеством корректности.

Пусть Z и U — некоторые линейные нормированные пространства. В том случае, когда задача решения уравнения $Az = u$ условно-корректна и множество M — компакт в Z, возможно построение оценок устойчивости решения обратной задачи [44]. Эта возможность основана на следующей теореме.

Теорема 1.3.2. *Пусть оператор A отображает компакт $M \subset Z$ непрерывно и взаимно однозначно на множество $N = AM \subset U$. Тогда существует непрерывная в нуле функция $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$, такая, что для любых z_1 и $z_2 \in M$ выполнена оценка*

$$\|z_1 - z_2\| \leqslant \omega(\|Az_1 - Az_2\|). \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что функции $\omega(\tau)$, обладающей указанными свойствами, не существует. Тогда для любого натурального n найдутся элементы z_n^1, $z_n^2 \in M$, числовая последовательность $\tau_n \to 0$ при $n \to \infty$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\|Az_n^1 - Az_n^2\| \leqslant \tau_n, \tag{3}$$

$$\|z_n^1 - z_n^2\| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Так как последовательности z_n^1 и z_n^2 принадлежат компакту M, то из них можно выделить подпоследовательности z_m^1 и z_m^2, сходящиеся к принадлежащим M элементам z^1 и z^2 соответственно. Тогда из оценки (3) следует, что $\|Az^1 - Az^2\| = 0$ и из взаимно однозначности оператора на M имеем $z^1 = z^2$. Но из неравенства (4) следует, что $\|z^1 - z^2\| \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Оценки устойчивости типа (2), полученные в предположении, что решение принадлежит некоторому множеству M, называются оценками условной устойчивости. Примеры такого типа оценок для некоторых обратных задач содержатся в гл. 4.

Предыдущий подход к решению некорректных задач основывался на использовании априорной информации о принадлежности решения к некоторому множеству M. Однако для многих обратных задач характерна ситуация, когда априорная информация о принадлежности решения множеству M, на котором решение рассматриваемой задачи было бы устойчиво, отсутствует. Для построения приближенных решений некорректной задачи в этом случае используется фундаментальное понятие регуляризирующего оператора [79, 81].

Рассмотрим задачу решения уравнения $Az = u$, где A — оператор, отображающий Z в U (Z, U — линейные нормированные пространства).

Будем предполагать, что оператор A, пространства Z и U таковы, что эта задача некорректна. Пусть для точной правой части $\bar{u}$ существует единственное решение уравнения $\bar{z}$, т.е. $A\bar{z} = \bar{u}$. Однако элемент $\bar{u}$ неизвестен, а заданы u_δ и величина погрешности δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$. Требуется построить приближенное решение уравнения — элемент z_δ, который бы стремился к точному решению $\bar{z}$ при стремлении к нулю величины погрешности задания исходной информации δ. Так как задача является некорректной, то для построения приближенного решения нельзя использовать обратный оператор, т.е. брать в качестве z_δ элемент $A^{-1}u_\delta$. Это объясняется тем, что обратный оператор может быть не определен на u_δ и не являться непрерывным на U.

Для определения приближенного решения z_δ представляется естественным использовать всю исходную информацию, т.е. u_δ и величину погрешности δ.

Определение. *Оператор $R(u,\delta)$, действующий из пространства U в пространство Z, называется регуляризирующим для уравнения $Az = u$ (относительно элемента $\bar{u}$), если он обладает свойствами:*

1) *существует число $\delta_1 > 0$, такое, что оператор $R(u,\delta)$ определен для всех $\delta \in [0,\delta_1]$ и $u_\delta \in U$, удовлетворяющих неравенству $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0(\varepsilon, u_\delta) \leqslant \delta_1$, такое, что из неравенства*

$$\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta \leqslant \delta_0$$

следует неравенство $\|z_\delta - \bar{z}\| \leqslant \varepsilon$, где $z_\delta = R(u_\delta,\delta)$.

В этом определении допускается многозначность оператора $R(u,\delta)$. Через z_δ обозначается произвольный элемент из множества значений $R(u,\delta)$.

Для теории приближенных методов типичной является ситуация, когда конкретный метод приближенного решения задачи зависит от некоторого параметра. Это может быть шаг сетки, номер числа итераций и т.д. В связи с этим часто используется следующая схема построения регуляризирующего оператора. Задается некоторое семейство операторов $R(u,\alpha)$, действующих из U в Z и зависящих от некоторого параметра α. Затем параметр α выбирается в зависимости от δ и u_δ: ($\alpha = \alpha(\delta, u_\delta)$) так, чтобы

$R(u_\delta, \alpha(\delta, u_\delta)) \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. Методы построения конкретных регуляризирующих операторов рассмотрены во второй главе.

Задачу приближенного решения уравнения $Az = u$ можно рассматривать в более общем случае приближенного задания исходных данных, когда не только правая часть u, но и оператор A заданы с погрешностью. Так как общие принципы построения приближенного решения уравнения при такой постановке задачи, как правило, остаются теми же, что и при точно заданном операторе A, то в этой книге для простоты изложения рассматривается только случай точно заданного оператора.

Остановимся на взаимосвязи между проблемой решения обратных задач, связанных с интерпретацией наблюдений и математическим моделированием. Как уже отмечалось, обратные задачи решаются в рамках некоторой принятой математической модели исследуемого объекта или процесса. Однако при исследовании конкретного процесса достаточно часто вид математической модели заранее не известен, и она выбирается, а затем уточняется в процессе решения обратной задачи. Это связано с тем, что один и тот же процесс может быть описан математическими моделями различного типа — более простыми, не учитывающими определенные факторы, или более сложными, которые их учитывают. Следует также отметить, что принятие математической модели определяет класс, которому принадлежат величины, подлежащие определению при решении обратной задачи. Для простой модели это могут быть некоторые постоянные, для более сложной — функции, зависящие от одной или нескольких переменных. С возрастанием количества экспериментальной информации и улучшением ее качества (повышение точности наблюдений), как правило, для интерпретации эксперимента необходимо применять более полные математические модели и решать обратные задачи в рамках этих моделей. Проблема выбора математической модели возникает при решении обратных задач, связанных с интерпретацией конкретных наблюдений. Математическое исследование обратной задачи проводится обычно в рамках фиксированной математической модели.

Глава II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Методы решения некорректных задач, сформулированных в виде операторных уравнений 1-го рода, представляют собой основу методов приближенного решения различных конкретных обратных задач. В этой главе кратко изложены основы методов решения некорректных задач. Более детальное изложение теории некорректных задач и методов их решения содержится в [7, 8, 14, 33, 44, 49, 59, 81, 84, 87].

§1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА НА КОМПАКТАХ. МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ

Рассмотрим операторное уравнение 1-го рода

$$Az = u, \tag{1}$$

где A — непрерывный оператор, действующий из метрического пространства Z в метрическое пространство U, такой, что задача решения уравнения (1) некорректна.

Предположим, что для точной правой части уравнения (1) $\bar{u}$ существует единственное решение $\bar{z}$, принадлежащее некоторому компакту M. Однако элемент $\bar{u}$ неизвестен, а заданы приближенная правая часть u_δ и величина погрешности δ, такие, что $\rho(u_\delta, \bar{u}) \leqslant \delta$. Требуется, зная u_δ и δ, предложить способ построения приближенных решений z_δ, которые бы стремились к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \to 0$. Рассмотрим множество

$$Z_\delta = \{z : \rho(Az, u_\delta) \leqslant \delta\}.$$

Так как задача решения уравнения (1) некорректна, то произвольный элемент этого множества нельзя рассматривать в качестве приближенного решения. Поскольку имеется априорная информация о принадлежности точного решения $\bar{z}$ компакту M, естественно сузить множество Z_δ, взяв его пересечение с компактом M, а именно $Z_\delta^M = Z_\delta \cap M$. Отметим, что для любого $\delta > 0$ множество Z_δ^M непусто, так как оно содержит точное решение $\bar{z}$. Покажем, что элементы множества Z_δ^M можно рассматривать в качестве приближенных решений уравнения (1).

Теорема 2.1.1. *При* $\delta \to 0$

$$\sup_{z \in Z_\delta^M} \rho(z, \bar{z}) \to 0.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда существуют последовательности $\delta_n \to 0$ и $z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M$, такие, что $\rho(z_{\delta_n}, \bar{z}) \geqslant \varepsilon$, где ε — некоторая положительная постоянная. Так как последовательность $z_{\delta_n} \subset M$, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_{\delta_k} \to z_0$. Тогда, переходя к пределу в неравенстве $\rho(z_{\delta_k}, \bar{z}) \geqslant \varepsilon$, получим, что

$$\rho(z_0, \bar{z}) \geqslant \epsilon. \tag{2}$$

Так как элемент $z_{\delta_k} \in Z_{\delta_k}^M$, то $\rho(Az_{\delta_k}, u_{\delta_k}) \leqslant \delta_k$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_k \to 0$, получим, что $\rho(Az_0, \bar{u}) = 0$. Следовательно, $Az_0 = A\bar{z} = \bar{u}$ и из единственности решения уравнения (1) с правой частью $\bar{u}$ имеем $z_0 = \bar{z}$. Но это равенство противоречит неравенству (2). Таким образом, исходное предположение неверно и теорема доказана.

Замечание. Доказательство теоремы 2.1.1 фактически совпадает с доказательством теоремы 1.3.1 о непрерывности обратного оператора на компакте. Однако в отличие от той теоремы здесь предполагалась единственность решения уравнения (1) не на всем компакте M, а только для точной правой части $\bar{u}$.

Приведем пример, иллюстрирующий отсутствие сходимости всех элементов множества Z_δ к точному решению $\bar{z}$. Пусть оператор A действует из R^1 в R^1 и определяется следующим образом: $Az = z/(z^2+1)$. Тогда уравнение $Az = \bar{u}$ с точной правой частью $\bar{u} = 0$ имеет единственное решение $\bar{z} = 0$. Пусть вместо $\bar{u}$ задана приближенная правая часть $u_\delta = \delta/2$ и величина погрешности δ. Множество Z_δ в этом случае будет представлять собой множество чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{z}{z^2+1} - \frac{\delta}{2} \right| \leqslant \delta.$$

Очевидно, что при любом $\delta > 0$ решением этого неравенства является число $z_\delta = 2/\delta$, не стремящееся к $\bar{z} = 0$ при $\delta \to 0$. В то же время, если M — отрезок $[-1, 1]$, то множество Z_δ^M (при достаточно малых δ) представляет собой множество чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{-1 + \sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \leqslant z \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 9\delta^2}}{3\delta},$$

и для него справедливо утверждение теоремы 2.1.1.

Метод квазирешений. В том случае, когда задача решения уравнения (1) некорректна, естественно попытаться так изменить понятие решения, чтобы при определенных условиях задача его определения была корректной.

В связи с этим В.К. Ивановым [30, 31] было введено понятие квазирешения. Пусть в уравнении (1) A — непрерывный оператор, действующий из линейного нормированного пространства Z в линейное нормированное пространство U, и M — компакт в Z.

Определение. *Квазирешением уравнения (1) называется элемент z_K, минимизирующий невязку $\|Az - u\|$ на множестве M*

$$z_K = \arg \inf_{z \in M} \|Az - u\|.$$

Из определения квазирешения следует, что оно существует для любого $u \in U$. Действительно, так как оператор A непрерывен, то невязка $\|Az - u\|$ является непрерывным функционалом, который достигает своей нижней грани на компакте M. Если $u \in AM$, то квазирешение z_K совпадает с обычным решением, так как в этом случае $\|Az_K - u\| = 0$.

Покажем, что при выполнении определенных условий квазирешение уравнения (1) существует, единственно и непрерывно зависит от правой части u [33].

Докажем предварительно некоторые утверждения. Обозначим через $r(u, N)$ расстояние от элемента u до компакта N, принадлежащего U,

$$r(u, N) = \inf_{g \in N} \|u - g\|.$$

Лемма 1. *Для любых $u_1, u_2 \in U$ справедливо неравенство*

$$|r(u_2, N) - r(u_1, N)| \leqslant \|u_1 - u_2\|. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент из N. Тогда

$$r(u_1, N) \leqslant \|u_1 - g\| \leqslant \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - g\|,$$
$$r(u_1, N) - \|u_2 - g\| \leqslant \|u_1 - u_2\|. \tag{4}$$

Так как N — компакт, то существует элемент $g_2 \in N$, такой, что $\|u_2 - g_2\| = r(u_2, N)$. Взяв в неравенстве (4) $g = g_2$, получим

$$r(u_1, N) - r(u_2, N) \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

Поменяв в этом неравенстве местами u_1 и u_2, имеем

$$r(u_2, N) - r(u_1, N) \leqslant \|u_2 - u_1\|.$$

Объединив два последних неравенства, получим (3), тем самым лемма 1 доказана.

Определение. *Проекцией элемента u на множество N называется элемент $g \in N$, такой, что*

$$\|u - g\| = r(u, N).$$

Очевидно, что если N компакт, то для любого элемента $u \in U$ проекция u на N существует, так как непрерывный функционал на компакте достигает своей точной нижней грани.

Определение. *Оператором проектирования P в линейном нормированном пространстве U на множество N называется оператор, ставящий в соответствие элементу $u \in U$ его проекцию $g = Pu$.*

В общем случае оператор проектирования может быть определен не для любого $u \in U$ (проекция не существует) и неоднозначен (для одного элемента существуют две и более проекций).

Лемма 2. *Оператор проектирования P на выпуклый компакт N в гильбертовом пространстве H определен для любого $u \in H$, однозначен и непрерывен.*

Доказательство. Существование проекции для любого $u \in H$ следует из того, что множество N — компакт. Докажем, что проекция единственна. Пусть у некоторого элемента u существуют две проекции g_1 и g_2:

$$\|u - g_1\| = \|u - g_2\| = r(u, N).$$

Покажем, что $g_3 = (g_1 + g_2)/2$ также будет проекцией u на N. Действительно, так как N выпукло, то $g_3 \in N$. С другой стороны,

$$\|u - g_3\| = \left\|u - \frac{g_1 + g_2}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|u - g_1\| + \frac{1}{2}\|u - g_2\| = r(u, N).$$

Следовательно, g_3 — проекция элемента u.

В гильбертовом пространстве для любых элементов u_1 и u_2 выполняется равенство

$$\|u_1 + u_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2 = 2(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2).$$

Записывая это равенство для элементов $u_1 = u - g_1$ и $u_2 = u - g_2$, получим

$$\|2u - (g_1 + g_2)\|^2 + \|g_1 - g_2\|^2 = 2(\|u - g_1\|^2 + \|u - g_2\|^2). \qquad (5)$$

Так как $\|2u - (g_1 + g_2)\|^2 = 4\left\|u - \frac{g_1+g_2}{2}\right\|^2 = 4(r(u, N))^2$, то из (5) следует, что $4(r(u, N))^2 + \|g_1 - g_2\|^2 = 4(r(u, N))^2$, или $\|g_1 - g_2\|^2 = 0$. Следовательно, проекция единственна и оператор P однозначен.

Докажем непрерывность P. Предположим, что это не так и существует последовательность $u_n \to u$, такая, что $Pu_n \not\to Pu$. Тогда существует подпоследовательность $u_k \to u$, такая, что $\|Pu_k - Pu\| \geqslant \varepsilon$, где ε — некоторая положительная постоянная. Так как подпоследовательность Pu_k принадлежит компакту N, то из нее, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность Pu_m, сходящуюся к элементу $q \in N$. Поскольку для элементов Pu_m выполнено неравенство $\|Pu_m - Pu\| \geqslant \varepsilon$, то, переходя к пределу, получим, что

$$\|q - Pu\| \geqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Оценим норму элемента $u - q$:

$$\|u - q\| \leqslant \|u - u_m\| + \|u_m - Pu_m\| + \|Pu_m - q\|. \tag{7}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\big|\|u_m - Pu_m\| - \|u - Pu\|\big| \leqslant \|u - u_m\|.$$

Тогда, переходя в неравенстве (7) к пределу и учитывая, что $u_m \to u$, а $Pu_m \to q$ при $m \to \infty$, получим $\|u - q\| \leqslant \|u - Pu\|$. Так как $q \in N$, то из этого неравенства следует, что q является проекцией элемента u на N, а значит, $q = Pu$. Но это равенство противоречит неравенству (6). Следовательно, исходное предположение неверно. Лемма доказана.

Теорема 2.1.2. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий линейное нормированное пространство Z в гильбертово пространство U, такой, что уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение, а M — выпуклый компакт в пространстве Z. Тогда для любого $u \in U$ квазирешение уравнения (1) существует, единственно и непрерывно зависит от u.*

Доказательство. Пусть u — произвольный элемент пространства U. По определению квазирешения z_k

$$\|Az_k - u\| = \inf_{z \in M} \|Az - u\|. \tag{8}$$

Существование квазирешения z_k следует из того, что A непрерывен, а M — компакт. Введем следующие обозначения: $N = AM$, $q = Az_k$. Тогда (8) можно записать следующим образом:

$$\|q - u\| = \inf_{g \in N} \|g - u\|,$$

т.е. $q = Pu$, где P — оператор проектирования на множество N. Следовательно, квазирешение z_k представимо в виде $z_k = A^{-1}Pu$. Так как из равенства $Az = 0$ следует, что $z = 0$, то A осуществляет взаимно однозначное отображение компакта M на компакт N. Следовательно, по теореме 1.3.1 о непрерывности обратного оператора на компакте, A^{-1} на N непрерывен. Тогда из однозначности и непрерывности оператора Pu, отображающего U на N, следует, что оператор $A^{-1}P$ однозначен и непрерывен, что и доказывает теорему.

Рассмотрим вопрос о применении метода квазирешений для решения уравнения (1) с приближенно заданной правой частью.

Пусть A — непрерывный оператор, отображающий линейное нормированное пространство Z в линейное нормированное пространство U. Пусть для точной правой части $\bar{u}$ уравнение (1) имеет единственное решение $\bar{z}$, принадлежащее компакту M. Предположим, что элемент $\bar{u}$ неизвестен, а вместо него задан u_δ. Обозначим через Z_k^δ множество квазирешений уравнения (1) на компакте M, соответствующих элементу u_δ.

Теорема 2.1.3. *Если* $\|u_\delta - \bar{u}\| \to 0$, *то* $\sup_{z \in Z_k^\delta} \|z - \bar{z}\| \to 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует такая последовательность элементов $u_{\delta_m} \to \bar{u}$ при $m \to \infty$ и последовательность квазирешений $z_m = \arg\inf_{z \in M} \|Az - u_{\delta_m}\|$, что $\|z_m - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Так как последовательность z_m принадлежит компакту M, то из нее можно выделить подпоследовательность $z_p \to z_0 \in M$, тогда $\|z_0 - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon$. Так как z_p — квазирешение, соответствующее элементу u_{δ_p}, и $\bar{z} \in M$, то

$$\|Az_p - \bar{u}\| \leqslant \|Az_p - u_{\delta_p}\| + \|u_{\delta_p} - \bar{u}\| \leqslant \|A\bar{z} - u_{\delta_p}\| + \|u_{\delta_p} - \bar{u}\| = 2\|u_{\delta_p} - \bar{u}\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим, что $\|Az_0 - \bar{u}\| = 0$. Следовательно, в силу единственности решения уравнения (1) с правой частью $\bar{u}$ имеем $z_0 = \bar{z}$. Но это равенство противоречит неравенству $\|z_0 - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon$. Таким образом, исходное предположение неверно и теорема доказана.

Замечание. Теорема 2.1.3 близка к теореме 2.1.1, однако в ней есть одно существенное отличие. В теореме 2.1.1 множество приближенных решений Z_δ^M строилось в предположении, что известны приближенно заданная правая часть u_δ и величина погрешности δ, множество же квазирешений Z_k^δ строится без использования информации о величине погрешности δ.

Теоремы 2.1.1 и 2.1.3 являются основой для построения устойчивых методов решения многих обратных задач. Очень часто, используя априорную информацию о решении задачи, можно сделать заключение о его принадлежности некоторому компакту M. Затем задача приближенного решения уравнения сводится к минимизации функционала невязки $\|Az - u_\delta\|$ на M. При этом, как это следует из теоремы 2.1.1, если задана величина погрешности δ, то процесс минимизации можно закончить, как только будет найден элемент z_δ, такой, что $\|Az_\delta - u_\delta\| \leqslant \delta$. Если же величина δ не известна, то нужно проводить процесс минимизации до конца для того, чтобы найти квазирешение.

Теоремы 2.1.1 и 2.1.3 были доказаны без предположения о линейности оператора A, что позволяет применять их для широкого класса обратных задач, которые сводятся к уравнению (1) с нелинейным непрерывным оператором A. Важное значение при этом имеет вопрос о единственности решения уравнения с точной правой частью.

Остановимся на еще одном моменте, связанном с решением уравнения (1) в предположении, что есть априорная информация о принадлежности точного решения компакту M. Это предположение кажется не очень обременительным, поскольку, даже не обладая почти никакой количественной информацией о точном решении, мы, как правило, можем взять столь большой компакт M, что он будет содержать точное решение. Например, решая задачу в пространстве непрерывных функций $Z = C[a,b]$ и предполагая, что точное решение $\bar{z} \in C^1[a,b]$, можно в качестве компакта M взять замыкание множества функций $z(x)$, таких, что

$$|z(x)| \leqslant c_1, \quad |z'(x)| \leqslant c_2, \quad x \in [a,b].$$

Тогда, не обладая определенной количественной информацией о $\bar{z}(x)$, можно предполагать, что, выбрав c_1 и c_2 достаточно большими, будем иметь $\bar{z} \in M$. После чего с теоретической точки зрения на основе теорем 2.1.1, 2.1.3 проблема устойчивого решения задачи с приближенно заданной правой частью будет решена. Однако следует отметить, что теоремы 2.1.1 и 2.1.3 имеют асимптотический характер, т.е. они утверждают, что множество приближенных решений сходятся к $\bar{z}$ при $\|u_\delta - \bar{u}\| \to 0$. В то же время на практике приходится решать задачу с конкретным u_δ. При этом если компакт M "очень большой", то множество приближенных решений Z_δ^M может быть велико и содержать элементы, далекие от $\bar{z}$. Точно так же при большом компакте M квазирешение, определенное для данного u_δ, может быть достаточно далеко от точного решения $\bar{z}$. Таким образом, точность методов, основанных на использовании априорной информации о принадлежности точного решения $\bar{z}$ компакту M, существенно зависит от множества M.

§2. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Б.21

Метод регуляризации А.Н. Тихонова широко применяется для решения линейных и нелинейных операторных уравнений 1-го рода. Прежде чем приступить к изложению этого метода, приведем некоторые необходимые сведения из функционального анализа.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Последовательность элементов x_n называется слабо сходящейся к x_0, если $(x_n, y) \to (x_0, y)$ для любого $y \in H$.

Справедливы следующие свойства слабо сходящихся последовательностей [55]:

1) если x_n слабо сходится к x_0, то $\|x_0\| \leqslant \underline{\lim} \|x_n\|$;

2) если x_n слабо сходится к x_0 и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, то $\|x_n - x_0\| \to 0$, т.е. из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость;

3) если последовательность x_n ограничена по норме, то из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу x_0;

4) линейный вполне непрерывный оператор отображает слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

Сформулируем необходимое условие экстремума функционалов в гильбертовом пространстве [15], введя предварительно понятие градиента.

Функционал $J(x)$, определенный для всех элементов гильбертова пространства, называется дифференцируемым в x_0, если существует такой линейный непрерывный функционал J'_{x_0}, что приращение функционала представимо в виде

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = J'_{x_0}(h) + \omega(x_0, h),$$

где $|\omega(x_0, h)|/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Функционал J'_{x_0} называется первой производной, или градиентом $J(x)$ в x_0.

По теореме об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [55] функционалу J'_{x_0} соответствует единственный элемент $c \in H$, такой, что $J'_{x_0}(h) = (c, h)$ и $\|J'_{x_0}\| = \|c\|$. В связи с этим для элемента c можно также использовать то же обозначение, что и для градиента. Тогда $J'_{x_0}(h) = (J'_{x_0}, h)$.

Для функционалов справедливо следующее необходимое условие экстремума. Пусть

$$J(x_0) = \inf_{x \in H} J(x)$$

и $J(x)$ дифференцируем в точке x_0. Тогда $J'_{x_0} = 0$.

Перейдем теперь к методу регуляризации Тихонова. Рассмотрим его вначале для задачи решения операторного уравнения 1-го рода

$$Az = u, \tag{1}$$

где A — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z и U — сепарабельные гильбертовы пространства). Так как оператор A вполне непрерывен, то задача решения решения уравнения (1) некорректна.

Предположим, что для точной правой части $\bar{u}$ уравнение (1) имеет единственное решение $\bar{z}$. Однако элемент $\bar{u}$ неизвестен, а вместо него заданы приближенная правая часть u_δ и величина погрешности δ: $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$. Требуется, зная u_δ и δ, построить приближенное решение уравнения (1) z_δ, которое бы сходилось к $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.

Рассмотрим функционал

$$M^\alpha(z) = \|Az - u\|^2 + \alpha\|z\|^2,$$

где α — положительный параметр.

Теорема 2.2.1. *Для любых $u \in U$ и $\alpha > 0$ функционал $M^\alpha(z)$ достигает своей нижней грани на единственном элементе.*

Доказательство. Так как $M^\alpha(z)$ неотрицательный, то на Z существует его нижняя грань $M_0 \geqslant 0$. Рассмотрим минимизирующую последовательность z_n, $M^\alpha(z_n) \to M_0$ при $n \to \infty$. Последовательность z_n можно считать упорядоченной так, что $M^\alpha(z_{n+1}) \leqslant M^\alpha(z_n)$, тогда $M^\alpha(z_n) = \|Az_n - u\|^2 + \alpha\|z_n\|^2 \leqslant M^\alpha(z_1) = M_1$. Следовательно, $\|z_n\| \leqslant (M_1/\alpha)^{1/2}$. Так как последовательность z_n ограничена по норме, то из нее можно выделить подпоследовательность z_k, слабо сходящуюся к z_0. Докажем, что на z_0 достигается нижняя грань $M^\alpha(z)$, т.е. $M^\alpha(z_0) = M_0$. Из слабой сходимости z_k к z_0 и вполне непререрывности оператора A следует, что $\|z_0\| \leqslant \underline{\lim}\|z_k\|$ и $\|Az_k - u\| \to \|Az_0 - u\|$. Из этих свойств последовательности z_k, а также из того, что она является минимизирующей, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется k_0, такое, что для $k \geqslant k_0$ выполнены неравенства

$$\alpha\|z_0\|^2 \leqslant \alpha\|z_k\|^2 + \varepsilon,$$
$$\|Az_0 - u\|^2 \leqslant \|Az_k - u\|^2 + \varepsilon, \quad M^\alpha(z_k) \leqslant M_0 + \varepsilon.$$

Из этих неравенств следует, что

$$M^\alpha(z_0) = \|Az_0 - u\|^2 + \alpha\|z_0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|Az_k - u\|^2 + \alpha\|z_k\|^2 + 2\varepsilon = M^\alpha(z_k) + 2\varepsilon \leqslant M_0 + 3\varepsilon.$$

Так как M_0 есть нижняя грань $M^\alpha(z)$ на Z, а число ε произвольно, то $M^\alpha(z_0) = M_0$.

Докажем, что элемент z_0, на котором достигается нижняя грань, единствен. Покажем, что функционал $M^\alpha(z)$ является дифференцируемым. Его приращение может быть представлено в виде

$$M^\alpha(z+h) - M^\alpha(z) =$$
$$= (A(z+h)-u, A(z+h)-u) + \alpha(z+h, z+h) - (Az-u, Az-u) - \alpha(z,z) =$$
$$= 2(Az-u, Ah) + 2\alpha(z,h) + (Ah, Ah) + \alpha(h,h) =$$
$$= 2(A^*Az - A^*u, h) + 2\alpha(z,h) + (Ah, Ah) + \alpha(h,h) =$$
$$= 2(A^*Az - A^*u + \alpha z, h) + (Ah, Ah) + \alpha(h,h),$$

где A^* — оператор, сопряженный с A. Так как

$$|(Ah, Ah) + \alpha(h, h)| \leqslant (\|A\|^2 + \alpha)\|h\|^2,$$

?

то из этого представления следует, что $M^\alpha(z)$ является дифференцируемым для любого z и его градиент равен $2(A^*Az - A^*u + \alpha z)$. Тогда, используя необходимое условие экстремума функционала, получим, что если на z_0 достигается нижняя грань $M^\alpha(z)$, то $A^*Az_0 - A^*u + \alpha z_0 = 0$, т.е. z_0 является решением уравнения

$$\alpha z + A^*Az = A^*u. \tag{2}$$

Таким образом, для того, чтобы доказать, что элемент z_0, на котором достигается нижняя грань $M^\alpha(z)$, единствен, достаточно показать, что уравнение (2) имеет только одно решение. Так как это уравнение линейное, то достаточно показать, что уравнение $\alpha z + A^*Az = 0$ имеет только нулевое решение. Предположим, что это не так и существует $z_1 \neq 0$, такой, что $\alpha z_1 + A^*Az_1 = 0$. Тогда $(\alpha z_1 + A^*Az_1, \alpha z_1 + A^*Az_1) = 0$, но это равенство можно переписать следующим образом:

$$\alpha^2(z_1, z_1) + 2\alpha(Az_1, Az_1) + (A^*Az_1, A^*Az_1) = 0.$$

Так как первое слагаемое $\alpha^2(z_1, z_1) > 0$, а второе и третье неотрицательны, то это равенство невозможно. Таким образом, уравнение (2) имеет только нулевое решение. Теорема доказана.

22 Покажем, что при определенных условиях элементы, на которых достигается нижняя грань функционала $M^\alpha(z)$, можно рассматривать в качестве приближенного решения уравнения (1) с неточно заданной правой частью. Обозначим через $z_{\alpha(\delta)}$ элемент, на котором достигается нижняя грань функционала

$$M^{\alpha(\delta)}(z) = \|Az - u_\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|z\|^2,$$

где $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$. Из теоремы 2.2.1 следует, что элемент $z_{\alpha(\delta)}$ существует и единствен.

Теорема 2.2.2. *Если $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\delta_k \to 0$, такие, что

$$\|z_{\alpha(\delta_k)} - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Так как на $z_{\alpha(\delta_k)}$ достигается нижняя грань $M^{\alpha(\delta_k)}(z)$, то $M^{\alpha(\delta_k)}(z_{\alpha(\delta_k)}) \leqslant M^{\alpha(\delta_k)}(\bar{z})$. Следовательно,

$$\alpha(\delta_k)\|z_{\alpha(\delta_k)}\|^2 \leqslant \|A\bar{z} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha(\delta_k)\|\bar{z}\|^2.$$

Так как $\|A\bar{z} - u_{\delta_k}\| = \|\bar{u} - u_{\delta_k}\| \leqslant \delta_k$, то

$$\|z_{\alpha(\delta_k)}\|^2 \leqslant \delta_k^2/\alpha(\delta_k) + \|\bar{z}\|^2. \tag{4}$$

Так как по условию теоремы величина $\delta_k^2/\alpha(\delta_k)$ ограничена, то последовательность $z_{\alpha(\delta_k)}$ ограничена по норме и из нее можно выделить подпоследовательность $z_{\alpha(\delta_m)}$, слабо сходящуюся к некоторому элементу z_0. Из свойства слабой сходимости и неравенства (4) следует, что

$$\|z_0\| \leqslant \underline{\lim}\|z_{\alpha(\delta_m)}\| \leqslant \overline{\lim}\|z_{\alpha(\delta_m)}\| \leqslant \|\bar{z}\|, \tag{5}$$

так как по условию теоремы $\delta_m^2/\alpha(\delta_m) \to 0$.

Так как $M^{\alpha(\delta_m)}(z_{\alpha(\delta_m)}) \leqslant M^{\alpha(\delta_m)}(\bar{z})$, то

$$\|Az_{\alpha(\delta_m)} - u_{\delta_m}\| \leqslant \left(\delta_m^2 + \alpha(\delta_m)\|\bar{z}\|^2\right)^{1/2}.$$

Оценим норму

$$\|Az_{\alpha(\delta_m)} - \bar{u}\| \leqslant \|Az_{\alpha(\delta_m)} - u_{\delta_m}\| + \|u_{\delta_m} - \bar{u}\| \leqslant \left(\delta_m^2 + \alpha(\delta_m)\|\bar{z}\|^2\right)^{1/2} + \delta_m.$$

Учитывая слабую сходимость $z_{\alpha(\delta_m)}$ к z_0, вполне непрерывность оператора A, условия теоремы и переходя к пределу при $\delta_m \to 0$, получим

$$\|Az_0 - \bar{u}\| = 0.$$

Следовательно, в силу единственности решения уравнения (1) $z_0 = \bar{z}$. Тогда из неравенства (5) следует, что $\|z_{\alpha(\delta_m)}\| \to \|\bar{z}\|$. Следовательно, последовательность $z_{\alpha(\delta_m)}$ слабо сходится к z_0 и $\|z_{\alpha(\delta_m)}\| \to \|z_0\|$. Тогда $\|z_{\alpha(\delta_m)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta_m \to 0$, что противоречит неравенству (3), и теорема доказана.

Приведем пример, показывающий необходимость условия $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ для сходимости приближенного решения $z_{\alpha(\delta)}$ к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \to 0$.

Оператор A^*A — линейный, вполне непрерывный, самосопряженный положительный оператор. Следовательно, по теореме Гильберта–Шмидта [37] существует ортонормированный базис собственных элементов φ_n оператора A^*A с положительными собственными значениями λ_n, стремящимися к нулю при $n \to \infty$. Обозначим через $\omega_n = \psi_n/\|\psi_n\|$, где $\psi_n = A\varphi_n$. Так как $(\psi_n, \psi_n) = (A\varphi_n, A\varphi_n) = (A^*A\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n(\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n$, то $\|\psi_n\| = \sqrt{\lambda_n}$. Рассмотрим последовательность приближенных правых частей уравнения (1) $u_{\delta_n} = \bar{u} + \delta_n\omega_n$, где $\delta_n = \sqrt{\lambda_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\|\omega_n\| = 1$, то $\|u_{\delta_n} - \bar{u}\| = \delta_n$. Пусть функция $\alpha(\delta)$ такова, что $\alpha(\delta) = \delta^2$, т.е. условие $\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$ не выполняется. Покажем, что в этом случае элементы $z_{\alpha(\delta_n)}$ не будут сходиться к

$\bar{z}$ при $\delta_n \to 0$. Элемент $z_{\alpha(\delta_n)}$, реализующий минимум функционала $M^{\alpha(\delta_n)}(z)$, является решением уравнения

$$\alpha(\delta_n) z_{\alpha(\delta_n)} + A^* A z_{\alpha(\delta_n)} = A^* u_{\delta_n}.$$

В дальнейшем для упрощения записи, $\alpha(\delta_n) = \delta_n^2$ будем обозначать через α_n.

Точное решение $\bar{z}$ уравнения $A\bar{z} = \bar{u}$ представимо в виде разложения в ряд Фурье по элементам φ_n

$$\bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) \varphi_k.$$

Покажем, что для элементов z_{α_n} справедливо представление

$$z_{\alpha_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}, \varphi_k)\lambda_k}{\alpha_n + \lambda_k} \varphi_k + \frac{\lambda_n}{\alpha_n + \lambda_n} \varphi_n.$$

Действительно,

$$\alpha_n z_{\alpha_n} + A^* A z_{\alpha_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n \frac{(\bar{z}, \varphi_k)\lambda_k}{\alpha_n + \lambda_k} \varphi_k + \frac{\alpha_n \lambda_n}{\alpha_n + \lambda_n} \varphi_n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}, \varphi_k)\lambda_k^2}{\alpha_n + \lambda_k} \varphi_k + \frac{\lambda_n^2}{\alpha_n + \lambda_n} \varphi_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) \lambda_k \varphi_k + \lambda_n \varphi_n = A^* \bar{u} + A^* \delta_n \omega_n = A^* u_{\delta_n}.$$

Покажем, что z_{α_n} не стремится к $\bar{z}$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$\|z_{\alpha_n} - \bar{z}\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\bar{z}, \varphi_k)\lambda_k}{\alpha_n + \lambda_k} - (\bar{z}, \varphi_k) \right] \varphi_k + \frac{\lambda_n}{\alpha_n + \lambda_n} \varphi_n \right\|^2 =$$

$$= \left\| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}, \varphi_k)\alpha_n}{\alpha_n + \lambda_k} \varphi_k + \frac{\lambda_n}{\alpha_n + \lambda_n} \varphi_n \right\|^2 =$$

$$= \alpha_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}, \varphi_k)^2}{(\alpha_n + \lambda_k)^2} - \frac{2(\bar{z}, \varphi_n)\alpha_n \lambda_n}{(\alpha_n + \lambda_n)^2} + \frac{\lambda_n^2}{(\alpha_n + \lambda_n)^2}.$$

Так как $\alpha_n = \delta_n^2 = \lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $(\bar{z}, \varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то первое и второе слагаемые в этой сумме стремятся к нулю при $n \to \infty$. В то же время третье слагаемое $\lambda_n^2 (\alpha_n + \lambda_n)^{-2} = 1/4$. Следовательно, $\|z_{\alpha_n} - \bar{z}\| \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова для решения нел нейных уравнений 1-го рода. Пусть A — непрерывный операто отображающий Z в U (Z, U — линейные нормированные прос ранства). Пусть V — взаимно однозначный, линейный, вполне н прерывный оператор, отображающий сепарабельное гильбертов пространство F в пространство Z. Предположим, что уравнен (1) имеет для точной правой части $\bar{u} \in U$ единственное решени $\bar{z} \in Z$, причем $\bar{z} = V\bar{f}$. Требуется найти приближенное реш ние этого уравнения, если точная правая часть $\bar{u}$ не известна, заданы u_δ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$.

Рассмотрим на пространстве F функционал

$$M^\alpha(f) = \|AVf - u\|^2 + \alpha\|f\|^2.$$

Теорема 2.2.3. *Для любых $\alpha > 0$ и $u \in U$ существует эл мент f_α, на котором функционал $M^\alpha(f)$ достигает своей нижне грани на F.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогичн доказательству первой части теоремы 2.2.1, в которой доказы вается существование элемента, на котором достигается нижня грань $M^\alpha(z)$.

Отметим, что в теореме 2.2.3 единственность элемента f_α н доказывается.

Обозначим через $F_{\alpha(\delta)}$ множество элементов, на которых до тигается нижняя грань функционала

$$M^{\alpha(\delta)}(f) = \|AVf - u_\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|f\|^2.$$

Докажем, что элементы множества $VF_{\alpha(\delta)}$ при определенны условиях на $\alpha(\delta)$ можно рассматривать в качестве приближенны решений уравнения (1).

Теорема 2.2.4. *Если $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta^2 \leqslant C\alpha(\delta)$ при $\delta \to 0$, где C — положительная постоянная, то*

$$\sup_{f \in F_{\alpha(\delta)}} \|Vf - \bar{z}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, числовая последовательность $\delta_n \to 0$ и последовательность элементов $f_{\alpha(\delta_n)} \in F_{\alpha(\delta_n)}$, такие, что

$$\|Vf_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Так как на $f_{\alpha(\delta_n)}$ достигается нижняя грань функционала $M^{\alpha(\delta_n)}(f)$, то

$$\|AVf_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|f_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leqslant \|AV\bar{f} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{f}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar{f}\|^2, \tag{7}$$

следовательно, $\|f_{\alpha(\delta_n)}\| \leqslant \left(\delta_n^2/\alpha(\delta_n) + \|\bar{f}\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(C + \|\bar{f}\|^2\right)^{1/2}$.

Таким образом, последовательность $f_{\alpha(\delta_n)}$ ограничена по норме и из нее можно выделить подпоследовательность $f_{\alpha(\delta_m)}$, слабо сходящуюся к $f_0 \in F$. Тогда $\|Vf_{\alpha(\delta_m)} - Vf_0\| \to 0$ при $\delta_m \to 0$ и из неравенства (6) следует, что

$$\|Vf_0 - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Используя неравенство (7), получим, что

$$\|AVf_{\alpha(\delta_m)} - \bar{u}\| \leqslant \|AVf_{\alpha(\delta_m)} - u_{\delta_m}\| + \|u_{\delta_m} - \bar{u}\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\delta_m^2 + \alpha(\delta_m)\|\bar{f}\|^2\right)^{1/2} + \delta_m.$$

Переходя к пределу при $\delta_m \to 0$, имеем

$$\|AVf_0 - \bar{u}\| = 0.$$

Следовательно, в силу единственности решения уравнения (1) с точной правой частью $\bar{u}$ имеем $Vf_0 = V\bar{f} = \bar{z}$. Так как это равенство противоречит неравенству (8), то исходное предположение неверно и теорема доказана.

Из теорем 2.2.2 и 2.2.4 следует, что задача приближенного решения уравнения (1) сводится к задаче минимизации функционала M^α, зависящего от положительного параметра α, называемого параметром регуляризации. Если оператор A линейный, то для определения элементов $z_{\alpha(\delta)}$ можно либо использовать методы минимизации функционала $M^{\alpha(\delta)}(z)$, либо находить $z_{\alpha(\delta)}$ из уравнения (2). В том случае, когда оператор A не является линейным, в конкретных ситуациях можно записать уравнение, являющееся необходимым условием экстремума, однако анализ свойств этого уравнения требует дополнительных исследований. Поэтому общими методами построения приближенного решения уравнения (1) с нелинейным оператором A являются методы, основанные на минимизации функционала $M^{\alpha(\delta)}$.

Метод регуляризации разработан А.Н. Тихоновым в цикле статей [78–80]. В более общем виде он изложен в [81].

§3. ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО НЕВЯЗКЕ

Б.

В предыдущем параграфе было доказано, что при согласовании скорости стремления к нулю параметра регуляризации $\alpha(\delta)$ с величиной погрешности δ приближенное решение $z_{\alpha(\delta)}$ сходится к точному $\bar{z}$ при $\delta \to 0$. Так как при решении практических задач приходится решать задачу при конкретной величине погрешности

δ, важно указать способ выбора $\alpha(\delta)$ при заданной величине δ, который бы, в то же время, обеспечивал сходимость $z_{\alpha(\delta)}$ к $\bar{z}$ при $\delta \to 0$. Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что параметр регуляризации $\alpha(\delta)$ можно однозначно определить как корень уравнения

$$\|A\hat{z}_\alpha - u_\delta\| = \delta,$$

где $\hat{z}_\alpha$ — элемент, на котором достигается нижняя грань функционала

$$\|Az - u_\delta\|^2 + \alpha \cdot \|z\|^2.$$

Пусть A — линейный, вполне непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z и U — сепарабельные гильбертовы пространства), уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение и замыкание области значений оператора A совпадает с U.

Рассмотрим для $\alpha > 0$ и $u \in U$ функционал

$$M^\alpha(z) = \|Az - u\|^2 + \alpha \cdot \|z\|^2.$$

При сделанных предположениях для любого $\alpha > 0$ и $u \in U$ существует единственный элемент z_α, на котором достигается нижняя грань $M^\alpha(z)$ (теорема 2.2.1)

Лемма 1. *Если $u \neq 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$, где z_α — элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $M^\alpha(z)$.*

Доказательство. В силу необходимого условия экстремума элементы z_{α_1} и z_{α_2} являются решениями уравнений

$$\alpha_1 z_{\alpha_1} + A^* A z_{\alpha_1} = A^* u,$$
$$\alpha_2 z_{\alpha_2} + A^* A z_{\alpha_2} = A^* u$$

соответственно. Предположим, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$, а $z_{\alpha_1} = z_{\alpha_2}$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $(\alpha_1 - \alpha_2) z_{\alpha_1} = 0$. Следовательно, $z_{\alpha_1} = 0$ и $A^* u = 0$. Из последнего равенства следует, что для любого $z \in Z$ скалярное произведение $(z, A^* u) = 0$. Но тогда $(Az, u) = 0$ для любого $z \in Z$. Так как замыкание области значений оператора A совпадает с U, то из равенства $(Az, u) = 0$, выполненного для любого $z \in Z$, следует, что $u = 0$. Так как это противоречит условию леммы, то исходное предположение неверно и лемма доказана.

Введем при $\alpha > 0$ функции

$$m(\alpha) = \|Az_\alpha - u\|^2 + \alpha \|z_\alpha\|^2,$$
$$\varphi(\alpha) = \|Az_\alpha - u\|^2, \quad \psi(\alpha) = \|z_\alpha\|^2,$$

где z_α — элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $M^\alpha(z)$.

Лемма 2. *Пусть $u \neq 0$, тогда для любых α_1, α_2, таких, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, справедливы неравенства $m(\alpha_1) < m(\alpha_2)$, $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$, $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$.*

Доказательство. Строгая монотонность функции $m(\alpha)$ следует из неравенств

$$m(\alpha_2) = \|Az_{\alpha_2} - u\|^2 + \alpha_2\|z_{\alpha_2}\|^2 > \|Az_{\alpha_2} - u\|^2 + \alpha_1\|z_{\alpha_2}\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|Az_{\alpha_1} - u\|^2 + \alpha_1 \cdot \|z_{\alpha_1}\|^2 = m(\alpha_1).$$

Докажем строгую монотонность $\psi(\alpha)$. Из леммы 1 следует, что $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$. Тогда в силу единственности элемента, на котором достигается нижняя грань,

$$M^{\alpha_1}(z_{\alpha_1}) < M^{\alpha_1}(z_{\alpha_2}),$$

или

$$\varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2) + \alpha_1\psi(\alpha_2).$$

Поменяв индексы, получим $\varphi(\alpha_2) + \alpha_2\psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1)$. Из двух последних неравенств следует, что $(\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_1) < (\alpha_1 - \alpha_2)\psi(\alpha_2)$. Тогда при $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$.

Докажем строгую монотонность $\varphi(\alpha)$. Так как $\varphi(\alpha_1)+\alpha_1\psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)+\alpha_1\psi(\alpha_2)$, то $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)+\alpha_1(\psi(\alpha_2)-\psi(\alpha_1))$. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $\psi(\alpha_2) < \psi(\alpha_1)$, а значит, $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$. Лемма доказана.

Обозначим через B_α оператор $\alpha E + A^*A$.

Лемма 3. *При $\alpha > 0$ оператор B_α отображает пространство Z на Z и имеет определенный на всем Z ограниченный обратный B_α^{-1}.*

Доказательство. Покажем, что для любого $z \in Z$ выполнено неравенство $\|B_\alpha z\| \geqslant \alpha\|z\|$. Действительно, так как

$$(B_\alpha z, B_\alpha z) = (\alpha z + A^*Az, \alpha z + A^*Az) =$$
$$= \alpha^2(z,z) + 2\alpha(Az, Az) + (A^*Az, A^*Az) \geqslant \alpha^2(z,z),$$

то $\|B_\alpha z\| \geqslant \alpha\|z\|$.

Обозначим через $R(B_\alpha)$ область значений оператора B_α. Докажем, что $\overline{R(B_\alpha)} = R(B_\alpha)$. Пусть последовательность $y_n \in R(B_\alpha)$ и $y_n \to y$. Покажем, что $y \in R(B_\alpha)$. Так как $y_n \in R(B_\alpha)$, то $y_n = B_\alpha x_n$. Из сходимости последовательности y_n следует, что она фундаментальна. Но поскольку для любых x_m и x_n, таких, что $B_\alpha x_n = y_n$, $B_\alpha x_m = y_m$, выполнено неравенство $\|y_n - y_m\| = \|B_\alpha(x_n - x_m)\| \geqslant \alpha\|x_n - x_m\|$, то последовательность x_n также является фундаментальной и в силу полноты пространства Z сходится к некоторому элементу $x_0 \in Z$. Тогда из сходимости $y_n \to y_0$, $x_n \to x_0$ и непрерывности B_α следует, что $B_\alpha x_0 = y_0$ и $\overline{R(B_\alpha)} = R(B_\alpha)$. Обозначим через Q подпространство, ортогональное к $R(B_\alpha)$. Покажем, что $Q = 0$. Пусть $y \neq 0$ и $y \in Q$.

Тогда для любого $z \in R(B_\alpha)$ имеем $(z, y) = 0$, т.е. для любого $z \in Z$ $(\alpha z + A^*Az, y) = 0$. Взяв в этом равенстве $z = y$, получим $\alpha(y, y) + (Ay, Ay) = 0$, что противоречит условию $y \neq 0$. Следовательно, $Q = 0$ и $R(B_\alpha) = Z$. Таким образом, B_α отображает Z на Z. Из неравенства $\|B_\alpha z\| \geqslant \alpha\|z\|$ следует, что отображение B_α взаимно однозначно и существует обратный оператор B_α^{-1}. Из неравенства $\|B_\alpha z\| \geqslant \alpha\|z\|$ следует ограниченность B_α^{-1}. Лемма доказана.

Сформулируем теорему об операторе, близком к оператору, имеющему обратный [55].

Пусть линейный непрерывный оператор K, отображающий E_x в E_y (E_x, E_y — линейные нормированные пространства), имеет обратный K^{-1} и линейный непрерывный оператор K_1 ($K_1 : E_x \to E_y$), такой, что $\|K_1\| < \|K^{-1}\|^{-1}$, тогда оператор $K + K_1$ имеет обратный и

$$\|(K + K_1)^{-1} - K^{-1}\| \leqslant \frac{\|K_1\|}{1 - \|K^{-1}\|\,\|K_1\|}\|K^{-1}\|^2. \qquad (1)$$

Л е м м а 4. *Функции $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ при $\alpha > 0$ непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $u = 0$, $z_\alpha = 0$ для любого $\alpha > 0$ и $m(\alpha) = \varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = 0$ для $\alpha > 0$.

Пусть $u \neq 0$. Покажем, что $\psi(\alpha)$ ограничена для $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$. Так как $M^\alpha(z_\alpha) < M^\alpha(0)$, то $\alpha\|z_\alpha\|^2 \leqslant \|u\|^2$ и $\psi(\alpha) \leqslant \alpha_0^{-1}\|u\|^2$ при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$.

Докажем непрерывность $m(\alpha)$. Так как $m(\alpha_1) \leqslant M^{\alpha_1}(z_{\alpha_2})$, то, вычитая из этого неравенства $m(\alpha_2)$, получим

$$m(\alpha_1) - m(\alpha_2) \leqslant (\alpha_1 - \alpha_2)\|z_{\alpha_2}\|^2.$$

Поменяв индексы, получим двухстороннее неравенство

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\|z_{\alpha_1}\|^2 \leqslant m(\alpha_1) - m(\alpha_2) \leqslant (\alpha_1 - \alpha_2)\|z_{\alpha_2}\|^2.$$

Отсюда, учитывая ограниченность $\|z_\alpha\|^2$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$, получим, что $m(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$. Так как α_0 было произвольно, то $m(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$.

Докажем непрерывность $\psi(\alpha)$ при $\alpha > 0$. Так как

$$\Big| \|z_{\alpha+\Delta\alpha}\| - \|z_\alpha\| \Big| \leqslant \|z_{\alpha+\Delta\alpha} - z_\alpha\| =$$
$$= \left\| \left((\alpha + \Delta\alpha)E + A^*A\right)^{-1}A^*u - \left(\alpha E + A^*A\right)^{-1}A^*u \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \left((\alpha + \Delta\alpha)E + A^*A\right)^{-1} - \left(\alpha E + A^*A\right)^{-1} \right\| \|A^*u\|,$$
$$\|(\alpha + \Delta\alpha)E + A^*A - \alpha E - A^*A\| = |\Delta\alpha|,$$

то, применяя при $|\Delta\alpha| < \|(\alpha E+A^*A)^{-1}\|^{-1}$ оценку (1), получим, что

$$\left| \|z_{\alpha+\Delta\alpha}\| - \|z_\alpha\| \right| \leqslant \frac{\|(\alpha E + A^*A)^{-1}\|^2|\Delta\alpha|}{1-|\Delta\alpha|\,\|(\alpha E + A^*A)^{-1}\|}\|A^*u\|.$$

Следовательно, учитывая ограниченность $\|z_\alpha\|$ при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, получим, что $\psi(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$.

Так как $\varphi(\alpha) = m(\alpha) - \alpha\psi(\alpha)$, то из непрерывности $m(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ при $\alpha > 0$ следует, что $\varphi(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $u \neq 0$, тогда*

$$\lim_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty}\varphi(\alpha) = \|u\|^2.$$

Доказательство. Так как замыкание области значений оператора A совпадает с U, то нижняя грань функционала невязки $\|Az-u\|$ на пространстве Z равна нулю. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент z_ε, такой, что $\|Az_\varepsilon-u\|^2 \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\|Az_\alpha - u\|^2 + \alpha\|z_\alpha\|^2 \leqslant \|Az_\varepsilon - u\|^2 + \alpha\|z_\varepsilon\|^2,$$
$$\|Az_\alpha - u\|^2 \leqslant \varepsilon + \alpha\|z_\varepsilon\|^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to +0$, получим, что $lim_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha) \leqslant \varepsilon$. Так как ε — произвольное положительное число и $\varphi(\alpha) > 0$ при $\alpha > 0$, то $\lim_{\alpha\to+0}\varphi(\alpha) = 0$.

Докажем второе утверждение леммы. Так как $M^\alpha(z_\alpha) \leqslant M^\alpha(0)$, то

$$\|Az_\alpha - u\|^2 + \alpha\|z_\alpha\|^2 \leqslant \|u\|^2,$$

следовательно, $\|z_\alpha\|^2 \leqslant \alpha^{-1}\|u\|^2$. Тогда $\|z_\alpha\| \to 0$ при $\alpha \to +\infty$. Таким образом, $\lim_{\alpha\to+\infty}\varphi(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\|Az_\alpha-u\|^2 = \|u\|^2$ и лемма доказана. Б.24

Перейдем к формулировке итогового результата. Итак, рассмотрим задачу решения операторного уравнения $Az = u$, где A — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z, U — сепарабельные гильбертовы пространства), такой, что замыкание области его значений совпадает с U. Предположим, что для точной правой части $\bar{u}$ уравнение $Az = \bar{u}$ имеет единственное решение $\bar{z}$, однако $\bar{u}$ неизвестно, а заданы u_δ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$ и $0 < \delta < \|u_\delta\|$.

Обозначим через $\hat{z}_\alpha$ элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $\|Az - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2$.

Теорема 2.3.1. *Для любого $\delta \in (0, \|u_\delta\|)$ существует единственный корень уравнения*

$$\hat{\varphi}(\alpha) = \|A\hat{z}_\alpha - u_\delta\|^2 = \delta^2$$

$\alpha(\delta)$ *и* $\|\hat{z}_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\hat{\varphi}(\alpha) = \|A\hat{z}_\alpha - u_\delta\|^2$. Из леммы 5 имеем $\lim_{\alpha\to+0}\hat{\varphi}(\alpha) = 0$, $lim_{\alpha\to+\infty}\hat{\varphi}(\alpha) = \|u_\delta\|^2$, а из лемм 2 и 4, что $\hat{\varphi}(\alpha)$ строго возрастает и непрерывна при $\alpha > 0$. Из этих свойств $\hat{\varphi}(\alpha)$ следует, что для любого $\delta \in (0, \|u_\delta\|)$ уравнение $\hat{\varphi}(\alpha) = \delta^2$ имеет единственное решение $\alpha(\delta)$.

Докажем, что $\hat{z}_{\alpha(\delta)} \to \bar{z}$ при $\delta \to 0$. Так как на $\hat{z}_{\alpha(\delta)}$ достигается нижняя грань функционала, то

$$\|A\hat{z}_{\alpha(\delta)} - u_\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|\hat{z}_{\alpha(\delta)}\|^2 \leqslant \|A\bar{z} - u_\delta\|^2 + \alpha(\delta)\|\bar{z}\|^2.$$

В силу того что $\|A\hat{z}_{\alpha(\delta)} - u_\delta\| = \delta$, а $\|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, из этого неравенства следует, что $\|\hat{z}_{\alpha(\delta)}\| \leqslant \|\bar{z}\|$.

Таким образом, $\|A\hat{z}_{\alpha(\delta)} - u_\delta\| = \delta$, $\|\hat{z}_{\alpha(\delta)}\| \leqslant \|\bar{z}\|$. Из этих равенства и неравенства аналогично доказательству теоремы 2.2.2, имеем $\|\hat{z}_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$, и теорема 2.3.1 доказана.

§4. МЕТОД НЕВЯЗКИ

Рассмотрим задачу решения уравнения 1-го рода

$$Az = u, \tag{1}$$

где A — непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z, U — линейные нормированные пространства). Предполагается, что непрерывной зависимости z от u нет, так что задача решения уравнения (1) некорректно поставлена. Отметим, что линейность оператора A не предполагается.

Пусть для точной правой части $\bar{u}$ существует единственное решение уравнения (1) $\bar{z}$, причем $\bar{z} = V\bar{f}$, где V — линейный, вполне непрерывный, взаимооднозначный оператор, отображающий сепарабельное гильбертово пространство F в Z, а $\bar{f} \neq 0$. Требуется найти приближенное решение уравнения (1), если точная правая часть $\bar{u}$ неизвестна, а заданы u_δ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$.

Рассмотрим в пространстве Z множество элементов

$$Z_\delta = \{z = Vf,\ f \in F; \|AVf - u_\delta\| \leqslant \delta\}.$$

В силу определения этого множества для любого $z \in Z_\delta$ выполнено неравенство $\|Az - u_\delta\| \leqslant \delta$. Однако, так как задача решения уравнения (1) некорректна, то произвольный элемент множества Z_δ нельзя рассматривать в качестве приближенного решения уравнения (1). Покажем, что метод невязки, основанный на выделении из множества Z_δ элементов, имеющих минимальную норму, обеспечивает сходимость приближенных решений к точному.

Обозначим через F_δ множество элементов пространства F, таких, что $\|AVf - u_\delta\| \leqslant \delta$. Отметим, что для любого $\delta > 0$ множество F_δ непусто, так как ему принадлежит элемент $\bar{f}$.

Теорема 2.4.1. *Для любого $\delta > 0$ во множестве F_δ существует элемент, имеющий минимальную норму.*

Доказательство. Так как для любого $\delta > 0$ справедливо $\|AV\bar{f} - u_\delta\| = \|\bar{u} - u_\delta\| \leqslant \delta$, то для любого $\delta > 0$ множество F_δ непусто, поскольку содержит элемент $\bar{f}$. Рассмотрим на множестве F_δ функционал $\|f\|$. Так как этот функционал ограничен снизу, то его нижняя грань на множестве F_δ конечна. Обозначим ее через J. Рассмотрим минимизирующую последовательность f_n, такую, что $f_n \in F_\delta$ и $\|f_n\| \to J$ при $n \to \infty$. Последовательность f_n можно считать упорядоченной так, что $\|f_n\| \leqslant \|f_{n-1}\|$ для любого n. Тогда для всех $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $\|f_n\| \leqslant \|f_1\|$. Так как последовательность f_n ограничена по норме, то из нее можно выделить подпоследовательность f_m, слабо сходящуюся к некоторому элементу f_0. Поскольку оператор V является вполне непрерывным, $\|Vf_m - Vf_0\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда, учитывая непрерывность оператора A, получим, что $\|AVf_m - AVf_0\| \to 0$ при $m \to \infty$. Так как элементы $f_m \in F_\delta$, то для них выполнено неравенство $\|AVf_m - u_\delta\| \leqslant \delta$. Следовательно, переходя к пределу при $m \to \infty$, имеем $\|AVf_0 - u_\delta\| \leqslant \delta$. Таким образом, элемент $f_0 \in F_\delta$.

Из слабой сходимости подпоследовательности f_m к f_0 следует, что

$$\|f_0\| \leqslant \underline{\lim}\, \|f_m\|. \tag{2}$$

Так как f_m является подпоследовательностью, минимизирующей последовательности f_n, то $\lim_{m\to\infty} \|f_m\| = J$ и из неравенства (2) следует, что $\|f_0\| \leqslant J$. Но элемент $f_0 \in F_\delta$, а J — нижняя грань функционала $\|f\|$ на множестве F_δ. Значит, $\|f_0\| = J$ и теорема доказана.

Рассмотрим множество $\bar{F}_\delta$, состоящее из элементов множества F_δ, на которых достигается минимум $\|f\|$ на множестве F_δ. Из теоремы 2.4.1 следует, что множество $\bar{F}_\delta$ не пусто. Покажем, что элементы множества $V\bar{F}_\delta$ можно рассматривать в качестве приближенных решений уравнения (1).

Теорема 2.4.2. *При $\delta \to 0$ $\sup_{z \in V\bar{F}_\delta} \|z - \bar{z}\| \to 0$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся положительное число ε, числовая последовательность $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность элементов $f_{\delta_n} \in \bar{F}_{\delta_n}$ такие, что

$$\|Vf_{\delta_n} - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Так как при любом δ_n $f_{\delta_n} \in \bar{F}_{\delta_n} \subset F_{\delta_n}$ и $\bar{f} \in F_{\delta_n}$, то для любого δ_n справедливо неравенство $\|f_{\delta_n}\| \leqslant \|\bar{f}\|$, поскольку f_{δ_n} минимизирует $\|f\|$ на множестве F_{δ_n}. Так как последовательность f_{δ_n} ограничена по норме, то из нее можно выделить подпоследовательность f_{δ_m}, слабо сходящуюся при $m \to \infty$ к некоторому элементу f^*. Так как оператор V вполне непрерывен, то $\|Vf_{\delta_m} - Vf^*\| \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда из неравенства (3) следует, что

$$\|Vf^* - \bar{z}\| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Элементы f_{δ_m} принадлежат множествам F_{δ_m}, следовательно, $\|AVf_{\delta_m} - u_{\delta_m}\| \leqslant \delta_m$. Следовательно,

$$\|AVf_{\delta_m} - \bar{u}\| \leqslant \|AVf_{\delta_m} - u_{\delta_m}\| + \|u_{\delta_m} - \bar{u}\| \leqslant 2\delta_m.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и учитывая непрерывность оператора A, имеем $\|AVf^* - \bar{u}\| = 0$. Так как уравнение $Az = \bar{u}$ имеет единственное решение $\bar{z}$, то $Vf^* = \bar{z}$. Но это неравенство противоречит неравенству (4). Следовательно, исходное предположение было неверно и теорема доказана.

Более подробно метод невязки изложен в [32, 33].

§5. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА

Итерационные методы применяются для решения широкого класса различных задач. Их можно использовать и при решении операторных уравнений 1-го рода с приближенно заданной правой частью, однако при этом необходимо учитывать специфику этих уравнений, связанную с их некорректностью.

Пусть A — линейный, вполне непрерывный оператор, отображающий пространство Z в U (Z, U — сепарабельные гильбертовы пространства). Предположим, что для точной правой части $\bar{u}$ уравнение

$$Az = \bar{u} \tag{1}$$

имеет единственное решение $\bar{z}$, но элемент $\bar{u}$ не известен, а заданы приближенная правая часть u_δ и величина погрешности δ так, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$.

Рассмотрим итерационный процесс

$$z_n = z_{n-1} + \mu(A^*u - A^*Az_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$
$$z_0 = \mu A^* u,$$

где A^* — оператор, сопряженный с A, μ — положительный числовой параметр.

Покажем, используя метод математической индукции, что элемент z_n, определяемый на n-м шаге итерационного процесса, представим в виде $z_n = R_n u$, где оператор R_n определяется следующим образом:

$$R_n = \mu \sum_{i=0}^{n} (E - \mu A^*A)^i A^*, \tag{3}$$

E — единичный оператор. Действительно, при $n = 1$ из (2) имеем

$$z_1 = \mu A^* u + (E - \mu A^* A) z_0 = \mu A^* u + (E - \mu A^* A)\mu A^* u = R_1 u.$$

Пусть $z_n = R_n u$. Тогда из (2) следует, что

$$z_{n+1} = \mu A^* u + (E - \mu A^* A) R_n u = \mu A^* u + \mu \sum_{i=0}^{n} (E - \mu A^* A)^{i+1} A^* u =$$

$$= \mu A^* u + \mu \sum_{i=1}^{n+1} (E - \mu A^* A)^i A^* u = R_{n+1} u.$$

Таким образом, представление $z_n = R_n u$ справедливо для любого n и n шагов итерационного процесса (2) эквивалентны применению к элементу u оператора R_n, определяемого формулой (3).

Исследуем условия сходимости итерационного процесса (2) к точному решению уравнения (1) $\bar{z}$, если в качестве начального приближения берется элемент, определяемый приближенно заданной правой частью $z_0 = \mu A^* u_\delta$.

Так как $A^* A$ вполне непрерывный, самосопряженный, положительный оператор, то из теоремы Гильберта–Шмидта [37] следует, что в пространстве Z существует ортонормированный базис собственных элементов $\{\varphi_j\}$ оператора $A^* A$, причем собственные значения λ_j ($A^* A \varphi_j = \lambda_j \varphi_j$) положительны и стремятся к нулю при $j \to \infty$. В дальнейшем будем считать, что базис $\{\varphi_j\}$ упорядочен по убыванию собственных значений, т.е. $\lambda_{j+1} \leqslant \lambda_j$ для всех $j \geqslant 1$.

Условия сходимости итерационного процесса (2) устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 2.5.1. *Пусть параметр μ положителен и меньше, чем $2(\|A^* A\|)^{-1}$. Если целочисленная положительная функция $n(\delta)$ такова, что $n(\delta) \to +\infty$ и $n(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$, то*

$$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $n > 0$. Так как

$$\|R_n u_\delta - \bar{z}\| \leqslant \|R_n u_\delta - R_n \bar{u}\| + \|R_n \bar{u} - \bar{z}\|, \tag{4}$$

то для оценки нормы $\|R_n u_\delta - \bar{z}\|$ достаточно оценить величины, стоящие в правой части неравенства (4).

Оценим норму оператора R_n. По условию теоремы $\mu \in (0, 2(\|A^* A\|)^{-1})$. Из этого условия следует, что $|1 - \mu\lambda_j| < 1$ для всех $j \geqslant 1$. Действительно, так как

$$\lambda_j \|\varphi_j\|^2 = (\lambda_j \varphi_j, \varphi_j) = (A^* A \varphi_j, \varphi_j) \leqslant \|A^* A \varphi_j\| \, \|\varphi_j\| \leqslant \|A^* A\| \, \|\varphi_j\|^2,$$

то для всех $j \geqslant 1$ справедливо неравенство $\lambda_j \leqslant \|A^*A\|$. Тогда для $\mu \in (0, 2(\|A^*A\|)^{-1})$ $0 < \lambda_j \mu < 2$ и для всех $j \geqslant 1$ выполнено неравенство $|1 - \mu\lambda_j| < 1$. Покажем, что $\|E - \mu A^*A\| = 1$. Пусть z — произвольный элемент из Z. Так как $\{\varphi_j\}$ базис собственных элементов оператора A^*A, то $z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j\varphi_j$ и $(E - \mu A^*A)z = \sum_{j=1}^{\infty}(1 - \mu\lambda_j)z_j\varphi_j$, где $z_j = (z, \varphi_j)$. Следовательно,

$$\|(E - \mu A^*A)z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(1 - \mu\lambda_j)^2 z_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} z_j^2 = \|z\|^2,$$

а значит, $\|E - \mu A^*A\| \leqslant 1$. Предположим, что $\|E - \mu A^*A\| = a < 1$. Так как $\lambda_j \to 0$ при $j \to \infty$, то существует число k, такое, что $(1 - \mu\lambda_k) > a$. Возьмем элемент $z_k = \varphi_k$. Тогда $\|(E - \mu A^*A)z_k\| = (1 - \mu\lambda_k)\|z_k\| > a\|z_k\|$. Так как это неравенство противоречит тому, что $\|E - \mu A^*A\| = a < 1$, то $\|E - \mu A^*A\| = 1$. Используя равенство $\|E - \mu A^*A\| = 1$, имеем

$$\|R_n\| \leqslant \mu \sum_{i=0}^{n} \|E - \mu A^*A\|^i \|A^*\| = \mu(n+1)\|A^*\|.$$

Следовательно,

$$\|R_n u_\delta - R_n \bar{u}\| = \|R_n(u_\delta - \bar{u})\| \leqslant \|R_n\|\,\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \mu(n+1)\|A^*\|\delta. \quad (5)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части неравенства (4). Так как $\bar{u} = A\bar{z}$, то

$$R_n\bar{u} - \bar{z} = \mu \sum_{i=0}^{n}(E - \mu A^*A)^i A^*A\bar{z} - \bar{z} =$$

$$= \mu \sum_{i=0}^{n}(E - \mu A^*A)^i \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\lambda_j\varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\varphi_j =$$

$$= \mu \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\lambda_j \sum_{i=0}^{n}(1 - \mu\lambda_j)^i\varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\varphi_j,$$

где $\bar{z}_j = (\bar{z}, \varphi_j)$. Так как

$$\sum_{i=0}^{n}(1 - \mu\lambda_j)^i = \left[1 - (1 - \mu\lambda_j)^{n+1}\right](\mu\lambda_j)^{-1},$$

то

$$R_n\bar{u} - \bar{z} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\left[1 - (1 - \mu\lambda_j)^{n+1}\right]\varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j\varphi_j = -\sum_{j=1}^{\infty}(1 - \mu\lambda_j)^{n+1}\bar{z}_j\varphi_j.$$

Следовательно,

$$\|R_n \bar{u} - \bar{z}\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_j)^{2(n+1)} \bar{z}_j^2 \right)^{1/2}$$

Покажем, что $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$, такое, что при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\|^2 \leqslant \varepsilon$. Так как

$$\|\bar{z}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}_j^2,$$

то существует $N_1 > 0$, такое, что

$$\sum_{j=N_1+1}^{\infty} \bar{z}_j^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, учитывая то, что $|1 - \mu\lambda_j| < 1$ для всех $j \geqslant 1$, получим

$$\|R_n \bar{u} - \bar{z}\|^2 = \sum_{j=1}^{N_1} (1 - \mu\lambda_j)^{2(n+1)} \bar{z}_j^2 + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_j)^{2(n+1)} \bar{z}_j^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N_1} (1 - \mu\lambda_j)^{2(n+1)} \bar{z}_j^2 + \sum_{j=N_1+1}^{\infty} \bar{z}_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N_1} (1 - \mu\lambda_j)^{2(n+1)} \bar{z}_j^2 + \varepsilon/2.$$

Так как $|1 - \mu\lambda_j| < 1$, то, выбирая достаточно большое N, мы получим, что для $n \geqslant N$ $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\|^2 \leqslant \varepsilon$. Таким образом, $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а значит, и $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\omega(n) = \|R_n \bar{u} - \bar{z}\|$. Из неравенств (4), (5) следует, что для любого целого $n \geqslant 1$

$$\|R_n u_\delta - \bar{z}\| \leqslant \mu(n+1)\|A^*\|\delta + \omega(n), \tag{6}$$

где $\omega(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть функция $n(\delta)$ удовлетворяет условию теоремы, тогда из оценки (6), следует, что $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$ и теорема доказана.

Из теоремы 2.5.1 следует, что если число итераций n согласовано с точностью задания правой части δ, то при $\delta \to 0$ итерационный процесс (2) с $z_0 = \mu A^* u_\delta$ сходится к точному решению уравнения (1) $\bar{z}$.

Приведем пример, показывающий, что если число итераций n стремится к бесконечности произвольно, без согласования с δ, то сходимости нет.

Пусть A — линейный, вполне непрерывный, самосопряженный, положительный оператор, отображающий сепарабельное гильбертово пространство в себя, причем уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение. Обозначим через $\{\varphi_j\}$ ортонормированный базис собственных элементов оператора A, упорядоченный по невозрастанию собственных значений λ_j.

Пусть для точной правой части $\bar{u}$ уравнение $Az = \bar{u}$ имеет решение $\bar{z}$. Рассмотрим последовательность приближенных правых частей $u_{\delta_k} = \bar{u} - \delta_k\varphi_k/2$, где $\delta_k = \sqrt{\lambda_k}$. Очевидно, что $\|u_{\delta_k} - \bar{u}\| \leqslant \delta_k = \sqrt{\lambda_k} \to 0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим норму разности приближенного решения $R_n u_{\delta_k}$ и точного $\bar{z}$

$$\|R_n u_{\delta_k} - \bar{z}\| = \|R_n\bar{u} - \delta_k R_n\varphi_k/2 - \bar{z}\| \geqslant \\ \geqslant \big|\|R_n\bar{u} - \bar{z}\| - \sqrt{\lambda_k}\|R_n\varphi_k\|/2\big|. \tag{7}$$

В теореме 2.5.1 было доказано, что $\|R_n\bar{u} - \bar{z}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Вычислим величину $\|R_n\varphi_k\|$. Из формулы (3) для оператора R_n следует, что

$$R_n\varphi_k = \mu\sum_{i=0}^{n}(E - \mu A^*A)^i A^*\varphi_k = \mu\sum_{i=0}^{n}(1 - \mu\lambda_k^2)^i\lambda_k\varphi_k = \\ = \mu\varphi_k\lambda_k\sum_{i=0}^{n}(1 - \mu\lambda_j^2)^i = \mu\lambda_k\varphi_k\frac{1 - (1 - \mu\lambda_k^2)^{n+1}}{\mu\lambda_k^2}.$$

Следовательно,

$$\|R_n\varphi_k\| = \frac{1 - (1 - \mu\lambda_k^2)^{n+1}}{\lambda_k} \quad \text{и} \quad \sqrt{\lambda_k}\|R_n\varphi_k\| = (1 - (1 - \mu\lambda_k^2)^{n+1})(\lambda_k)^{-1/2}.$$

Пусть $n \to \infty$ и $k \to \infty$ так, что $(1 - \mu\lambda_k^2)^{n+1} \to 0$, например, $n = \left[\frac{1}{\lambda_k}\right]^4$, где $[x]$ — целая часть числа x. Тогда $\sqrt{\lambda_k}\|R_n\varphi_k\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и $k \to \infty$. Следовательно, из (7) имеем $\|R_n u_{\delta_k} - \bar{z}\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и $k \to \infty$, в то время как $\|u_{\delta_k} - \bar{u}\| \to 0$ при $k \to \infty$.

§6. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА

Проекционные методы приближенного решения различных задач основаны на том, что приближенное решение ищется в виде конечномерной линейной комбинации некоторой системы функций. При использовании проекционных методов для решения операторных уравнений 1-го рода с вполне непрерывным оператором необходимо накладывать существенно более сильные условия на систему функций, с помощью которой строится приближенное решение. Существенно также наличие априорной информации о точном решении.

Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z, U — сепарабельные гильбертовы пространства), такой, что уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение. Предположим, что для точной правой части $\bar{u}$ существует решение $\bar{z}$ уравнения

$$Az = \bar{u}, \tag{1}$$

представимое в виде

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_N \neq 0, \tag{2}$$

где φ_i — известная линейно независимая система элементов в Z. В представлении (2) неизвестными являются число членов в сумме N и коэффициенты α_i. Информация о представлении точного решения уравнения (1) $\bar{z}$ в виде (2) представляет собой существенную априорную информацию о точном решении $\bar{z}$.

Рассмотрим метод приближенного решения уравнения (1) с неточно заданной правой частью, т.е. элемент $\bar{u}$ неизвестен, а заданы u_δ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$. Определим для $n \geqslant 1$ множества

$$Z_n^\delta = \left\{ z = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i,\ \|Az - u_\delta\| \leqslant q\delta \right\}, \tag{3}$$

где c_i — действительные числа, а заданная постоянная $q \geqslant 1$. Обозначим через $n(\delta)$ положительное целое число, такое, что

$$Z_{n(\delta)-1}^\delta = \varnothing, \quad Z_{n(\delta)}^\delta \neq \varnothing. \tag{4}$$

Теорема 2.6.1. *Существует $\delta_0 > 0$, такое, что $n(\delta) = N$ для $0 < \delta \leqslant \delta_0$ и*

$$\sup_{z \in Z_{n(\delta)}^\delta} \|z - \bar{z}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве U элементы $A\varphi_i$, $i = 1, \ldots, N$. Так как φ_i, $i = 1, \ldots, N$ линейно независимы и уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение, то элементы $A\varphi_i$, $i = 1, \ldots, N$ также линейно независимы. Обозначим через d_j, $j = 1, \ldots, N$ ортонормированную систему, полученную из $A\varphi_i$ в результате процесса ортогонализации:

$$d_j = \frac{\omega_j}{\|\omega_j\|}, \quad \omega_j = A\varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} (A\varphi_j, d_k) d_k. \tag{6}$$

Рассмотрим произвольный элемент z, такой, что $z = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$. Пусть $u = Az$, тогда

$$u = \sum_{j=1}^{N} (u, d_j) d_j.$$

Найдем выражения для величин (u, d_j). Из формулы (6) для элементов d_j следует, что

$$(u, d_j) = (Az, d_j) = \left(A \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i, d_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i (A\varphi_i, d_j) = \sum_{i=j}^{N} c_i (A\varphi_i, d_j), \quad (A\varphi_j, d_j) > 0. \tag{7}$$

Предположим, что первое утверждение теоремы неверно. Тогда так как $\bar{z} \in Z_N^\delta$ для любого δ, то существуют последовательность $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$ и последовательность элементов

$$z_{\delta_k} = \sum_{i=1}^{l} c_i(\delta_k) \varphi_i, \quad 0 < l < N,$$

такие, что

$$\|Az_{\delta_k} - u_{\delta_k}\|^2 \leqslant q^2 \delta_k^2. \tag{8}$$

Обозначим через U_l^1 подпространство в U, порождаемое элементами $d_1, \ldots, d_l$, а через U_l^2 — ортогональное дополнение U_l^1. Тогда $u_{\delta_k} = u_{\delta_k}^1 + u_{\delta_k}^2$, где $u_{\delta_k}^1 \in U_l^1$, $u_{\delta_k}^2 \in U_l^2$. Неравенство (8) с учетом (7) можно записать следующим образом:

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=j}^{l} c_i(\delta_k)(A\varphi_i, d_j) d_j - \sum_{j=1}^{l} (u_{\delta_k}^1, d_j) d_j \right\|^2 + \|u_{\delta_k}^2\|^2 \leqslant q^2 \delta_k^2.$$

Учитывая ортонормированность элементов d_j, $j = 1, \ldots, l$, получим

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=j}^{l} c_i(\delta_k)(A\varphi_i, d_j) - (u_{\delta_k}^1, d_j) \right)^2 \leqslant q^2 \delta_k^2. \tag{9}$$

Из этого неравенства следует, что $\sum_{i=1}^{l} c_i^2(\delta_k)$ ограничена при $\delta_k \to 0$ и из последовательности элементов $c(\delta_k)=(c_1(\delta_k),\ldots,c_l(\delta_k)) \in R^l$ можно выделить подпоследовательность $c(\delta_m)$, сходящуюся к $\hat{c} = (\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_l)$. Тогда, переходя к пределу при $\delta_m \to 0$ в неравенстве (9), получим

$$\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=j}^{l}\hat{c}_i(A\varphi_i,d_j)-(\bar{u},d_j)\right)^2=0.$$

Следовательно, элемент $\hat{z} = \sum_{i=1}^{l}\hat{c}_i\varphi_i$ является решением уравнения $Az = \bar{u}$. В силу предположения о единственности решения этого уравнения $\hat{z} = \bar{z}$. Но это равенство противоречит представлению (2), так как $l < N$. Следовательно, исходное предположение было неверно и существует $\delta_0 > 0$, такое, что для $\delta \in (0,\delta_0)$ $n(\delta) = N$.

Аналогично предыдущему можно доказать, что при $\delta \in (0,\delta_0)$ множества $Z^\delta_{n(\delta)} = Z^\delta_N$ ограничены. Учитывая также то, что для любого $z \in Z^\delta_{n(\delta)}$ выполнено неравенство $\|Az-u_\delta\| \leqslant q\delta$, аналогично предыдущему можно доказать справедливость утверждения (5). Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 2.6.1 на оператор не накладывались какие-либо условия, обеспечивающие корректность задачи решения уравнения (1). Основным условием, гарантирующим сходимость множества приближенных решений к точному, было условие (2), представляющее собой очень существенную априорную информацию о точном решении уравнения (1). В связи с тем, что априорная информация о точном решении уравнения бывает известна далеко не всегда, возникает следующий вопрос: при каких условиях можно использовать предложенную схему построения приближенных решений, если задача решения уравнения (1) некорректна, а априорная информация о точном решении отсутствует? Покажем, что сходимость приближенных решений будет иметь место при специальном выборе системы $\{\varphi_i\}$.

Пусть A — линейный, вполне непрерывный оператор, отображающий Z в U (Z, U — сепарабельные гильбертовы пространства), такой, что уравнение $Az = 0$ имеет только нулевое решение, а замыкание области значений A совпадает с U. Предположим, что $A\bar{z} = \bar{u}$, но $\bar{u}$ неизвестна, а заданы u_δ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$.

Так как оператор A^*A является вполне непрерывным, самосопряженным и положительным, то по теореме Гильберта–Шмидта существует ортонормированный базис собственных элементов оператора A^*A $\{\varphi_i\}$, $A^*A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,\ldots$.

Определим множества приближенных решений $Z^\delta_{n(\delta)}$ в соответствии с (3) и (4), взяв в качестве φ_i базис собственных элементов A^*A, а постоянную $q > 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ множества Z^δ_n

при достаточно большом n непусты и, следовательно, номер $n(\delta)$, определяемый условием (4), существует.

Теорема 2.6.2. *Если базис собственных элементов A^*A упорядочен по невозрастанию собственных значений, то при $\delta \to 0$*

$$\sup_{z \in Z^{\delta}_{n(\delta)}} \|z - \bar{z}\| \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве U систему элементов $\psi_i = A\varphi_i/\|A\varphi_i\|$, $i = 1, 2, \ldots$. Эта система образует ортонормированный базис в U. Ортогональность ψ_i и ψ_j при $i \neq j$ следует из того, что $(\psi_i, \psi_j) = (A\varphi_i, A\varphi_j)/\|A\varphi_i\|\,\|A\varphi_j\| = \lambda_i(\varphi_i, \varphi_j)/\|A\varphi_i\|\,\|A\varphi_j\| = 0$, а полнота системы $\{\psi_i\}$ следует из совпадения замыкания области значений оператора A с U.

Возможны два случая разложения точного решения $\bar{z}$ по элементам базиса $\{\varphi_i\}$:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{z}, \varphi_i)\varphi_i, \tag{10}$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)\varphi_i. \tag{11}$$

В случае (10) доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.6.1. Рассмотрим случай (11). Величина

$$\left\| A\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i - u_\delta \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i A\varphi_i - \sum_{i=1}^{n} (u_\delta, \psi_i)\psi_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)\psi_i \right\|^2 \tag{12}$$

принимает свое наименьшее значение при

$$c_i = (u_\delta, \psi_i)/\|A\varphi_i\| = (u_\delta, \psi_i)/\sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и это значение равно

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)\psi_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что число $n(\delta)$, определяемое условием (4), таково, что

$$\sum_{i=n(\delta)}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2 > q^2\delta^2, \qquad \sum_{i=n(\delta)+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2 \leqslant q^2\delta^2. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию целочисленного аргумента

$$\alpha(n) = \sqrt{\lambda_n}\left(\sum_{i=n}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2\right)^{1/4}$$

Эта функция не возрастает, и $\alpha(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\delta \in (0, \alpha(1))$ существует единственное положительное целое число $m(\delta)$, такое, что

$$\sqrt{\lambda_{m(\delta)}}\left(\sum_{i=m(\delta)}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2\right)^{1/4} > \delta, \tag{15}$$

$$\sqrt{\lambda_{m(\delta)+1}}\left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2\right)^{1/4} \leqslant \delta. \tag{16}$$

Из (11) и (16) следует, что $m(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Так как $(\bar{u},\psi_i) = (A\bar{z},\psi_i) = (\bar{z},A^*\psi_i) = \sqrt{\lambda_i}(\bar{z},\varphi_i)$, то

$$\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(u_\delta,\psi_i)^2 = \sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}\left[\sqrt{\lambda_i}(\bar{z},\varphi_i) - [(\bar{u},\psi_i)-(u_\delta,\psi_i)]\right]^2.$$

Тогда, используя неравенство Коши–Буняковского, невозрастание λ_i и неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}(u_\delta - \bar{u},\psi_i)^2 \leqslant \delta^2,$$

получим, что

$$\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(u_\delta,\psi_i)^2 \leqslant \sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}\lambda_i(\bar{z},\varphi_i)^2 +$$

$$+2\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}|(\bar{z},\varphi_i)(\bar{u}-u_\delta,\psi_i)| + \sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{u}-u_\delta,\psi_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{m(\delta)+1}\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2 + 2\sqrt{\lambda_{m(\delta)+1}}\left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{u}-u_\delta,\psi_i)^2\right)^{1/2} + \sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(u_\delta-\bar{u},\psi_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{m(\delta)+1}\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2 + 2\delta\sqrt{\lambda_{m(\delta)+1}}\delta\left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty}(\bar{z},\varphi_i)^2\right)^{1/2} + \delta^2.$$

Учитывая неравенство (16), имеем

$$\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \delta^2 \left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/2} + 2\delta^2 \left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/4} + \delta^2 = \delta^2(1+\gamma(\delta)), \quad (17)$$

где

$$\gamma(\delta) = \left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/2} + 2\left(\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/4} \to 0$$

при $\delta \to 0$, поскольку $m(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Тогда из неравенств $q > 1$, (14) и (17) следует, что существует $\delta_1 > 0$, такое, что при $\delta \in (0, \delta_1)$

$$\sum_{i=m(\delta)+1}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2 < q^2\delta^2 < \sum_{i=n(\delta)}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2.$$

Таким образом, при $\delta \in (0, \delta_1)$ выполнено неравенство $n(\delta) \leqslant m(\delta)$. Из этого неравенства, невозрастания функции $\alpha(n)$ и неравенства (15) следует, что

$$\sqrt{\lambda_{n(\delta)}} \left(\sum_{i=n(\delta)}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/4} > \delta. \quad (18)$$

Множество $Z^\delta_{n(\delta)}$ представляет собой совокупность элементов $\sum_{i=1}^{n(\delta)} c_i\varphi_i$, где постоянные c_i, $i = 1, 2, \ldots, n(\delta)$, удовлетворяют неравенству

$$\left\| A \sum_{i=1}^{n(\delta)} c_i\varphi_i - u_\delta \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} c_i\sqrt{\lambda_i}\psi_i - u_\delta \right\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n(\delta)} \left(c_i\sqrt{\lambda_i} - (u_\delta \psi_i) \right)^2 + \sum_{i=n(\delta)}^{\infty} (u_\delta, \psi_i)^2 \leqslant q^2\delta^2. \quad (19)$$

Множество элементов $(c_1, \ldots, c_{n(\delta)}) \in R^{n(\delta)}$, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собой ограниченное замкнутое множество в $R^{n(\delta)}$. Следовательно, существует элемент $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{n(\delta)})$, такой, что

$$\sup_{z \in Z^\delta_{n(\delta)}} \|z - \bar{z}\| = \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \bar{c}_i\varphi_i - \bar{z} \right\|,$$

при этом

$$\left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \bar{c}_i \varphi_i - \bar{z} \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} [\bar{c}_i - (\bar{z}, \varphi_i)] \varphi_i \right\| + \left\| \sum_{i=n(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i) \varphi_i \right\|. \qquad (20)$$

Оценим первую норму в правой части этого неравенства:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} [\bar{c}_i - (\bar{z}, \varphi_i)] \varphi_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \left[\bar{c}_i - \frac{(\bar{u}, \psi_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \right] \varphi_i \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \frac{\bar{c}_i \sqrt{\lambda_i} - (u_\delta, \psi_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \frac{(u_\delta - \bar{u}, \psi_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n(\delta)} (\bar{c}_i \sqrt{\lambda_i} - (u_\delta, \psi_i))^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n(\delta)} (u_\delta - \bar{u}, \psi_i)^2 \right)^{1/2} \right].$$

Следовательно, учитывая неравенства (19), $\|u_\delta - \bar{u}\| \leqslant \delta$, имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} [\bar{c}_i - (\bar{z}, \varphi_i)] \varphi_i \right\| \leqslant \frac{(q+1)\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}}.$$

Используя эту оценку в неравенстве (20), получим

$$\left\| \sum_{i=1}^{n(\delta)} \bar{c}_i \varphi_i - \bar{z} \right\| \leqslant \frac{(q+1)\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} + \left(\sum_{i=n(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\sup_{z \in Z^\delta_{n(\delta)}} \|z - \bar{z}\| \leqslant \frac{(q+1)\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} + \left(\sum_{i=n(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Учитывая неравенство (18), имеем

$$\sup_{z \in Z^\delta_{n(\delta)}} \|z - \bar{z}\| \leqslant (q+1) \left(\sum_{i=n(\delta)}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/4} + \left(\sum_{i=n(\delta)+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \right)^{1/2}. \qquad (21)$$

Из (11) и второго неравенства в (14) следует, что $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Тогда из (21) имеем

$$\sup_{z \in Z^\delta_{n(\delta)}} \|z - \bar{z}\| \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

и теорема доказана.

Отметим, что можно сформулировать более слабые предположения относительно системы элементов φ_i, при которых сохраняется сходимость приближенных решений, построенных при помощи рассмотренного метода [25].

§7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО РОДА

Задачи решения интегральных уравнений 1-го рода возникают при исследовании многих обратных задач. В этом параграфе рассмотрены некоторые вопросы, связанные с применением изложенных ранее общих методов решения операторных уравнений для решения интегральных уравнений 1-го рода.

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad c \leqslant x \leqslant d, \tag{1}$$

где $K(x,s)$ — функция с интегрируемым квадратом. Интегральный оператор A можно рассматривать действующим из пространства $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, причем он будет вполне непрерывным [37]. Предположим, что для точной правой части уравнения (1) $\bar{u}(x) \in L_2[c,d]$ существует единственное решение $\bar{z}(x) \in L_2[a,b]$, однако $\bar{u}(x)$ нам не известно, а задана функция $u_\delta(x)$ и величина погрешности δ, такие, что

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2[c,d]} = \left(\int_c^d (u_\delta(x) - \bar{u}(x))^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \delta.$$

Требуется построить приближенное решение уравнения (1) $z_\delta(s)$, такое, что

$$\|z_\delta - \bar{z}\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b (z_\delta(s) - \bar{z}(s))^2 ds \right)^{1/2} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

В дальнейшем будем также предполагать, что для функции $u_\delta(x)$ выполняется условие $\|u_\delta\|_{L_2[c,d]} > \delta$ и замыкание области значений оператора A совпадает с $L_2[c,d]$.

Рассмотрим применение метода регуляризации А.Н. Тихонова для приближенного решения уравнения (1). Определим на пространстве $L_2[a,b]$ функционал

$$M^\alpha(z) = \|Az - u_\delta\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha\|z\|^2_{L_2[a,b]} =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b K(x,s)z(s)ds - u_\delta(x)\right)^2 dx + \alpha\int_a^b z^2(s)ds. \qquad (2)$$

Из теоремы 2.2.1 следует, что для любого $\alpha > 0$ существует единственная функция $\hat{z}_\alpha(s)$, на которой достигается нижняя грань функционала (2). Для построения функции $\hat{z}_\alpha(s)$ можно использовать прямые методы минимизации функционала (2) либо определять $\hat{z}_\alpha(s)$ из уравнения, являющегося необходимым условием экстремума. Это уравнение, полученное в гл. 2, §2, в операторном виде записывается следующим образом: $\alpha\hat{z}_\alpha + A^*A\hat{z}_\alpha = A^*u_\delta$. Оператор A^*, сопряженный интегральному оператору A, действует из $L_2[c,d]$ в $L_2[a,b]$ и имеет вид

$$A^*f \equiv \int_c^d K(x,t)f(x)dx, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Следовательно, уравнение, представляющее собой необходимое условие минимума функционала (2), имеет вид

$$\alpha\hat{z}_\alpha(t) + \int_c^d K(x,t)\int_a^b K(x,s)\hat{z}_\alpha(s)dsdx = \int_c^d K(x,t)u_\delta(x)dx,$$

или

$$\alpha\hat{z}_\alpha(t) + \int_a^b K_1(t,s)\hat{z}_\delta(s)ds = \int_c^d K(x,t)u_\delta(x)dx, \qquad (3)$$

где ядро $K_1(t,s)$ определяется формулой

$$K_1(t,s) = \int_c^d K(x,t)K(x,s)dx. \qquad (4)$$

Функция $K_1(t,s)$ является симметричной функцией своих аргументов $K_1(t,s) = K_1(s,t)$. Уравнение (3) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Из полученных в §2,3 гл. 2 результатов следует, что это уравнение имеет единственное решение при любой функции $u_\delta(x) \in L_2[c,d]$ и параметре $\alpha > 0$. Из теоремы 2.2.2 следует, что при должном согласовании параметра α с величиной погрешности δ ($\alpha = \alpha(\delta)$) решение уравнения (3) будет сходиться к точному решению $\bar{z}(s)$ в метрике $L_2[a, b]$, если погрешность δ будет стремиться к нулю.

При заданной величине погрешности δ можно выбирать параметр регуляризации α, основываясь на теореме 2.3.1. Уравнение для определения параметра α имеет следующий вид:

$$\varphi(\alpha) \equiv \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b K(x,s)\tilde{z}_\alpha(s)ds - u_\delta(x) \right)^2 dx = \delta^2, \tag{5}$$

где $\tilde{z}_\alpha(s)$ — решение интегрального уравнения (3). Для решения нелинейного уравнения (5) можно использовать любые методы определения корней функции одной переменной, например итерационные. При этом на каждом шаге итерационного процесса для вычисления значения $\varphi(\alpha_{n-1})$ необходимо решить уравнение (3) с $\alpha = \alpha_{n-1}$.

Из сказанного выше следует, что при применении метода регуляризации А.Н. Тихонова для решения уравнения (1) с неточно заданной правой частью в качестве приближенного решения может быть взято решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (3). Методы решения таких уравнений разработаны достаточно подробно (см., например, [10, 16]).

При решении уравнения (1) с помощью итерационного метода, изложенного в §5, приближенное решение определяется итерационным процессом

$$z_n(t) = z_{n-1}(t) + \mu \int\limits_c^d K(x,t)u_\delta(x)dx - \mu \int\limits_c^d K(x,t) \int\limits_a^b K(x,s)z_{n-1}(s)dsdx,$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

или

$$z_n(t) = z_{n-1}(t) + \mu \int\limits_c^d K(x,t)u_\delta(x)dx - \mu \int\limits_a^b K_1(t,s)z_{n-1}(s)ds,$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

где ядро $K_1(t,s)$ определяется формулой (4), а

$$z_0(t) = \mu \int\limits_c^d K(x,t)u_\delta(x)dx.$$

Если параметр μ и число итераций $n(\delta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.5.1, то функция $z_{n(\delta)}(t)$ при $\delta \to 0$ сходится к $\bar{z}(t)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$.

Рассмотрим схему применения проекционного метода, который был изучен в §6, для решения интегрального уравнения (1). В этом методе приближенное решение ищется в виде линейной комбинации конечного числа собственных функций оператора A^*A. Таким образом, для реализации данного метода необходимо найти функции $\varphi_n(s)$ и числа λ_n, такие, что

$$\int\limits_c^d K(x,t)\int\limits_a^b K(x,s)\varphi_n(s)dsdx = \lambda_n\varphi_n(t),$$

или

$$\int\limits_a^b K_1(t,s)\varphi_n(s)ds = \lambda_n\varphi_n(t),$$

где функция $K_1(t,s)$ определяется формулой (4).

Для решения задачи построения собственных функций $\varphi_n(s)$ и собственных значений λ_n можно использовать как итерационные методы, так и методы, основанные на дискретизации задачи и решении алгебраической задачи на собственные значения. Эти методы, как правило, определяют собственные функции в порядке убывания собственных значений. Если собственные функции $\varphi_n(s)$ найдены, то задача построения приближенных решений сводится к конечномерной задаче отыскания чисел $c_1,\ldots,c_{n(\delta)}$, таких, что

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b K(x,s)\sum_{n=1}^{n(\delta)} c_i\varphi_i(s)ds - u_\delta(x)\right)^2 dx \leqslant q^2\delta^2,$$

или

$$\int\limits_c^d \left(\sum_{n=1}^{n(\delta)} c_i\psi_i(x) - u_\delta(x)\right)^2 dx \leqslant q^2\delta^2,$$

где

$$\psi_i(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds.$$

Функции $\psi_i(x)$ легко могут быть вычислены после того, как найдены собственные функции $\varphi_i(s)$. Так как в основе метода приближенного решения уравнения лежит идея использования минимального числа собственных функций $n(\delta)$, то процесс построения собственных функций можно совмещать с приближенным решением уравнения (1). Очевидно, что в общем случае число собственных функций, необходимых для построения приближенного решения, растет с увеличением точности задания исходной информации ($n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$).

Отметим, что в ряде простых случаев обратные задачи сводятся к интегральному уравнению (1) с ядром $K(x,t)$, таким, что задача отыскания собственных функций становится очевидной. Например, первая краевая задача для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени сводится (см. гл. 4, §1) к уравнению (1) с ядром

$$K(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n s}{l} \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \bar{a}^2 T\right\} \tag{6}$$

и $a = c = 0$, $b = d = l$. Так как система функций $\varphi_n(s) = \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n s}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, l]$, то из формулы (6) следует, что интегральный оператор A с ядром, определяемым этой формулой, имеет собственные функции $\varphi_n(s) = \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n s}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$, и собственные значения $\lambda_n = \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \bar{a}^2 T\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как из формулы (6) следует, что $A^* = A$, то собственные функции интегрального оператора A^*A совпадают с собственными функциями A.

В рассмотренных методах предполагалось, что точное решение интегрального уравнения (1) $\bar{z}(s)$ принадлежит пространству $L_2[a,b]$. При этом приближенное решение, построенное с помощью этих методов, сходится при $\delta \to 0$ к точному в метрике пространства $L_2[a,b]$. Если имеющаяся априорная информация о точном решении уравнения (1), позволяет сделать заключение о его принадлежности к пространству более гладких функций, то сходимость приближенного решения к точному можно получить в метрике более сильной, чем $L_2[a,b]$. Так, если известно, что точное решение $\bar{z}(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то $\bar{z}(s)$ можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $W_2^1[a,b]$ [74]. В этом случае, взяв в качестве пространства Z пространство $W_2^1[a,b]$, а в качестве U пространство $L_2[c,d]$ и применив метод регуляризации А.Н. Тихонова, получим, что приближенное решение $z_{\alpha(\delta)}(s)$ определяется как элемент, реализующий минимум функционала

$$M^{\alpha(\delta)}(z) = \|Az - u_\delta\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha(\delta)\|z\|^2_{W_2^1[a,b]} =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b K(x,s)z(s)ds - u_\delta(x)\right)^2 dx + \alpha(\delta)\int_a^b (z^2(s) + (z'(s))^2)ds.$$

Если параметр $\alpha(\delta)$ должным образом согласован с величиной погрешности δ (теорема 2.2.2), то при $\delta \to 0$ приближенное решение $z_{\alpha(\delta)}(s)$ сходится к точному $\bar{z}(s)$ в метрике пространства $W_2^1[a,b]$.

Остановимся кратко на проблеме решения нелинейных интегральных уравнений 1-го рода. Этот класс уравнений существенно шире и менее формализуем, чем класс линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Различные обратные задачи могут сводиться к разнообразным нелинейным интегральным уравнениям 1-го рода. Некоторые из них можно встретить в следующих главах. Дать общую форму записи для этих уравнений вряд ли возможно. Как правило, исследование этих уравнений приходится проводить для каждого конкретного случая.

Один из достаточно простых классов нелинейных уравнений образуют уравнения вида

$$A_1 z \equiv \int_a^b K(x, s, z(s))ds = u(x), \tag{7}$$

где $K(x, s, p)$ и $u(x)$ — заданные функции, а функция $z(s)$ неизвестна. Пусть функция $K(x, s, p)$ определена и непрерывна на множестве

$$D = \{(x, s, p) : \ x \in [c, d], \ s \in [a, b], \ p \in (-\infty, +\infty)\}$$

и имеет на этом множестве непрерывные, равномерно ограниченные частные производные 1-го порядка. Интегральный оператор A_1, стоящий в левой части уравнения (7), если его рассматривать действующим из пространства $C[a, b]$ в $L_2[c, d]$ (или $C[c, d]$), будет непрерывным. Задача решения уравнения (7) некорректна. Предположим, что для точной правой части $\bar{u}(x) \in L_2[c, d]$ уравнение (7) имеет в пространстве $C[a, b]$ единственное решение $\bar{z}(s)$, причем $\bar{z}(s) \in W_2^1[a, b]$. Тогда, если вместо функции $\bar{u}(x)$ заданы $u_\delta(x)$ и δ, такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2[c,d]} \leqslant \delta$, то для приближенного решения уравнения можно использовать методы приближенного решения нелинейных операторных уравнений, описанные в §2, 4 этой главы. Применяя метод регуляризации А.Н. Тихонова или метод невязки для решения уравнения (7) и рассматривая в качестве пространств Z, F, U пространства $C[a, b]$, $W_2^1[a, b]$ и $L_2[c, d]$ соответственно, а в качестве V — оператор вложения [74], получим, что приближенные решения уравнения (7), построенные по $u_\delta(x)$ и δ, будут сходиться при $\delta \to 0$ к $\bar{z}(s)$ в равномерной метрике.

Многие обратные задачи сводятся к линейным и нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра 1-го рода. Линейное интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода имеет вид

$$A_2 z \equiv \int_a^x K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{8}$$

Так как это уравнение является частным случаем уравнения Фредгольма 1-го рода, то для его решения можно применять методы, разработанные для решения этих уравнений. Однако уравнение (8) имеет существенное отличие от (1). Решение этого уравнения на отрезке $[a, x_0]$, где x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$, определяется только значениями правой части $u(x)$ на отрезке $[a, x_0]$ и не зависит от значений этой функции на $(x_0, b]$.

Применение для решения уравнения (8) методов, разработанных для уравнения Фредгольма 1-го рода, как правило, приводит к тому, что приближенное решение не обладает указанным выше свойством. Действительно, запишем для уравнения (8) уравнение $\alpha \bar{z}_\alpha + A_2^* A_2 \bar{z}_\alpha = A_2^* u_\delta$ для определения приближенного решения в предположении, что оператор A_2 рассматривается действующим из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$. Так как сопряженный оператор A_2^* имеет вид

$$A_2^* f = \int_t^b K(x, t) f(x) dx,$$

то уравнение для определения приближенного решения записывается так:

$$\alpha \bar{z}_\alpha(t) + \int_t^b K(x, t) \int_a^x K(x, s) \bar{z}_\alpha(s) ds dx = \int_t^b K(x, t) u_\delta(x) dx$$

и не является уравнением Вольтерра 2-го рода.

Для интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода можно строить методы приближенного решения, в которых приближенное решение является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Методы такого типа рассмотрены, например, в [23, 72].

Глава III

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе рассматриваются два класса обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. К первому классу относятся обратные задачи, в которых требуется определить либо правую часть, либо коэффициенты дифференциального уравнения, либо то и другое одновременно, если известны одно или несколько решений этого дифференциального уравнения. Эти обратные задачи, являясь достаточно простыми, тем не менее содержат в себе некоторые характерные особенности, как правило, присущие всем обратным задачам для дифференциальных уравнений. Второй класс образуют обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр λ. Исходной информацией в этих обратных задачах является функция параметра λ, определенным образом связанная с решением дифференциального уравнения, а искомой — коэффициент этого дифференциального уравнения.

§1. ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследование обратных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений начнем с простого класса обратных задач, а именно с задач определения правой части линейного обыкновенного дифференциального уравнения по решению этого уравнения. Приведем примеры подобных задач.

Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $f(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени ($t = 0$) частица находилась в начале координат ($x = 0$) и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться следующей задачей Коши:

$$\ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

где $x(t)$ — положение частицы в момент времени t. Предположим теперь, что сила, действующая на частицу (функция $f(t)$), нам не известна, но мы можем в каждый момент времени измерять положение частицы (функцию $x(t)$) и хотим по $x(t)$ определить $f(t)$. Таким образом, мы приходим к следующей обратной задаче. Требуется определить правую часть уравнения (1) — функцию $f(t)$, если известно решение задачи (1), (2) — функция $x(t)$.

Рассмотрим задачу об определении плотности тепловых источников. Стационарное распределение температуры $u(x)$ в тонком стержне, на концах которого поддерживается нулевая температура, определяется краевой задачей

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \tag{4}$$

здесь $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $q(x)$ — коэффициент теплообмена, $-f(x)$ — плотность распределения тепловых источников. Рассмотрим следующую обратную задачу. Известны коэффициенты $k(x)$, $q(x)$ и решение задачи (3), (4) $u(x)$, т.е. распределение температуры в стержне, а требуется определить плотность тепловых источников $-f(x)$.

Приведенные примеры являются частными случаями следующей общей постановки. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \geqslant 1$)

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) = f(x) \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$y(a) = 0, \ y'(a) = 0, \ \ldots, \ y^{(k-1)}(a) = 0, \tag{6}$$

$$y(b) = 0, \ y'(b) = 0, \ \ldots, \ y^{(m-1)}(b) = 0, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, — заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, $|a_n(x)| > 0$ при $x \in [a, b]$, а целые числа k и m удовлетворяют условиям: $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k + m = n$. Формулировка обратной задачи такова. Заданы коэффициенты $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, и для $x \in [a, b]$ известно решение задачи (5)–(7) $y(x)$. Требуется определить правую часть уравнения (5) функцию $f(x)$ для $x \in [a, b]$.

Исследование сформулированной обратной задачи в случае точно известных данных не представляет каких-либо трудностей. Ее решение $f(x) \in C[a, b]$ существует для любой функции $\bar{y}(x) \in C^n[a, b]$, удовлетворяющей условиям (6), (7). Действительно, если $\bar{y}(x) \in C^n[a, b]$ и удовлетворяет (6), (7), то для отыскания $f(x)$ достаточно подставить $\bar{y}(x)$ в левую часть уравнения (5), таким образом, искомая функция

$$\bar{f}(x) = a_n(x)\bar{y}^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\bar{y}^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_0(x)\bar{y}(x).$$

Из уравнения (5) следует также, что решение обратной задачи единственно. Если мы рассматриваем $y(x) \in C^n[a,b]$, то выполнена также оценка устойчивости. Действительно, пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — решения обратной задачи, соответствующие функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_i(x) \in C^n[a,b]$, $i = 1,2$. Тогда из уравнения (5) следует, что

$$\|f_1 - f_2\|_{C[a,b]} \leqslant A\|y_1 - y_2\|_{C^n[a,b]},$$

где константа A зависит только от $\|a_j\|_{C[a,b]}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Основная проблема, связанная с рассматриваемой обратной задачей, состоит в том, что при решении практических задач точное решение задачи (5)–(7) $\bar{y}(x) \in C^n[a,b]$, как правило, измерено быть не может, вместо $\bar{y}(x)$ заданы функция $y_\delta(x)$ и величина погрешности δ, определяющая степень близости $y_\delta(x)$ и $\bar{y}(x)$ в той или иной норме, обусловленной характером эксперимента. Типичными ситуациями являются те, в которых $y_\delta(x) \in C[a,b]$ и $\|y_\delta - \bar{y}\|_C \leqslant \delta$, или $y_\delta(x) \in L_2[a,b]$ и $\|y_\delta - \bar{y}\|_{L_2} \leqslant \delta$.

Задача определения непрерывной правой части уравнения (5) по решению задачи (5)–(7) $y(x)$ является некорректной, если мы считаем, что исходная информация $y(x) \in C[a,b]$. Очевидно, что непрерывное решение задачи $f(x)$ не существует, если $y(x) \in C[a,b]$, но не имеет непрерывной производной n-го порядка. Покажем неустойчивость этой задачи на примере задачи (1)–(2). Рассмотрим два решения задачи (1), (2)

$$x(t) = 0 \ \text{ и } \ x_n(t) = \frac{1}{n}\cos(nt) - \frac{1}{n},$$

которым соответствуют правые части

$$f(t) = 0 \ \text{ и } \ f_n(t) = -n\cos(nt).$$

Следовательно, $\|x_n - x\|_{C[0,T]} \to 0$ при $n \to \infty$, а $\|f_n - f\|_{C[0,T]} \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, задача определения правой части линейного дифференциального уравнения по его решению неустойчива.

Покажем, что рассматриваемая обратная задача, состоящая в определении правой части линейного дифференциального уравнения по решению этого уравнения, сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. Для этого воспользуемся известным из теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений понятием функции Грина [61].

Функцией Грина для краевой задачи (5)–(7) называется функция $G(x,\xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех значений x и ξ из $[a,b]$;

2) при любом $\xi \in [a,b]$ функция $G(x,\xi)$ имеет непрерывные производные $(n-1)$-го и n-го порядка по x в каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$, причем

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{a_n(\xi)}; \tag{8}$$

3) в каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению (5) с $f(x)=0$ и краевым условиям (6), (7).

Справедливы следующие теоремы [61].

Теорема 3.1.1. *Если краевая задача* (5)–(7) *при* $f(x)=0$ *для* $x\in[a,b]$ *имеет только нулевое решение, то функция Грина для задачи* (5)–(7) *существует и единственна.*

Теорема 3.1.2. *Если краевая задача* (5)–(7) *при* $f(x)=0$ *для* $x\in[a,b]$ *имеет только нулевое решение, то для любой* $f(x)\in C[a,b]$ *существует единственное решение задачи* (5)–(7)

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{9}$$

где $G(x,\xi)$ *функция Грина задачи* (5)–(7).

Таким образом, из теорем 3.1.1, 3.1.2 следует, что если краевая задача (5)–(7) в случае $f(x)=0$ имеет только нулевое решение, то обратная задача определения правой части $f(x)$ по решению $y(x)$ сводится к задаче решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$Gf\equiv\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi=y(x),\quad x\in[a,b]. \tag{10}$$

Приведем интегральные уравнения, к которым сводятся рассмотренные в начале параграфа обратные задачи. Рассмотрим задачу (1), (2). Интегрируя (1) с условиями (2), получим

$$x(t)=\int_0^t\int_0^\theta f(\xi)d\xi\,d\theta.$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int_0^t(t-\xi)f(\xi)d\xi=x(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{11}$$

Это уравнение является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $f(\xi)$. Введя функцию

$$G_0(t,\xi) = \begin{cases} t-\xi, & 0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant \xi \leqslant T, \end{cases}$$

уравнение (11) можно записать в виде (10):

$$\int\limits_0^T G_0(t,\xi) f(\xi) d\xi = z(t).$$

Покажем, что функция Грина для задачи (3), (4) существует и единственна, если $k(x) \in C^1[0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$ и $k(x) > 0$, $q(x) > 0$ для $x \in [0,l]$. Из теоремы 3.1.1 следует, что для этого достаточно показать, что задача (3), (4) имеет только нулевое решение в случае, когда $f(x) = 0$ для $x \in [0,l]$.

Покажем, что функция $u_0(x)$ — решение задачи (3), (4) с $f(x) = 0$ — не может иметь на $[0,l]$ положительного максимума. Пусть в точке $x_0 \in (0,l)$ достигается положительный максимум $u_0(x)$ на $[0,l]$. Тогда $u_0(x_0) > 0$, $u_0'(x_0) = 0$ и $u_0''(x_0) \leqslant 0$. Следовательно, $k(x_0)u_0''(x_0) + k'(x_0)u_0'(x_0) - q(x_0)u_0(x_0) < 0$, что противоречит тому, что $u_0(x)$ есть решение (3) с $f(x) = 0$ для $x \in [0,l]$. Аналогично можно показать, что $u_0(x)$ не имеет на $[0,l]$ отрицательного минимума, а значит, $u_0(x) = 0$ для $x \in [0,l]$ и функция Грина для задачи (3), (4) существует и единственна. Таким образом, мы показали принципиальную возможность сведения задачи определения правой части (3) к интегральному уравнению типа (10), однако записать в явном виде $G(x,\xi)$ при произвольных положительных $k(x)$ и $q(x)$ нельзя. Приведем выражение для функции Грина в случае постоянных $k(x) = k_0^2$ и $q(x) = q_0^2$:

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} \left(q_0 k_0 \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0} l\right)^{-1} \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0} x \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0}(\xi - l), & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant l, \\ \left(q_0 k_0 \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0} l\right)^{-1} \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0} \xi \operatorname{sh} \dfrac{q_0}{k_0}(x - l), & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Таким образом, при $k(x) = k_0^2 > 0$ и $q(x) = q_0^2 > 0$ задача определения правой части уравнения (3) по решению краевой задачи (3), (4) $u(x)$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_0^l G_0(x,\xi) f(\xi) d\xi = u(x).$$

Мы показали, что одним из возможных методов решения задачи определения правой части $f(x)$ уравнения (5) по решению $y(x)$ краевой задачи (5)–(7) является метод сведения ее к линейному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода (10) с ядром, представляющим собой функцию Грина. Преимуществом данного метода является то, что он сводит задачу к хорошо изученной задаче решения линейного уравнения 1-го рода. Недостаток его заключается в том, что функцию Грина в явном виде можно выписать далеко не всегда.

Другой метод определения правой части уравнения (5) основан на решении задачи дифференцирования. Действительно, для того, чтобы определить функцию $f(x)$, достаточно найти все производные $y(x)$ до n-го порядка и вычислить выражение, стоящее в левой части уравнения (5). Основная трудность, возникающая при реализации этого метода, заключается в том, что задача дифференцирования функции, заданной приближенно, в равномерной метрике является некорректной.

Один из наиболее простых методов дифференцирования функции, заданной приближенно, основан на использовании метода конечных разностей. Пусть на отрезке $[a, b+\varepsilon]$, $a < b$, $\varepsilon > 0$, задана функция $\bar{y}(x) \in C^1[a, b+\varepsilon]$. Требуется построить метод приближенного вычисления производной $\bar{y}'(x)$ по функции $y_\delta(x) \in C[a, b+\varepsilon]$ и величине погрешности δ, таким, что

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b+\varepsilon} |y_\delta(x) - \bar{y}(x)| \leqslant \delta. \tag{12}$$

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию

$$z_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h},$$

где параметр $h \in (0, \varepsilon)$. Покажем, что функция $z_{\delta h}(x)$, при выполнении определенных условий будет в равномерной метрике стремиться к $\bar{y}'(x)$.

Для любого $x \in [a, b]$ и $h \in (0, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x)| \leqslant \left| \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} - \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} \right| +$$
$$+ \left| \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} - \bar{y}'(x) \right|.$$

Из условия (12) и формулы Лагранжа следует, что

$$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x)| \leqslant \frac{2\delta}{h} + |\bar{y}'(\xi(x,h)) - \bar{y}'(x)|,$$

где $\xi(x,h) \in [x, x+h]$. Обозначив через $\omega_1(h)$ модуль непрерывности функции $\bar{y}'(x)$ на отрезке $[a, b+\varepsilon]$, получим

$$\|z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{2\delta}{h} + \omega_1(h). \tag{13}$$

Из этой оценки следует, что если параметр метода h так зависит от точности задания исходной информации δ, что при $\delta \to 0$ $h(\delta) \to 0$, $\delta/h(\delta) \to 0$, то $\|z_{\delta h(\delta)}(x) - \bar{y}'(x)\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\delta \to 0$. В этом случае функцию $z_{\delta h(\delta)}$ можно считать приближенным решением рассматриваемой задачи дифференцирования. В качестве примера функции $h(\delta)$, такой, что $h(\delta) \to 0$ и $\delta/h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ можно взять $h(\delta) = c\delta^q$, где c, q — положительные постоянные и $q < 1$.

Для вычисления производных более высокого порядка от функции, заданной приближенно в равномерной метрике, можно также использовать разностные формулы. Приведем формулу и оценку для приближенного определения второй производной. Пусть функция $\bar{y}(x) \in C^2[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, но эта функция не известна, а заданы функция $y_\delta(x) \in C[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ и $\delta > 0$, такие, что $\|\bar{y} - y_\delta(x)\|_{C[a-\varepsilon,b+\varepsilon]} \leqslant \delta$. Рассмотрим для $h \in (0, \varepsilon)$, $x \in [a,b]$ функцию

$$v_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - 2y_\delta(x) + y_\delta(x-h)}{h^2}.$$

Аналогично тому, как была получена оценка (13), можно показать, что

$$\|v_{\delta h}(x) - \bar{y}''(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{4\delta}{h^2} + \omega_2(h),$$

где $\omega_2(h)$ — модуль непрерывности $\bar{y}''(x)$ на $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Таким образом, если $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ так, что $\delta/h^2(\delta) \to 0$, то $v_{\delta h(\delta)}(x)$ при $\delta \to 0$ сходится равномерно к $\bar{y}''(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Задача вычисления производной может быть сведена к задаче решения интегрального уравнения 1-го рода. Пусть на отрезке $[0,l]$ задана функция $y(x) \in C^n[0,l]$, такая, что

$$y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Обозначим через $z(x)$ непрерывное решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} z(t)dt = y(x), \quad x \in [0,l], \tag{15}$$

тогда $z(x) = y^{(n)}(x)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать (15) n раз. Условия (14) необходимы для существования непрерывного решения $z(t)$ уравнения (15). Это следует из того, что выражение,стоящее в правой части (15), и все его производные до $(n-1)$-го порядка обращаются в нуль при $x = 0$. Если вместо условий (14) известно, что $y^{(i)}(0) = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то мы можем рассмотреть новую функцию

$$y_1(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{x^k}{k!}$$

и свести задачу к предыдущей.

Отметим, что задача вычисления производной n-го порядка $z(x) = y^{(n)}(x)$ от функции $y(x)$ в предположении, что $y(x)$ удовлетворяет условиям (14), представляет собой задачу вычисления правой части $z(x)$ дифференциального уравнения $y^{(n)}(x) = z(x)$, если известно его решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям (14). Это обстоятельство еще раз подчеркивает тесную взаимосвязь между задачей определения правой части линейного обыкновенного дифференциального уравнения по его решению и задачей дифференцирования.

§2. ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Важный класс обратных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений образуют задачи определения коэффициентов дифференциального уравнения по его решению. С прикладной точки зрения эти задачи представляют собой задачи определения тех или иных характеристик вещества или процесса. Примером такой задачи является задача определения скорости радиоактивного распада вещества по измерению количества этого вещества во времени, т.е. задача определения коэффициента α в уравнении $\dot{y}(t) + \alpha y(t) = 0$ по $y(t)$.

Исследование начнем с простого случая обратной задачи для однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Итак, пусть дано уравнение

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (1)$$

и требуется, зная какое-то решение этого уравнения, определить два числа a_1, a_0. Легко видеть, что такая общая постановка не является достаточно содержательной и требует определенного уточнения. Действительно, ставить задачу определения чисел a_1, a_0 по какому-нибудь решению уравнения (1) бессмысленно, так как решением уравнения (1) для любых a_1, a_0 является $y(x) \equiv 0$.

Следовательно, чтобы попытаться сделать задачу содержательной, необходимо добавить в постановку условие нетривиальности решения, т.е. сформулировать обратную задачу так. Определить коэффициенты a_1, a_0, если задано нетривиальное решение уравнения (1) $y(x) \not\equiv 0$. Однако это уточнение не позволяет однозначно определить a_1, a_0 по решению. Действительно, если $a_0 = 0$, то для любого a_1 решением уравнения (1) является произвольная постоянная.

Учитывая предыдущие трудности, сформулируем обратную задачу так. На отрезке $[c, d]$ задано решение уравнения (1) $y(x)$, такое, что $y(x) \not\equiv \mathrm{const}$ для $x \in [c, d]$, требуется определить числа a_1 и a_0. Покажем, что эта задача также имеет неединственное решение. Приведем пример. Пусть $a_1 = p$, $a_0 = -(p+1)$, где p — произвольное действительное число. Тогда для любого p решением уравнения (1) с такими коэффициентами является функция $y(x) = e^x$. Следовательно, если мы в качестве исходной информации зададим решение $y(x) = e^x$, то решение обратной задачи будет неединственно. Объяснить этот факт достаточно просто. Общее решение уравнения (1) с коэффициентами $a_1 = p$, $a_0 = -(p+1)$ равно $c_1 e^x + c_2 e^{-(p+1)x}$. Взяв в качестве исходной информации e^x, мы выбрали такое решение, которое определяется только одним корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda - (p+1) = 0$, а именно $\lambda_1 = 1$ и не зависит от второго $\lambda_2 = -(p+1)$. Сформулируем простое условие однозначного определения коэффициентов уравнения (1) по его решению.

Пусть на отрезке $[c, d]$ задано решение уравнения (1) $\bar{y}(x)$ и на отрезке $[c, d]$ существуют точки x_1, x_2, такие, что

$$\bar{y}(x_1)\bar{y}'(x_2) - \bar{y}(x_2)\bar{y}'(x_1) \neq 0. \tag{2}$$

Тогда a_1, a_0 определяются по $\bar{y}(x)$ однозначно.

Докажем это утверждение. Так как $\bar{y}(x)$ задана на отрезке $[c, d]$, то можно определить в точках x_i, $i = 1, 2$, значения $\bar{y}(x_i)$, $\bar{y}_i'(x)$, $\bar{y}_i''(x)$, $i = 1, 2$. Тогда, рассматривая уравнение (1) в этих точках, получим систему линейных уравнений для a_1 и a_0

$$a_1\bar{y}'(x_1) + a_0\bar{y}(x_1) = -\bar{y}''(x_1),$$
$$a_1\bar{y}'(x_2) + a_0\bar{y}(x_2) = -\bar{y}''(x_2).$$

Из условия (2) следует, что определитель этой системы не равен нулю, а значит, она имеет единственное решение.

Рассмотренная обратная задача, несмотря на свою простоту, является иллюстрацией важного факта. Задача определения двух постоянных коэффициентов, т.е. двух чисел, может иметь не единственное решение даже в том случае, когда исходная информация представляет собой функцию, отличную от постоянной (т.е. измеряется бесконечно много различных значений решения).

Рассмотрим теперь постановку обратной задачи для уравнения (1), несколько отличную от предыдущей. Сформулируем ее так. Заданы два решения уравнения (1) $y_1(x)$ и $y_2(x)$, отвечающие различным начальным условиям, требуется определить a_1 и a_0. Такая постановка с прикладной точки зрения может интерпретироваться как задача планирования эксперимента для определения характеристик a_1 и a_0. Действительно, если в процессе эксперимента можно реализовать и измерять решения (1) с различными начальными условиями, то вопрос состоит в следующем. Какие начальные условия нужно выбрать, чтобы знание соответствующих им решений обеспечивало бы однозначное определение a_1 и a_0?

Пусть на отрезке $[c, d]$ известны решения уравнения (1) $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющие начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$. Тогда коэффициенты определяются однозначно.

Докажем это утверждение. Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения уравнения (1), то определитель Вронского $W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ либо тождественно равен нулю, либо не равен нулю ни в одной точке. Из условий теоремы следует, что $W(y_1, y_2)|_{x=0} = -1$. Таким образом, $W(y_1, y_2) \neq 0$ для любых x. Выбрав на $[c, d]$ произвольную точку x_0, вычислив в ней $y_i'(x_0)$, $y_i''(x_0)$, $i = 1, 2$, и подставив эти значения в (1), получим

$$a_1 y_1'(x_0) + a_0 y_1(x_0) = -y_1''(x_0),$$
$$a_1 y_2'(x_0) + a_0 y_2(x_0) = -y_2''(x_0).$$

Эта система для определения a_1 и a_0 имеет определитель, не равный нулю. Следовательно, a_1 и a_0 определяются однозначно.

Доказанное утверждение является частным случаем более общей теоремы об определении функциональных коэффициентов линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + \\ + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{3}$$

Предположим, что коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и правая часть $f(x)$ — непрерывные на отрезке $[c, d]$ функции. Пусть $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и правая часть $f(x)$ неизвестны. Какую информацию о решениях уравнения (3) нужно задать, чтобы определить эти функции однозначно. Ответ на этот вопрос дает теорема, являющаяся следствием общей теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [83].

Т е о р е м а 3.2.1. *Пусть на отрезке $[c,d]$ заданы решения уравнения* (3) $y_i(x)$, $i=0,1,\dots,n$, *такие, что определитель Вронского*

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)|_{x=c}\neq 0, \tag{4}$$

$$y_0^{(i)}(c)=0, \quad i=0,1,\dots,(n-1). \tag{5}$$

Тогда функции $a_i(x)$ $i=0,1,\dots,n-1$, *и* $f(x)$ *на отрезке* $[c,d]$ *определяются однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции $v_i(x)=y_i(x)-y_0(x)$, $i=1,2,\dots,n$. Они являются решениями однородного уравнения ($f(x)=0$), соответствующего уравнению (3). Следовательно, определитель Вронского $W(v_1,v_2,\dots,v_n)$ либо не равен нулю на $[c,d]$ ни в одной точке, либо тождественно равен нулю на $[c,d]$. Но из условий (4) и (5) следует, что

$$W(v_1,v_2,\dots,v_n)|_{x=c}=W(y_1,y_2,\dots,y_n)|_{x=c}\neq 0,$$

следовательно, $W(v_1,v_2,\dots,v_n)\neq 0$ на $[c,d]$. Записав в каждой точке отрезка $[c,d]$ уравнения для функций $v_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, получим

$$a_0(x)v_i(x)+a_1(x)v_i'(x)+\dots+a_{n-1}(x)v_i^{(n-1)}(x)=-v_i^{(n)}(x). \tag{6}$$

В каждой точке отрезка $[c,d]$ это система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0(x),a_1(x),\dots,a_{n-1}(x)$ с определителем, не равным нулю. Так как функции $y_i(x)$, $i=0,1,\dots,n$, заданы, то в системе (4) известны все коэффициенты матрицы и вектор правых частей. Следовательно, из (6) однозначно определяются функции $a_i(x)$, $i=0,1,\dots,n-1$, на отрезке $[c,d]$. Зная эти коэффициенты и какое-либо решение уравнения (3), мы легко можем определить правую часть $f(x)$, подставив решение в уравнение (3). Теорема доказана.

В теореме 3.2.1 сформулированы условия определения всех коэффициентов линейного дифференциального уравнения. Вместе с тем возможны такие ситуации, когда часть коэффициентов уравнения известна, а часть нет и при этом задано какое-то количество решений этого уравнения. Что можно сказать о возможности однозначного определения коэффициентов уравнения в этом случае? Самым простым является тот случай, когда неизвестен один коэффициент $a_p(x)$ и задано одно решение уравнения $\bar{y}(x)$. Подставив это решение в уравнение (3), получим

$$a_p(x)\bar{y}^{(p)}(x)=-\bar{y}^{(n)}(x)-\dots-a_{p+1}(x)\bar{y}^{(p+1)}(x)-$$
$$-a_{p-1}(x)\bar{y}^{(p-1)}(x)-\dots-a_0(x)\bar{y}(x)+f(x).$$

Следовательно, если решение $\bar{y}(x)$ задано на интервале (c,d) и $\bar{y}(x)$ таково, что на любом интервале $(c_1,d_1)\in(c,d)$ существует

$x \in (c_1, d_1)$, такое, что $\bar{y}^{(p)}(x) \neq 0$, то коэффициент $a_p(x)$ на $[c, d]$ определяется однозначно.

Пусть в уравнении (3) неизвестны два коэффициента $a_i(x)$, $a_j(x)$, а остальные заданы и пусть заданы два решения $y(x)$, $z(x)$ уравнения (3). Тогда, подставляя эти решения в уравнение (3) и перенося в правую часть известные функции, получим систему для определения неизвестных коэффициентов

$$a_i(x)y^{(i)}(x) + a_j(x)y^{(j)}(x) = F_1(x),$$
$$a_i(x)z^{(i)}(x) + a_j(x)z^{(j)}(x) = F_2(x),$$

где $F_1(x)$, $F_2(x)$ — известные функции. Если определитель этой системы $W(x) = y^{(i)}(x)z^{(j)}(x) - z^{(i)}(x)y^{(j)}(x)$ не равен тождественно нулю на любом интервале $(c_1, d_1) \in [c, d]$, то коэффициенты $a_i(x)$ и $a_j(x)$ на $[c, d]$ определяются однозначно. Приведем пример, показывающий, что в том случае, когда определитель $W(x) \equiv 0$ на $[c, d]$, однозначно найти коэффициенты $a_i(x)$ и $a_j(x)$ нельзя. Рассмотрим уравнение

$$y^{(IV)} + a_2(x)y'' + a_0(x)y = 0 \tag{7}$$

с известными коэффициентами $a_3(x) = 0$ и $a_1(x) = 0$. Пусть заданы два линейно независимых решения этого уравнения и требуется определить коэффициенты $a_2(x)$, $a_0(x)$. Пусть заданы решения $y(x) = e^x$ и $z(x) = e^{-x}$. Эти функции являются решениями уравнения (7), если $a_2(x) = -(1 + p)$ и $a_0(x) = p$, где p — произвольное действительное число. Следовательно, задание двух линейно независимых решений уравнения не позволяет однозначно определить коэффициенты $a_2(x)$ и $a_0(x)$. Заметим, что определитель $W(x) = y''(x)z(x) - z''(x)y(x) = e^x e^{-x} - e^{-x}e^x = 0$.

Рассмотрим задачу определения неизвестных коэффициентов системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задачи такого типа возникают, например, при исследовании процессов химической кинетики [64].

Одна из основных проблем, возникающих при исследовании сформулированной задачи, состоит в следующем. Достаточно ли задать для всех значений независимой переменной нетривиальный вектор-решение системы, чтобы определить постоянные коэффициенты этой системы? Приведем пример, показывающий, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть для всех t нам известен вектор-решение этой системы $\mathbf{x}^0(t) = \{x_1^0(t), x_2^0(t)\} = \{3e^{2t}, e^{2t}\}$. Можно ли, зная $\mathbf{x}^0(t)$, определить коэффициенты a_{ij}, $i,j = 1,2$. Подставив $x_1^0(t) = 3e^{2t}$ и $x_2^0(t) = e^{2t}$ в систему (8), получим систему уравнений для искомых коэффициентов

$$3a_{11} + a_{12} = 6,$$
$$3a_{21} + a_{22} = 2.$$

Очевидно, что эта система двух уравнений относительно четырех неизвестных имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \tag{9}$$

где A — матрица с постоянными коэффициентами a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$. Сформулируем условия, позволяющие однозначно определить коэффициенты системы (9) a_{ij} по информации о ее решении.

Теорема 3.2.2. *Если на отрезке $[c,d]$ задано решение системы (9) $\mathbf{x}^0(t)$, такое, что на отрезке $[c,d]$ найдутся точки t_k, $k = 1,2,\ldots,n$, такие, что векторы $\mathbf{x}^0(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$, линейно независимы, то коэффициенты a_{ij} определяются однозначно.*

Доказательство. Так как решение $\mathbf{x}^0(t) = \{x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots, x_n^0(t)\}$ известно, то, подставляя функции $x_i^0(t)$ в систему (9) и полагая $t = t_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1^0(t_k) + a_{12}x_2^0(t_k) + \cdots + a_{1n}x_n^0(t_k) = \frac{dx_1^0}{dt}(t_k), \tag{10}$$

$$a_{21}x_1^0(t_k) + a_{22}x_2^0(t_k) + \cdots + a_{2n}x_n^0(t_k) = \frac{dx_2^0}{dt}(t_k), \tag{11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1^0(t_k) + a_{n2}x_2^0(t_k) + \cdots + a_{nn}x_n^0(t_k) = \frac{dx_n^0}{dt}(t_k)$$

относительно неизвестных a_{ij}. Рассмотрим систему для определения коэффициентов a_{1j}, $j = 1,\ldots,n$. Эта система представляет собой уравнение (10), записанное при n значениях независимой переменной t_k, $k = 1,2,\ldots,n$. Строками квадратной матрицы этой системы являются векторы $\mathbf{x}^0(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Следовательно, в силу условий теоремы, эта матрица невырождена. Таким образом, коэффициенты a_{1j}, $j = 1,2,\ldots,n$, из системы (10) определяются однозначно. Рассматривая уравнение (11) при t_k, $k = 1,2,\ldots,n$, получим систему с определителем, не равным нулю, для коэффициентов a_{2j}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, коэффициенты a_{2j} также определяются однозначно. Аналогично можно показать, что $a_{3j}, \ldots, a_{nj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определяются однозначно. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу определения коэффициентов системы линейных дифференциальных уравнений в случае, когда эти коэффициенты зависят от t.

Пусть дана система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} \tag{12}$$

с коэффициентами $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, непрерывными на отрезке $[c, d]$. Сформулируем условия, позволяющие однозначно определить коэффициенты $a_{ij}(t)$ по решениям этой системы.

Теорема 3.2.3. *Пусть на отрезке $[c, d]$ заданы n векторов решений системы* (12) $\mathbf{x}^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяющих условию* $\mathbf{x}^k(c) = \mathbf{b}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *где* $\mathbf{b}^k$ — *заданные векторы. Тогда, если векторы* $\mathbf{b}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *линейно независимы, то коэффициенты* $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *на отрезке* $[c, d]$ *определяются однозначно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы основывается на известном факте теории систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [83]. Действительно, определитель Вронского, составленный из n векторов-решений системы (12) $\mathbf{x}^k(t)$, либо тождественно равен нулю на $[c, d]$, либо не обращается на $[c, d]$ в ноль ни в одной точке. Следовательно, в силу линейной независимости векторов $\mathbf{b}^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, определитель Вронского, составленный из $\mathbf{x}^k(t)$, не равен нулю ни в одной точке отрезка $[c, d]$. Запишем первое уравнение системы (12)

$$a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) = \frac{dx_1}{dt}(t).$$

Подставив в это уравнение заданные нам векторы решения $\mathbf{x}^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получим при каждом $t \in [c, d]$ систему линейных алгебраических уравнений для определения $a_{1j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, с определителем, равным определителю Вронского для $\mathbf{x}^k(t)$. Так как этот определитель не равен нулю ни в одной точке отрезка $[c, d]$, то, решив соответствующую систему, однозначно определим коэффициенты $a_{1j}(t)$. Аналогично, рассматривая вторую строку системы (12), найдем $a_{2j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, на отрезке $[c, d]$. Повторяя этот процесс, определим все коэффициенты $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, на отрезке $[c, d]$. Теорема доказана.

После того как были рассмотрены условия, позволяющие определять неизвестные коэффициенты дифференциальных уравнений и систем по их решению, остановимся кратко на тех проблемах которые возникают в том случае, когда исходная информация о решении известна приближенно. В приведенных доказательствах предполагалось, что решение уравнения или системы задано точно и можно точно определить его производные. Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие при приближенном задании решения уравнения, на простом примере задачи Коши для уравнения второго порядка

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{13}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \tag{14}$$

с известным коэффициентом $a_0(x)$, начальными условиями y_0, y_1 и неизвестным коэффициентом $a_1(x)$. Если вместо точного решения задачи (13), (14) $y(x)$ заданы функция $y_\delta(x) \in C[0,1]$ и число δ, такие, что $\|y(x) - y_\delta(x)\|_{C[0,1]} \leqslant \delta$, то нельзя непосредственно воспользоваться явной формулой для определения $a_1(x)$:

$$a_1(x) = -\frac{a_0(x)y(x) + y''(x)}{y'(x)}. \tag{15}$$

Для того чтобы использовать эту формулу, необходимо предварительно найти, основываясь на заданной информации $y_\delta(x)$ и δ, приближенные значения производных $y''(x)$ и $y'(x)$ и затем подставить их в формулу (15). Из формулы (15) и неустойчивости задачи вычисления производных следует, что задача нахождения непрерывного коэффициента $a_1(x)$ по решению задачи (13), (14), заданному приближенно в равномерной метрике или метрике $L_2[0,1]$, является неустойчивой. Другая проблема, связанная с использованием формулы (15), состоит в том, что $y'(x)$ может обращаться в ноль на отрезке $[0,1]$. Это означает, что приближенное значение производной, вычисленное по функции $y_\delta(x)$, в соответствующих точках будет близко к нулю. В результате могут возникнуть существенные погрешности в решении в окрестности нулей функции $y'(x)$. Легко видеть, что число подобного типа проблем существенно увеличивается в том случае, когда мы рассматриваем задачу одновременного определения нескольких неизвестных коэффициентов.

Задачу определения коэффициента $a_1(x)$ по приближенно заданному решению задачи (13), (14) можно решать, не используя явную формулу (15). Задача (13), (14) определяет нелинейный оператор A, ставящий в соответствие коэффициенту $a_1(x)$ решение $y(x)$. Таким образом, можно рассматривать исследуемую обратную задачу как задачу решения нелинейного операторного уравнения $Aa_1(x) = y(x)$ с приближенно заданной правой частью и применять для ее решения методы, изложенные во второй главе. Подобную схему решения можно применять и для других обратных задач такого же типа.

§3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Обратные задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, представляют собой важный класс обратных задач. Интерес к ним обусловлен, с одной стороны, тем, что многие из этих задач имеют непосредственное практическое значение, с другой стороны, тем, что они возникают при исследовании обратных задач для уравнений в частных производных. Типичная постановка обратных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром λ состоит в следующем. Требуется определить коэффициент дифференциального уравнения, зависящий от переменной x, по дополнительной информации о решении этого уравнения, представляющей собой функцию параметра λ. Отметим, что существенное отличие этой постановки от обратных задач, рассмотренных в двух предыдущих главах, состоит в том, что искомая и заданная функции зависят от разных переменных.

Обратная задача для уравнения первого порядка. Исследование обратных задач для линейных дифференциальных уравнений с параметром начнем с наиболее простого случая обратной задачи для уравнения первого порядка. Рассмотрим уравнение

$$y'(x,\lambda)+\lambda\alpha(x)y(x,\lambda)=f_0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(0,\lambda)=y_0, \tag{2}$$

где f_0, y_0 — постоянные, а λ — параметр. Сформулируем обратную задачу. Требуется определить функцию $\alpha(x)\in C[0,1]$, если постоянные f_0, y_0 известны и для $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$ задана функция $\varphi(\lambda)=y(1,\lambda)$, где $y(x,\lambda)$ — решение задачи (1), (2). Исследуем вопрос о единственности решения этой обратной задачи.

Решение задачи (1), (2) имеет вид

$$y(x,\lambda)=y_0\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^x\alpha(\theta)d\theta\right\}+f_0\int\limits_0^x\exp\left\{-\lambda\int\limits_\xi^x\alpha(\theta)d\theta\right\}d\xi. \tag{3}$$

Из этого представления следует, что в случае $f_0=0$ решение обратной задачи неединственно. Действительно, если $f_0=0$, то из представления (3) получим следующее уравнение для определения $\alpha(x)$ по $\varphi(\lambda)$:

$$y_0\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^1\alpha(\theta)d\theta\right\}=\varphi(\lambda), \quad \lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]. \tag{4}$$

Таким образом, если уравнение (4) имеет решение $\bar{\alpha}(x) \in C[0,1]$, то его решением будет являться также любая функция $\tilde{\alpha}(x) \in C[0,1]$, такая, что

$$\int_0^1 \tilde{\alpha}(\theta)d\theta = \int_0^1 \bar{\alpha}(\theta)d\theta.$$

Например, в качестве $\tilde{\alpha}(x)$ можно взять следующее семейство функций: $\tilde{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(x) + C\cos\pi x$, где C — произвольная постоянная.

Исследуем единственность решения задачи определения $\alpha(x)$ по $\varphi(\lambda)$ в случае неоднородного уравнения $f_0 \neq 0$ и однородного начального условия $y_0 = 0$. Из представления (3) имеем следующее уравнение для функции $\alpha(x)$:

$$\int_0^1 exp\Big\{-\lambda\int_\xi^1 \alpha(\theta)d\theta\Big\}d\xi = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \tag{5}$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda)/f_0$ — известная функция. Покажем, что уравнение (5) в классе непрерывных функций имеет не единственное решение. Приведем пример. Пусть $\alpha_1(x) = 2x - 3x^2$, $\alpha_2(x) = 1 - 4x + 3x^2$, тогда

$$\int_0^1 \exp\Big\{-\lambda\int_\xi^1 \alpha_1(\theta)d\theta\Big\}d\xi = \int_0^1 \exp\{\lambda\xi^2(1-\xi)\}d\xi.$$

Сделав в интеграле замену переменных $\xi = 1 - z$, получим

$$\int_0^1 \exp\Big\{-\lambda\int_\xi^1 \alpha_1(\theta)d\theta\Big\}d\xi = \int_0^1 \exp\{\lambda z(1-z)^2\}dz =$$

$$= \int_0^1 \exp\Big\{-\lambda\int_z^1 \alpha_2(\theta)d\theta\Big\}dz.$$

Таким образом, $\alpha_1(x) \neq \alpha_2(x)$ на отрезке $[0,1]$, а

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 \exp\Big\{-\lambda\int_\xi^1 \alpha_1(\theta)d\theta\Big\}d\xi = \int_0^1 \exp\Big\{-\lambda\int_\xi^1 \alpha_2(\theta)d\theta\Big\}d\xi$$

и обратная задача имеет не единственное решение.

При исследовании обратных задач из тех или иных соображений могут возникать ограничения на рассматриваемый класс функций. Одним из наиболее распространенных ограничений на класс, которому принадлежит искомая функция, является положительность функций из этого класса, обусловленная положительностью многих характеристик физических процессов и объектов. Докажем, что обратная задача определения функции $\alpha(x)$ по $\varphi(\lambda)$ в случае $y_0 = 0$, $f_0 \neq 0$ имеет единственное решение в классе непрерывных положительных функций. Так как единственность решения этой задачи эквивалентна единственности решения уравнения (5), то теорему единственности сформулируем для этого уравнения.

Теорема 3.3.1. *Существует не более одного решения уравнения* (5), *такого, что* $\alpha(x) \in C[0,1]$ *и* $\alpha(x) > 0$ *для* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Предположим, что существуют две непрерывные и положительные на отрезке $[0,1]$ функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, являющиеся решением уравнения (5). Рассмотрим функции

$$\beta_i(\xi) = -\int_{\xi}^{1} \alpha_i(\theta)d\theta, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Эти функции обладают следующими свойствами: $\beta_i(x) \in C^1[0,1]$, $\beta_i'(x) > 0$ для $x \in [0,1]$. Так как $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются решениями уравнения (5), то для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ выполнено равенство

$$\int_0^1 \exp\{\lambda\beta_1(\xi)\}d\xi = \int_0^1 \exp\{\lambda\beta_2(\xi)\}d\xi.$$

Сделав в этих интегралах замену переменных $t = \beta_i(\xi)$ и учитывая, что $\beta_i(1) = 0$, получим

$$\int_{\beta_1(0)}^{0} \exp\{\lambda t\}\gamma_1(t)dt = \int_{\beta_2(0)}^{0} \exp\{\lambda t\}\gamma_2(t)dt, \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \tag{7}$$

где $\gamma_i(t) = 1/\beta_i'(\beta_i^{-1}(t))$, а $\beta_i^{-1}(t)$ — функция, обратная к $\beta_i(\xi)$. Покажем, что из равенства (7) следует, что $\beta_1(0) = \beta_2(0)$. Функция $\exp\{zt\}$ как функция комплексной переменной z является аналитической во всей комплексной плоскости для всех значений действительного параметра t. Функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ непрерывны на отрезках $[\beta_1(0), 0]$ и $[\beta_2(0), 0]$ соответственно. Следовательно, используя теорему об аналитичности интеграла от функции комплексного переменного [42], получим, что интегралы, входящие в равенство (7), являются аналитическими функциями параметра λ. Тогда из теоремы единственности для аналитических функций следует, что равенство (7) выполняется для всех комплексных значений λ, в частности для всех действительных λ. Предположим, что $\beta_1(0) \neq \beta_2(0)$. Пусть для определенности $\beta_1(0) < \beta_2(0)$, тогда из (7) имеем для $-\infty < \lambda < \infty$

$$\int\limits_{\beta_1(0)}^{\beta_2(0)} \exp\{\lambda t\}\gamma_1(t)dt = \int\limits_{\beta_2(0)}^{0} \exp\{\lambda t\}[\gamma_2(t) - \gamma_1(t)]dt. \qquad (8)$$

Введем обозначения

$$m = \min_{\beta_1(0) \leqslant t \leqslant \beta_2(0)} \gamma_1(t),$$
$$M = \max_{\beta_2(0) \leqslant t \leqslant 0} |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|.$$

Из положительности $\gamma_1(t)$ следует, что $m > 0$. Из (8) получим, что для всех действительных λ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\beta_1(0)}^{\beta_2(0)} \exp\{\lambda t\}dt \leqslant \frac{M}{m} \int\limits_{\beta_2(0)}^{0} \exp\{\lambda t\}dt,$$

или

$$\frac{1}{\lambda}[\exp\{\beta_2(0)\lambda\} - \exp\{\beta_1(0)\lambda\}] \leqslant \frac{M}{m\lambda}[1 - \exp\{\beta_2(0)\lambda\}].$$

Очевидно, что это неравенство не выполняется при достаточно больших по модулю отрицательных значениях λ. Из полученного противоречия следует, что $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta$. Тогда из равенства (7) мы получим, что

$$\int\limits_{\beta}^{0} \exp\{\lambda t\}\tilde{\gamma}(t)dt = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty, \qquad (9)$$

где $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$. Так как система функций $\exp\{\lambda t\}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ полна в пространстве $L_2[\beta, 0]$, то из (9) следует, что $\tilde{\gamma}(t) = 0$, а значит, и $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ для $t \in [\beta, 0]$. Функции $\gamma_i(t)$ представляют собой производные от функций $\beta_i^{-1}(t)$. Таким образом, $(\beta_1^{-1}(t))' = (\beta_2^{-1}(t))'$ для $t \in [\beta, 0]$ и $\beta_1^{-1}(0) = \beta_2^{-1}(0) = 1$. Из этих равенств следует, что $\beta_1^{-1}(t) = \beta_2^{-1}(t)$ для $t \in [\beta, 0]$, а значит, и $\beta_1(\xi) = \beta_2(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$. Учитывая (6), окончательно получим $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ для $x \in [0, 1]$. Теорема 3.3.1 доказана.

Рассмотренная обратная задача является примером обратной задачи, для которой единственность или неединственность ее решения может быть связана как с постановкой исходной задачи (неединственность в случае $f_0 = 0$), так и с рассматриваемым классом функций (единственность в классе положительных функций).

Исследованная обратная задача в случае $y_0 = 0$, $f_0 \neq 0$ сводится к нелинейному интегральному уравнению (5) для определения функции $\alpha(x)$ по заданной $\bar{\varphi}(\lambda)$. Покажем, что уравнение (5) представляет собой некорректную задачу как в случае, когда нелинейный оператор, отображающий функцию $\alpha(x)$ в $\bar{\varphi}(\lambda)$, рассматривается действующим из $C[0,1]$ в $C[\lambda_1, \lambda_2]$, так и в случае, когда он рассматривается действующим из $L_2[0,1]$ в $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$. Для этого достаточно привести следующий пример. Пусть $\bar{\alpha}(x) = 2$, $\alpha_n(x) = 2 + \cos \pi n x$ для $x \in [0,1]$. Тогда для любого $n \geqslant 1$

$$\|\bar{\alpha} - \alpha_n\|_{C[0,1]} = 1, \quad \|\bar{\alpha} - \alpha_n\|_{L_2[0,1]} = 1/\sqrt{2}.$$

С другой стороны,

$$\bar{\varphi}(\lambda) - \varphi_n(\lambda) = \int_0^1 \exp\left\{-\lambda \int_\xi^1 \bar{\alpha}(\theta)d\theta\right\}d\xi - \int_0^1 \exp\left\{-\lambda \int_\xi^1 \alpha_n(\theta)d\theta\right\}d\xi =$$

$$= \int_0^1 \exp\{-2\lambda(1-\xi)\}d\xi - \int_0^1 \exp\left\{-2\lambda(1-\xi) + \frac{\lambda \sin \pi n \xi}{\pi n}\right\}d\xi.$$

Следовательно,

$$\|\bar{\varphi}(\lambda) - \varphi_n(\lambda)\|_{C[\lambda_1, \lambda_2]} \to 0$$

при $n \to \infty$, откуда и следует некорректность рассматриваемой обратной задачи, когда оператор действует в указанных выше пространствах.

Решение обратной задачи сводится к решению нелинейного уравнения (5). В результате замены неизвестной функции, сделанной при доказательстве теоремы 3.3.1, можно получить линейное интегральное уравнение для функции $\gamma(t)$, если предполагать, что значение $\beta(0)$ известно. Однако взаимосвязь между $\gamma(t)$ и $\alpha(x)$ является нелинейной.

Обратная задача, возникающая в электроразведке. Исследование обратных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр, начнем с задачи, которая возникает при применении методов электроразведки постоянным током для поиска полезных ископаемых. Эта обратная задача, поставленная и изученная А.Н. Тихоновым [77], состоит в следующем. Требуется определить коэффициент $\sigma^2(x)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x,\lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x)} y(x,\lambda) = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty, \ \lambda > 0, \tag{10}$$

если известна функция

$$\varphi(\lambda) = \bar{y}'(0,\lambda), \tag{11}$$

где $\bar{y}(x,\lambda)$ — решение уравнения (10) с условиями

$$\bar{y}(0,\lambda) = q, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty} \bar{y}(x,\lambda) = 0, \tag{13}$$

q — заданная положительная постоянная.

В дальнейшем краевое условие (13) для краткости будем записывать следующим образом;

$$\bar{y}(\infty,\lambda) = 0.$$

До исследования обратной задачи докажем некоторые вспомогательные утверждения. Будем предполагать, что функция $\sigma(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \sigma(x) \in C[0,\infty), \quad &\sigma(x) \geqslant \bar{\sigma} > 0 \ \text{ для } \ x \in [0,\infty), \\ &\sigma(x) = \sigma_0 \ \text{ для } \ x \geqslant x_0 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Лемма 3.3.1. *Уравнение (10) с краевыми условиями*

$$y(0,\lambda) = y_0, \quad y(\infty,\lambda) = 0, \tag{15}$$

имеет не более одного решения, причем, если $y(x,\lambda)$ — решение задачи (10), (15) и $y_0 > 0$, то $y'(x,\lambda) < 0$ для $x \in [0,\infty)$ и $\lambda > 0$.

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи (10), (15) достаточно показать, что она имеет только нулевое решение в случае, когда $y_0 = 0$. Предположим, что это не так и существует решение уравнения (10) $y_1(x,\lambda)$, такое, что $y_1(x,\lambda) \not\equiv 0$ для $x \in [0,\infty)$ и $y_1(0,\lambda) = 0$, $y_1(\infty,\lambda) = 0$. Из этого предположения следует, что $y_1'(0,\lambda) \neq 0$, так как линейное однородное дифференциальное уравнение (10) с условиями $y_1(0,\lambda) = y_1'(0,\lambda) = 0$ имеет тождественно равное нулю решение. Пусть для определенности $y_1'(0,\lambda) > 0$. Покажем, что из этого следует, что $y_1'(x,\lambda) > 0$ для $x \in [0,\infty)$. Действительно, предположим, что $y_1'(x,\lambda)$ может обращаться в ноль на полупрямой $x > 0$. Обозначим через x_1 минимальный корень уравнения $y_1'(x,\lambda) = 0$. Тогда для $x \in [0,x_1)$ $y_1'(x,\lambda) > 0$ и из условия $y_1(0,\lambda) = 0$ следует, что $y_1(x,\lambda) > 0$ для $x \in (0,x_1]$. Тогда из уравнения (10) следует, что $y_1''(x,\lambda) > 0$ для $x \in (0,x_1]$. Таким образом, функция $y_1'(x,\lambda)$ на множестве $(0,x_1]$ является строго возрастающей и $y_1'(x_1,\lambda) > 0$. Из полученного противоречия следует, что $y_1'(x,\lambda) > 0$ для $x \in [0,\infty)$, $\lambda > 0$. Но в этом случае $y_1(x,\lambda)$ является положительной, монотонно возрастающей функцией и не может удовлетворять условию $y_1(\infty,\lambda) = 0$. Следовательно, $y_1(x,\lambda) \equiv 0$ для $x \in [0,\infty)$ и краевая задача (10), (15) имеет единственное решение.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $y_2(x,\lambda)$ — решение задачи (10), (15) с $y_0 > 0$. Докажем, что $y_2'(x,\lambda) < 0$ для $x \in (0,\infty)$.

Если $y_2'(0,\lambda) \geqslant 0$, то аналогично предыдущему можно доказать, что $y_2(x,\lambda) > 0$ и $y_2'(x,\lambda) > 0$ для $x \in (0,\infty)$, а значит, $y_2(x,\lambda)$ не может удовлетворять условию $y_2(\infty,\lambda) = 0$. Следовательно, $y_2'(0,\lambda) < 0$. Предположим, что в некоторой точке x_2 $y_2'(x_2,\lambda) = 0$. Тогда $y_2(x,\lambda)$ является при $x \geqslant x_2$ решением уравнения (10) с краевыми условиями $y_2'(x_2,\lambda) = 0$, $y_2(\infty,\lambda) = 0$. Аналогично предыдущему можно показать, что $y_2(x,\lambda) \equiv 0$ для $x \geqslant x_2$. Тогда так как $y_2(x,\lambda)$ есть решение уравнения (10) для $x \geqslant 0$, то $y_2(x,\lambda) \equiv 0$ для $x \geqslant 0$. Следовательно, предположение о том, что $y_2'(x,\lambda)$ может обращаться в ноль, неверно и $y_2'(x,\lambda) < 0$ для $x \in [0,\infty)$, $\lambda > 0$, что и доказывает лемму 3.3.1.

В лемме 3.3.1 установлено, что краевая задача (10), (15) в случае однородных краевых условий ($y_0 = 0$) имеет только нулевое решение. Следовательно, для любой непрерывной при $x \geqslant 0$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty,$$

краевая задача

$$y''(x,\lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma^2(x)} y(x,\lambda) = -f(x), \tag{16}$$

$$y(0,\lambda) = 0, \quad y(\infty,\lambda) = 0 \tag{17}$$

имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$y(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,\xi;\lambda) f(\xi) d\xi,$$

где $G(x,\xi;\lambda)$ — функция Грина.

Установим некоторые свойства функции Грина задачи (16), (17).

Лемма 3.3.2. *Функция Грина краевой задачи* (16), (17) *обладает следующими свойствами:*

1) $G(x,\xi;\lambda) \geqslant 0$ *для* $0 \leqslant x,\xi < \infty$, $\lambda > 0$;

2) *Если* $G_i(x,\xi;\lambda)$ *функции Грина, соответствующие коэффициентам* $\sigma_i(x)$, $i = 1,2$, *то из неравенства* $\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x)$ *для* $x \in [0,\infty)$ *следует, что* $G_1(x,\xi;\lambda) \geqslant G_2(x,\xi;\lambda)$ *для* $0 \leqslant x,\xi < \infty$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Для функции Грина справедливо следующее представление:

$$G(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} y_1(x,\lambda)y_2(\xi,\lambda)/W, & 0 \leqslant x \leqslant \xi < \infty, \\ y_1(\xi,\lambda)y_2(x,\lambda)/W, & 0 \leqslant \xi \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{18}$$

где $W = y_2(x,\lambda)y_1'(x,\lambda) - y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)$, а $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ линейно независимые решения уравнения (10), удовлетворяющие условиям $y_1(0,\lambda) = 0$, $y_2(\infty,\lambda) = 0$.

Возьмем в качестве $y_1(x,\lambda)$ решение (10) с условиями $y_1(0,\lambda) = 0$, $y_1'(0,\lambda) = 1$, а в качестве $y_2(x,\lambda)$ решение (10), такое, что $y_2(x,\lambda) = \exp\{-\lambda x/\sigma_0\}$ для $x \geqslant x_0$. Проведя рассуждения, аналогичные сделанным в лемме 3.3.1, можно показать, что $y_1(x,\lambda) > 0$, $y_2(x,\lambda) > 0$ для $x > 0$, $\lambda > 0$. Кроме того, W не зависит от x, а значит, $W = y_2(0,\lambda) > 0$ для $\lambda > 0$. Тогда из формулы (18) следует, что $G(x,\xi;\lambda) \geqslant 0$ для $0 \leqslant x,\xi < \infty$, $\lambda > 0$.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x)$ для $x \in [0,\infty)$ и $G_1(x,\xi;\lambda)$, $G_2(x,\xi;\lambda)$ — соответствующие этим коэффициентам функции Грина. Рассмотрим произвольные фиксированные $\bar{\xi} > 0$, $\bar{\lambda} > 0$. Так как функции Грина $G_i(x,\bar{\xi};\bar{\lambda})$ при $x \neq \bar{\xi}$ как функции x являются решениями уравнений

$$G_i''(x,\bar{\xi};\bar{\lambda}) - \frac{\bar{\lambda}^2}{\sigma_i^2(x)}G_i(x,\bar{\xi};\bar{\lambda}) = 0$$

и удовлетворяют условиям (17), то их разность

$$z(x) = G_1(x,\bar{\xi};\bar{\lambda}) - G_2(x,\bar{\xi};\bar{\lambda})$$

является решением задачи

$$z''(x) - \frac{\lambda^2}{\sigma_2^2(x)}z(x) = \left(\frac{\bar{\lambda}^2}{\sigma_1^2(x)} - \frac{\bar{\lambda}^2}{\sigma_2^2(x)}\right)G_1(x,\bar{\xi};\bar{\lambda}), \tag{19}$$
$$z(0) = z(\infty) = 0.$$

Так как функции $G_i(x,\bar{\xi};\bar{\lambda})$ как функции x в точке $\bar{\xi}$ непрерывны, а их производные имеют один и тот же разрыв, то $z(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную. Из условия $\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x)$ и неотрицательности $G_1(x,\bar{\xi};\bar{\lambda})$ следует, что правая часть уравнения (19) неположительна для $x \in [0,\infty)$. Покажем, что $z(x) \geqslant 0$ для $x \in [0,\infty)$. Предположим, что в точке $x_0 > 0$ достигается отрицательный минимум функции $z(x)$. Тогда $z(x_0) < 0$, $z'(x_0) = 0$ и существует $\epsilon > 0$, такое, что $z(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$. Учитывая неположительность правой части уравнения (19), получим, что $z''(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Следовательно, $z'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Но это неравенство противоречит предположению о том, что в точке x_0 достигается отрицательный минимум $z(x)$. Таким образом, исходное предположение было неверно и $z(x) \geqslant 0$ для $x \in [0,\infty)$. Так как значения $\bar{\xi}$, $\bar{\lambda}$ были произвольны, то $G_1(x,\xi;\lambda) > G_2(x,\xi;\lambda)$ для $x,\xi \in [0,\infty)$, $\lambda > 0$. Лемма 3.3.2 доказана.

Найдем выражение для функции Грина для задачи (16), (17) в случае постоянной на полупрямой $x \geqslant 0$ функции $\sigma(x) = \sigma^*$.

Фундаментальная система решений уравнения (16) в этом случае $\exp\{-\lambda x/\sigma^*\}$, $\exp\{\lambda x/\sigma^*\}$. Выбирая в формуле (18)

$$y_1(x,\lambda) = \operatorname{sh}(\lambda x/\sigma^*), \quad y_2(x,\lambda) = \exp(-\lambda x/\sigma^*),$$

получим $W = \lambda/\sigma^*$ и

$$G(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} \sigma^* \operatorname{sh}(\lambda x/\sigma^*)\exp(-\lambda\xi/\sigma^*)/\lambda, & 0 \leqslant x \leqslant \xi < \infty, \\ \sigma^* \operatorname{sh}(\lambda\xi/\sigma^*)\exp(-\lambda x/\sigma^*)/\lambda, & 0 \leqslant \xi \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{20}$$

Перейдем теперь к исследованию обратной задачи. Рассмотрим несколько более общую постановку обратной задачи для уравнения (10), а именно требуется определить $\sigma(x)$, если при $\lambda > 0$ известна функция $\Phi(\lambda) = y'(0,\lambda)/y(0,\lambda)$, где $y(x,\lambda)$ — нетривиальное решение уравнения (10), удовлетворяющее условию $y(\infty,\lambda) = 0$. Отметим, что эта постановка содержит в себе предыдущую формулировку обратной задачи для уравнения (10), поскольку в случае, когда известны $\bar{y}(0,\lambda) = q$ и $\bar{y}'(0,\lambda) = \varphi(\lambda)$, функция $\Phi(\lambda) = \varphi(\lambda)/q$.

Рассмотрим вопрос о единственности решения сформулированной обратной задачи. Обозначим через Σ класс положительных при $x \geqslant 0$ функций $\sigma(x)$, таких, что

$$\sigma(x) = \begin{cases} \bar{\sigma}(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \sigma_0, & x \geqslant x_0, \end{cases}$$

где $\bar{\sigma}(x)$ — функция, аналитическая на интервале, содержащем отрезок $[0, x_0]$, такая, что $\bar{\sigma}(x_0) = \sigma_0$.

Докажем теорему единственности решения задачи определения $\sigma(x)$ по функции $y'(0,\lambda)/y(0,\lambda)$, заданной при $\lambda > 0$ [77].

Теорема 3.3.2. *Пусть $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ нетривиальные решения (10) для функций $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ ($\sigma_1(x), \sigma_2(x) \in \Sigma$) соответственно, удовлетворяющие условию*

$$y_1(\infty,\lambda) = 0, \quad y_2(\infty,\lambda) = 0. \tag{21}$$

Тогда если для всех $\lambda > 0$

$$\frac{y_1'(0,\lambda)}{y_1(0,\lambda)} = \frac{y_2'(0,\lambda)}{y_2(0,\lambda)}, \tag{22}$$

то $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ для $x \in [0,\infty)$.

Доказательство. Так как $y_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$, являются решениями однородного уравнения (10) с однородным условием (21), то они определены с точностью до постоянного сомножителя. Из леммы 3.3.1 следует, что $y_i(0,\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda > 0$. Таким образом, функции $y_i(x,\lambda)$ можно нормировать условием $y_i(0,\lambda) = 1$, $i = 1,2$.

Так как $y_i(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (10) с коэффициентами $\sigma_i(x)$ соответственно, то

$$y_1''(x,\lambda) - y_2''(x,\lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2(x)}y_1(x,\lambda) + \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2(x)}y_2(x,\lambda) -$$
$$-\frac{\lambda^2}{\sigma_1^2(x)}y_2(x,\lambda) + \frac{\lambda^2}{\sigma_2^2(x)}y_2(x,\lambda) = 0.$$

Следовательно, функция $z(x,\lambda) = y_1(x,\lambda) - y_2(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$z''(x,\lambda) - \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2(x)}z(x,\lambda) = -F(x,\lambda), \tag{23}$$

где

$$F(x,\lambda) = \left[\frac{1}{\sigma_2^2(x)} - \frac{1}{\sigma_1^2(x)}\right]y_2(x,\lambda)\lambda^2,$$

и краевым условиям

$$z(0,\lambda) = 0, \quad z(\infty,\lambda) = 0. \tag{24}$$

Используя представление решения задачи (23), (24) через функцию Грина, получим

$$z(x,\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^\infty G_1(x,\xi;\lambda)\left[\frac{1}{\sigma_2^2(\xi)} - \frac{1}{\sigma_1^2(\xi)}\right]y_2(\xi,\lambda)d\xi. \tag{25}$$

Так как функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ принадлежат классу Σ, то $\sigma_1(x) = \bar\sigma_1(x)$ для $x \in [0,x_{01}]$ и $\sigma_2(x) = \bar\sigma_2(x)$ для $x \in [0,x_{02}]$, где $\bar\sigma_1(x)$, $\bar\sigma_2(x)$ — функции, аналитические на отрезках $[0,x_{01}]$, $[0,x_{02}]$ соответственно. Обозначим через $x_3 = \min\{x_{01},x_{02}\}$. На отрезке $[0,x_3]$ функция $\alpha(x) = 1/\sigma_2^2(x) - 1/\sigma_1^2(x)$ является аналитической. Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что либо $\alpha(x) = 0$ на $[0,x_3]$, либо $\alpha(x)$ имеет на этом отрезке конечное число нулей. Таким образом, возможны два случая: 1) $\alpha(x) = 0$ для $x \in [0,x_3]$; 2) существует $x_4 \in (0,x_3]$, такое, что $\alpha(x) \neq 0$ для $x \in (0,x_4]$.

Покажем, что второй случай невозможен. Предположим, что он реализуется, и примем для определенности, что $\alpha(x) > 0$ для $x \in (0,x_4]$. Из условий на класс функций Σ следует, что существуют положительные постоянные σ_m и σ_M, такие, что

$$\sigma_m \leqslant \sigma_1(x) \leqslant \sigma_M \tag{26}$$

для $x \in [0, \infty)$. Определим $x_5 = x_4\sigma_m/2\sigma_M$. Так как $x_5 > 0$, то существует $\alpha_0 > 0$, такое, что $\alpha(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ для $x \in [x_5, x_4]$. Запишем представление (25) следующим образом:

$$z(x,\lambda)=\lambda^2 \int\limits_0^{x_4} G_1(x,\xi;\lambda)\alpha(\xi)y_2(\xi,\lambda)d\xi+\lambda^2 \int\limits_{x_4}^{\infty} G_1(x,\xi;\lambda)\alpha(\xi)y_2(\xi,\lambda)d\xi. \tag{27}$$

Из лемм 3.3.1, 3.3.2 следует, что $y_2(x,\lambda)$ при $x \in [0,\infty)$ — положительная монотонно убывающая функция и $G_1(x,\xi;\lambda) \geqslant 0$. Учитывая это, из (27) получим, что для $x \in (0, x_5)$

$$z(x,\lambda)\geqslant\lambda^2 \int\limits_{x_5}^{x_4} G_1(x,\xi;\lambda)\alpha(\xi)d\xi y_2(x_4,\lambda)-\lambda^2 y_2(x_4,\lambda) \int\limits_{x_4}^{\infty} G_1(x,\xi;\lambda)|\alpha(\xi)|d\xi. \tag{28}$$

Обозначим $A = \max_{0 \leqslant \xi < \infty} |\alpha(\xi)|$, а $G_m(x,\xi;\lambda)$, $G_M(x,\xi;\lambda)$ — функции Грина задачи (16), (17) для $\sigma(x) = \sigma_m$ и $\sigma(x) = \sigma_M$ соответственно. Из неравенства (26) и леммы 3.3.2 следует, что для $0 \leqslant x, \xi < \infty$ и $\lambda > 0$

$$G_m(x,\xi;\lambda) \leqslant G_1(x,\xi;\lambda) \leqslant G_M(x,\xi;\lambda).$$

Учитывая это неравенство, из (28) получим, что для $x \in (0, x_5)$ и $\lambda > 0$

$$z(x,\lambda) \geqslant \lambda^2 y_2(x_4,\lambda)\left[\alpha_0 \int\limits_{x_5}^{x_4} G_m(x,\xi;\lambda)d\xi - A \int\limits_{x_4}^{\infty} G_M(x,\xi;\lambda)d\xi\right].$$

Используя это неравенство и представление (20) для функции Грина в случае постоянной $\sigma(x)$, имеем для $x \in (0, x_5)$ и $\lambda > 0$

$$z(x,\lambda) \geqslant \lambda^2 y_2(x_4,\lambda)\left[\alpha_0 \int\limits_{x_5}^{x_4} \frac{\sigma_m}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x/\sigma_m)\exp(-\lambda\xi/\sigma_m)d\xi - \right.$$

$$\left. -A \int\limits_{x_4}^{\infty} \frac{\sigma_M}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x/\sigma_M)\exp(-\lambda\xi/\sigma_M)d\xi\right] =$$

$$= \lambda^2 y_2(x_4,\lambda)\left\{\alpha_0 \frac{\sigma_m^2}{\lambda^2}\operatorname{sh}(\lambda x/\sigma_m)\left[\exp(-\lambda x_5/\sigma_m) - exp(-\lambda x_4/\sigma_m)\right] - \right.$$

$$\left. -A\frac{\sigma_M^2}{\lambda^2}\operatorname{sh}(\lambda x/\sigma_M)\exp(-\lambda x_4/\sigma_M)\right\}.$$

Таким образом, для $x \in (0, x_5)$ и $\lambda > 0$

$$z(x,\lambda) \geqslant P(x,\lambda), \tag{29}$$

где

$$P(x,\lambda)=y_2(x_4,\lambda)\Big\{\alpha_0\sigma_m^2\,\mathrm{sh}(\lambda x/\sigma_m)\left[\exp(-\lambda x_5/\sigma_m)-exp(-\lambda x_4/\sigma_m)\right]- \\ -A\sigma_M^2\,\mathrm{sh}(\lambda x/\sigma_M)\exp(-\lambda x_4/\sigma_M)\Big\}.$$

Так как $z(0,\lambda) = P(0,\lambda) = 0$ для $\lambda > 0$, то из (29) следует, что

$$z'(0,\lambda) \geqslant P'(0,\lambda) \ \text{ для } \ \lambda > 0. \tag{30}$$

Из определения функции $P(x,\lambda)$ получим, что

$$P'(0,\lambda) = y_2(x_4,\lambda)\left[\alpha_0\sigma_m\lambda\exp(-\lambda x_5/\sigma_m)- \right. \\ \left. -\alpha_0\sigma_m\lambda\exp(-\lambda x_4/\sigma_m) - A\sigma_M\lambda\exp(-\lambda x_4/\sigma_M)\right].$$

Так как $x_5/\sigma_m < x_4/\sigma_M$, то существует $\lambda_0 > 0$, такое, что $P'(0,\lambda) > 0$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$. Тогда из неравенства (30) получим, что $z'(0,\lambda) > 0$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$. Но из условия (22) и условий нормировки $y_i(0,\lambda) = 1$, $i = 1, 2$, следует, что $z'(0,\lambda) = 0$ для всех $\lambda > 0$. Полученное противоречие показывает, что второй случай невозможен и $\alpha(x) = 0$ для $x \in [0, x_3]$.

Итак, доказано, что $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ для $x \in [0, x_3]$. Тогда из условий нормировки $y_1(0,\lambda) = y_2(0,\lambda) = 1$ и условия (22) получим, что $y_1(x,\lambda) = y_2(x,\lambda)$ для $x \in [0, x_3]$ и $\lambda > 0$. Следовательно, при $\lambda > 0$

$$\frac{y_1'(x_3,\lambda)}{y_1(x_3,\lambda)} = \frac{y_2'(x_3,\lambda)}{y_2(x_3,\lambda)}. \tag{31}$$

Рассмотрим отрезок $[x_3, x_6]$, где $x_6 = \max\{x_{01}, x_{02}\}$. На этом отрезке одна из функций $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ постоянна, а другая равна функции, аналитической на $[x_3, x_6]$. Аналогично предыдущему, из (31) получим, что $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ при $x \in [x_3, x_6]$, а значит, $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ при $x > 0$. Теорема 3.3.2 доказана.

Замечание 3.3.1. Условие аналитичности функции $\sigma(x)$ на отрезке $[0, x_0]$ использовалось при доказательстве только для того, чтобы сделать утверждение о том, что $\alpha(x) = 1/\sigma_1^2(x) - 1/\sigma_2^2(x)$ либо тождественно равно нулю, либо имеет конечное число нулей. Следовательно, теорему 3.3.2 можно переформулировать для класса функций, таких, что для любых двух функций из этого класса функция $1/\sigma_1^2(x) - 1/\sigma_2^2(x)$ либо тождественно равна нулю, либо имеет конечное число нулей.

Замечание 3.3.2. При доказательстве теоремы 3.3.2 с целью технического упрощения доказательства предполагалось, что $\sigma(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$. Без принципиальных изменений в доказательстве, теорема 3.3.2 может быть доказана для класса кусочно-аналитических функций [77], который более естествен с точки зрения геофизических приложений рассматриваемой обратной задачи.

Рассмотрим вопрос об устойчивости обратной задачи (10)-(13). Уравнение (10) с краевыми условиями (12), (13) определяет оператор A, ставящий в соответствие функции $\sigma(x)$ функцию $\varphi(\lambda) = \bar{y}'(0,\lambda)$, где $\bar{y}(x,\lambda)$ — решение задачи (10), (12), (13). Рассматриваемая обратная задача может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения $A\sigma = \varphi$. Покажем, что эта задача неустойчива в случае, когда для оценки близости $\sigma(x)$ выбирается равномерная метрика, а исходные данные $\varphi(\lambda)$ задаются с погрешностью также в равномерной метрике. Приведем пример последовательности функций $\sigma_n(x)$, такой, что $\max_{0\leqslant x<\infty}|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)| \not\to 0$ при $n \to \infty$, а $\sup_{0<\lambda<\infty}|\varphi_n(\lambda) - \varphi_0(\lambda)| \to 0$ при $n \to \infty$, где $A\sigma_n = \varphi_n$ и $A\varphi_0 = \sigma_0$.

Пусть $\sigma_0^2(x) = \sigma_0^2$, где σ_0 — положительная постоянная. Рассмотрим последовательность положительных функций $\sigma_n(x)$, такую, что

$$\sigma_n^2(x) = \begin{cases} \sigma_0^2, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad x_0 + 1/n \leqslant x < \infty, \\ \sigma_0^2 - g_n(x), & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 1/n, \end{cases}$$

где $g_n(x)$ — непрерывная неотрицательная на отрезке $[x_0, x_0 + 1/n]$ функция, такая, что $g_n(x_0) = g_n(x_0 + 1/n) = 0$ и $\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+1/n} g_n(x) = \sigma_0^2/2$. Очевидно, что при таком выборе $\sigma_n(x)$ и $\sigma_0(x)$ $\max_{0\leqslant x<\infty}|\sigma_n(x) - \sigma_0(x)| \not\to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим разность $\varphi_n(\lambda) - \varphi_0(\lambda) = y_n'(0,\lambda) - y_0'(0,\lambda)$, где $y_n(x,\lambda)$, $y_0(x,\lambda)$ — решения задачи (10), (12), (13) с коэффициентами $\sigma_n(x)$ и $\sigma_0(x)$ соответственно. Введем функцию

$$W_n(x,\lambda) = y_0(x,\lambda) - y_n(x,\lambda).$$

Для этой функции справедливо представление, аналогичное (25):

$$W_n(x,\lambda) = \lambda^2 \int_0^\infty G_0(x,\xi;\lambda)\left[\frac{1}{\sigma_n^2(\xi)} - \frac{1}{\sigma_0^2(\xi)}\right] y_n(\xi,\lambda)\,d\xi, \qquad (32)$$

где $G_0(x,\xi;\lambda)$ — функция Грина, определяемая коэффициентом $\sigma_0(x)$. Из леммы 3.3.1, неотрицательности $G_0(x,\xi;\lambda)$ и представления (32) следует, что для $0 \leqslant x < \infty$, $\lambda > 0$, $n \geqslant 1$ выполнены неравенства $0 \leqslant y_n(x,\lambda) \leqslant y_0(x,\lambda)$. Учитывая это неравенство, а также определение функции $\sigma_n(\xi)$, получим оценку для производной $W_n(x,\lambda)$ в нуле

$$|W_n'(0,\lambda)| \leqslant \lambda^2 \int\limits_{x_0}^{x_0+1/n} \left|\frac{\partial G_0}{\partial x}(0,\xi;\lambda)\right| \left|\frac{1}{\sigma_n^2(\xi)} - \frac{1}{\sigma_0^2(\xi)}\right| y_0(\xi,\lambda)d\xi.$$

Так как $y_0(\xi,\lambda)=q\exp(-\lambda\xi/\sigma_0)$, а $G_0(x,\xi;\lambda)=\frac{\sigma_0}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x/\sigma_0)\exp(-\lambda\xi/\sigma_0)$ для $x<\xi$, то для $\lambda>0$

$$|W_n'(0,\lambda)| \leqslant \lambda^2 q \int\limits_{x_0}^{x_0+1/n} \exp(-2\lambda\xi/\sigma_0)\frac{1}{\sigma_0^2}d\xi =$$

$$= \frac{\lambda q}{2\sigma_0}\big[\exp(-2\lambda x_0/\sigma_0) - \exp(-2\lambda(x_0+1/n)/\sigma_0)\big].$$

Из этой оценки следует, что $\sup_{\lambda>0}|W_n'(0,\lambda)| \to 0$ при $n\to\infty$. Так как $\sup_{\lambda>0}|\varphi_n(\lambda)-\varphi_0(\lambda)| = \sup_{\lambda>0}|W_n'(0,\lambda)|$, то $\sup_{\lambda>0}|\varphi_n(\lambda)-\varphi_0(\lambda)| \to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, рассмотренная обратная задача неустойчива в указанном выше смысле.

Обратная задача Штурма–Лиувилля. Рассмотрим на отрезке $[0,\pi]$ дифференциальное уравнение

$$-y''(x,\lambda)+q(x)y(x,\lambda)=\lambda y(x,\lambda) \tag{33}$$

с краевыми условиями

$$y(0,\lambda)\cos\alpha + y'(0,\lambda)\sin\alpha = 0, \tag{34}$$
$$y(\pi,\lambda)\cos\beta + y'(\pi,\lambda)\sin\beta = 0, \tag{35}$$

где функция $q(x)$ действительна и непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, α и β — действительные числа, а λ — комплексный параметр. Краевая задача (33)–(35) называется задачей Штурма–Лиувилля. Задачу Штурма–Лиувилля обычно рассматривают на отрезке $[0,\pi]$, поскольку при замене переменной $x'=(x-a)\pi/(b-a)$ отрезок $[a,b]$ преобразуется в $[0,\pi]$, а уравнение и краевые условия не изменяются.

Прежде чем рассматривать постановку обратной задачи, изложим некоторые понятия и результаты, связанные с задачей Штурма–Лиувилля.

Число $\bar\lambda$ называется собственным значением задачи (33)–(35), если при $\lambda=\bar\lambda$ эта краевая задача имеет нетривиальное решение $y(x,\bar\lambda)$. Решение $y(x,\bar\lambda)$ называется собственной функцией краевой задачи (33)–(35). Очевидно, что собственная функция определена с точностью до постоянного множителя.

Сформулируем некоторые свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма–Лиувилля [54]:

1) собственные функции $y(x, \lambda_1)$ и $y(x, \lambda_2)$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0;$$

2) собственные значения действительны;

3) существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$. При этом собственная функция $y(x, \lambda_m)$ имеет в интервале $(0, \pi)$ m нулей.

Важное значение имеет свойство полноты системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Введем обозначения

$$v(x, \lambda_n) = y(x, \lambda_n)/\|y(x, \lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]},$$

$$f_n = \int_0^\pi f(x) v(x, \lambda_n) dx.$$

Справедливы следующие теоремы [54]:

Теорема 3.3.3. *Если функция $f(x)$ интегрируема с квадратом на $[0, \pi]$, то имеет место равенство Парсеваля*

$$\int_0^\pi f^2(x) dx = \sum_{n=0}^\infty f_n^2.$$

Теорема 3.3.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и ряд $\sum_{n=0}^\infty f_n v(x, \lambda_n)$ сходится на $[0, \pi]$ равномерно, то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n v(x, \lambda_n).$$

Эти теоремы находят широкое применение при исследовании уравнений в частных производных с помощью метода разделения переменных. Из теоремы 3.3.3 следует полнота в $L_2[0, \pi]$ многих хорошо известных систем функций. Например, при $q(x) = 0$, $\alpha = \beta = 0$ собственные значения $\lambda_n = (n+1)^2$, $n = 0, 1, \dots$, собственные функции $y(x, \lambda_n) = \sin(n+1)x$, а при $q(x) = 0$, $\alpha = \beta = \pi/2$ собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \dots$, собственные функции $y(x, \lambda_n) = \cos nx$.

Перейдем теперь к постановке обратной задачи Штурма–Лиувилля. Пусть функция $q(x)$ в уравнении (33) не известна и требуется определить ее, зная совокупность собственных значений задачи (33)–(35). Первый результат в исследовании этой обратной задачи был получен В.А. Амбарцумяном [91] и состоит в следующем. Если $\alpha = \beta = \pi/2$ и известно, что собственные значения задачи (33)–(35) $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$, то $q(x) = 0$ для $x \in [0, \pi]$. Однако этот результат не является типичным в том смысле, что одной последовательности собственных значений не достаточно для однозначного определения произвольной функции $q(x)$. Общая теорема единственности определения функции $q(x)$ была доказана Г. Боргом [93], который показал, что $q(x)$ однозначно определяется, если заданы собственные значения λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, задачи (33)–(35) и собственные значения μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, задачи (33), (34)

$$y(\pi, \lambda) \cos \gamma + y'(\pi, \lambda) \sin \gamma = 0, \tag{36}$$

где число γ таково, что $\sin(\gamma - \beta) \neq 0$. Г. Борг доказал теорему единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля при некоторых ограничениях на постоянные α, β, γ. Эти ограничения были затем сняты в работах [89, 98].

Приведем точную формулировку теоремы единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля [98].

Теорема 3.3.5. *Пусть $q_1(x)$ и $q_2(x)$ — непрерывные на отрезке $[0, \pi]$ функции, а λ_n^i, $i = 1, 2$, — собственные значения задачи* (33)–(35) *и μ_n^i, $i = 1, 2$, собственные значения задачи* (33), (34), (36) *для функций $q_i(x)$, $i = 1, 2$ соответственно. Тогда, если $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$, $\mu_n^1 = \mu_n^2$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $q_1(x) = q_2(x)$ для $x \in [0, \pi]$.*

Следует отметить, что обратная задача Штурма–Лиувилля близка по постановке к обратным задачам, рассмотренным в предыдущих пунктах, и может быть сведена к задаче определения $q(x)$ по дополнительной информации о решении уравнения (33), представляющей собой функцию параметра λ. Действительно, пусть $v(x, \lambda)$ — решение уравнения (33) с начальными условиями

$$v(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad v'(0, \lambda) = -\cos \alpha. \tag{37}$$

Решение задачи Коши (33), (37) $v(x, \lambda)$ существует при любом комплексном λ и при фиксированном x как функция λ представляет собой функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Рассмотрим функцию комплексного переменного λ $g(\lambda) = v(\pi, \lambda) \cos \beta + v'(\pi, \lambda) \sin \beta$.

Из определения функций $g(\lambda)$ и $v(x, \lambda)$ следует, что каждый ноль функции $g(\lambda)$ является собственным значением задачи (33)-(35) и обратно каждое собственное значение задачи (33)-(35) является нулем функции $g(\lambda)$. Используя результаты теории функций комплексного переменного и свойства функции $v(x, \lambda)$, можно показать [98], что аналитическая во всей комплексной плоскости функция $g(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями. Таким образом, совокупность всех собственных значений задачи (33)–(35) λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, однозначно определяет функцию комплексного переменного $g(\lambda)$. Аналогично, совокупность всех собственных значений задачи (33), (34), (36) μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, однозначно определяет функцию комплексного переменного $p(\lambda) = v(\pi, \lambda)\cos\gamma + v'(\pi, \lambda)\sin\gamma$. Таким образом, можно говорить о том, что обратная задача Штурма–Лиувилля, состоящая в определении функции $q(x)$ по двум совокупностям собственных значений λ_n и μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, может быть сведена к задаче определения функции $q(x)$по двум функциям параметра λ $g(\lambda)$ и $p(\lambda)$.

Вернемся к теореме 3.3.5 о единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля. Из нее следует, что произвольная непрерывная функция $q(x)$ однозначно определяется в том случае, когда заданы две совокупности собственных значений λ_n и μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В связи с этим возникает следующий вопрос: возможно ли такое сужение класса функций $q(x)$, которое позволяет однозначно определять функции $q(x)$ из этого класса по одной совокупности собственных значений?

Рассмотрим класс непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций $q(x)$, таких, что $q(\pi - x) = q(x)$ для любого $x \in [0, \pi]$. Обозначим этот класс функций через Q. Для функций, принадлежащих классу Q, справедлива следующая теорема единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля [98].

Теорема 3.3.6. *Пусть числа α и β в краевых условиях* (34), (35) *таковы, что $\alpha + \beta = \pi$, а функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ принадлежат классу Q. Тогда если $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, где λ_n^1 и λ_n^2 собственные значения задачи Штурма–Лиувилля* (33)–(35) *для функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответственно, то $q_1(x) = q_2(x)$ для $x \in [0, \pi]$.*

В формулировку теоремы 3.3.6 входит не только условие принадлежности $q_i(x)$ классу Q, но и соотношение $\alpha + \beta = \pi$. Таким образом, требуется, чтобы не только функция $q(x)$ была симметрична относительно середины отрезка $[0, \pi]$, но и граничные условия (34), (35) обладали свойством симметрии.

Следует отметить, что так как каждое собственное значение задачи (33)–(35) является точкой спектра дифференциального оператора, порождаемого дифференциальным выражением $-y''(x) + q(x)y(x)$ и краевыми условиями (34), (35), то обратную задачу Штурма–Лиувилля относят к классу обратных спектральных задач.

Мы рассмотрели один из вариантов постановки обратной задачи Штурма–Лиувилля и привели теоремы единственности ее решения, которые были доказаны в первый период исследования этой задачи. Затем усилиями многих авторов обратная задача Штурма–Лиувилля была изучена весьма детально, в частности исследованы вопросы существования ее решения, а также были рассмотрены и исследованы другие варианты постановок этой обратной задачи. Ознакомиться с результатами, полученными в этом направлении, можно по книге [53] и приведенной в ней литературе.

Обратные задачи квантовой теории рассеяния. Одной из классических задач квантовой механики является задача о движении частицы в поле с центральным потенциалом $v(x)$. Исследование этой задачи приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$\varphi_l''(x,\lambda) + \left(\lambda^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} - v(x)\right)\varphi_l(x,\lambda) = 0, \tag{38}$$

рассматриваемому на полупрямой $x > 0$. Уравнение (38) называется радиальным уравнением Шредингера, неотрицательный целочисленный параметр l — угловым моментом [50].

Рассмотрим уравнение (38) в случае $l = 0$:

$$\varphi''(x,\lambda) + (\lambda^2 - v(x))\varphi(x,\lambda) = 0, \quad x > 0, \tag{39}$$

с начальным условием

$$\varphi(0,\lambda) = 0. \tag{40}$$

Будем предполагать, что потенциал $v(x)$ — кусочно-непрерывная при $x \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^\infty x|v(x)|dx < \infty. \tag{41}$$

В этом случае можно показать [57], что для всех действительных значений параметра $\lambda = k$ решение задачи (39), (40) при $x \to \infty$ имеет асимптотику

$$\varphi(x,k) = A(k)\sin(kx + \delta(k)) + o(1). \tag{42}$$

Функция $\delta(k)$ называется фазовым сдвигом, или фазой рассеяния.

Выведем формулу (42) для простого, но важного с практической точки зрения случая потенциала $v(x)$, тождественно равного нулю при $x \geqslant a > 0$. В этом случае общее решение уравнения (39) при $x \geqslant a$ имеет вид

$$\varphi(x,k) = c_1(k)\sin(kx) + c_2(k)\cos(kx).$$

Из условия непрерывности функций $\varphi(x,k)$ и $\varphi'(x,k)$ в точке $x = a$ мы получим систему для определения постоянных $c_1(k)$ и $c_2(k)$

$$\begin{gathered} c_1(k)\sin(ka) + c_2(k)\cos(ka) = \varphi(a,k), \\ kc_1(k)\cos(ka) - kc_2(k)\sin(ka) = \varphi'(a,k). \end{gathered}$$

Следовательно, при $x \geqslant a$

$$\varphi(x,k) = \frac{\sqrt{k^2\varphi^2(a,k) + (\varphi'(a,k))^2}}{k}\sin(kx + \delta(k)),$$

где $\operatorname{tg}\delta(k) = \frac{c_2(k)}{c_1(k)} = \frac{k\varphi(a,k)\cos(ka) - \varphi'(a,k)\sin(ka)}{k\varphi(a,k)\sin(ka) + \varphi'(a,k)\cos(ka)}$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае асимптотическая формула (42) переходит в точное равенство при $x > a$.

Рассмотрим постановку обратной задачи квантовой теории рассеяния. Из экспериментов по рассеянию частиц можно определить фазу рассеяния $\delta(k)$. Обратная задача квантовой теории рассеяния состоит в определении потенциала взаимодействия $v(x)$ по фазе рассеяния $\delta(k)$. Интенсивное исследование этой обратной задачи обусловлено как теоретическими проблемами квантовой механики, так и задачами обработки результатов экспериментов по рассеянию частиц. Одним из первых результатов по обратной задачи квантовой теории рассеяния была полученная Левинсоном теорема единственности [99]. В этой теореме было доказано, что если фаза рассеяния $\delta(k)$ задана при $k \geqslant 0$ и выполнено условие

$$|\delta(0) - \delta(\infty)| < \pi, \tag{43}$$

то потенциал $v(x)$ при $x \geqslant 0$ определяется однозначно. Однако в общем случае однозначно определить потенциал $v(x)$ по фазе рассеяния $\delta(k)$, заданной при $k \geqslant 0$, невозможно. Было построено семейство потенциалов, имеющих одну и ту же фазу рассеяния при $k \geqslant 0$. Эта неоднозначность связана с тем, что может существовать конечное число $N \geqslant 0$ чисто мнимых значений $\lambda_j = i\mu_j$, $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, таких, что

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,\lambda_j)e^{\mu_j x} = 1, \tag{44}$$

где $\varphi(x,\lambda_j)$ — решение задачи (39), (40) с $\lambda = \lambda_j = i\mu_j$. Заметим, что при $N > 0$ условие (43) не выполняется. В этом случае потенциал $v(x)$ однозначно определяется, если при $k > 0$ задана фаза рассеяния $\delta(k)$, значения λ_j, $j = 1, \ldots, N$, и m_j, такие, что

$$m_j^{-2} = \int\limits_0^\infty |\varphi(x,\lambda_j)|^2 dx, \quad j = 1, \ldots, N,$$

где $\varphi(x,\lambda_j)$ — решение задачи (39), (40), удовлетворяющее условию (44). Эта общая теорема единственности решения обратной задачи квантовой теории рассеяния была доказана В.А. Марченко [56], затем им была предложена процедура восстановления потенциала по заданным $\delta(k)$, $k > 0$, λ_j и m_j, $j = 1, 2 \ldots, N$, которая состоит в следующем [57]. По фазе рассеяния $\delta(k)$ определяется функция $S(k) = \exp\{2i\delta(k)\}$, обладающая свойством $S(-k) = \bar{S}(k)$ ($\bar{S}(k)$ — функция, комплексно-сопряженная к $S(k)$). Затем для $x \geqslant 0$ вводится функция

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} m_j^2 e^{-\mu_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(k)) e^{ikx} dk$$

и с этой функцией для $x \geqslant 0$ решается уравнение для функции $K(x, y)$

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_{x}^{\infty} K(x,t) F(y+t) dt = 0, \quad y \geqslant x.$$

После того как найдена функция $K(x,y)$, потенциал $v(x)$ определяется формулой

$$v(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x).$$

Разработанная В.А. Марченко процедура восстановления потенциала $v(x)$ имеет большое значение для теоретического исследования обратной задачи рассеяния, например для доказательства теоремы существования решения обратной задачи или определения исходных данных обратной задачи, для которых ее решение может быть получено в явном (аналитическом) виде. Существует также другая часто применяемая процедура восстановления потенциала $v(x)$ по точно заданным исходным данным обратной задачи, основанная на уравнении Гельфанда–Левитана [19].

Остановимся на вопросе устойчивости обратной задачи рассеяния, поскольку при решении практических задач необходимо учитывать, что исходные данные, полученные из экспериментов по рассеянию частиц, известны с погрешностью. Для простоты рассмотрим достаточно часто встречающийся в практике случай, когда априори известно, что $N = 0$. Одна из главных проблем, возникающих при практическом решении обратной задачи рассеяния, состоит в том, что фаза рассеяния $\delta(k)$ известна с погрешностью, причем только на конечном интервале значений переменной k, а именно $k \in [k_1, k_2]$, где $0 < k_1 < k_2 < \infty$. Это обстоятельство существенно затрудняет применение указанной выше процедуры для восстановления потенциала. Важное значение имеет также то, что обратная задача рассеяния является неустойчивой. Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся часто употребляемым в квантовой механики методом определения фазы рассеяния по потенциалу $v(x)$, который носит название метода фазовых функций [6].

В этом методе решение задачи (39), (40) ищется в виде

$$\varphi(x,k) = A(x,k)\sin(kx + z(x,k)).$$

В результате для функции $z(x,k)$ получаем задачу Коши

$$z'(x,k) = -\frac{v(x)}{k}\sin^2(kx + z(x,k)), \quad x > 0, \tag{45}$$

$$z(0,k) = 0, \tag{46}$$

а фаза рассеяния $\delta(k)$ определяется следующим образом:

$$\delta(k) = \lim_{x\to\infty} z(x,k). \tag{47}$$

Задача Коши (45), (46) вместе с (47) определяет оператор A, ставящий в соответствие потенциалу $v(x)$ фазу рассеяния $\delta(k)$. Таким образом, обратная задача рассеяния может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения $Av = \delta$ с приближенно заданной правой частью. Покажем, что обратная задача рассеяния неустойчива, если оператор A рассматривать действующим из пространства $C[0,a]$ в $C[k_1,k_2]$, при этом предполагается, что все потенциалы таковы, что $v(x) = 0$ для $x \geqslant a$. Из (45), (47) следует, что при $v(x) = 0$ для $x \geqslant a$ фаза рассеяния

$$\delta(k) = z(a,k). \tag{48}$$

Рассмотрим решения задачи (45), (46) $z_1(x,k)$ и $z_2(x,k)$, соответствующие потенциалам $v_1(x)$ и $v_2(x)$. Обозначим $h(x,k) = z_1(x,k) - z_2(x,k)$. Функция $h(x,k)$ является решением задачи

$$h'(x,k) = -\frac{v_1(x) - v_2(x)}{k}\sin^2(kx + z_1) - \frac{1}{k}h(x,k)p(x,k),$$

$$h(0,k) = 0,$$

где функция

$$p(x,k) = v_2(x)\int\limits_0^1 \sin 2(kx + z_2(x,k) + \theta(z_1(x,k) - z_2(x,k)))d\theta.$$

Следовательно,

$$h(x,k) = -\int\limits_0^x \frac{v_1(\xi) - v_2(\xi)}{k}\sin^2(k\xi + z_1(\xi,k))\exp\left\{-\frac{1}{k}\int\limits_\xi^x p(s,k)ds\right\}d\xi. \tag{49}$$

Приведем пример, показывающий неустойчивость обратной задачи рассеяния. Рассмотрим потенциалы $v(x)$ и $v_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $v(x) \geqslant 0$, $v_n(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$; $v(x) = v_n(x) = 0$ для $x \geqslant a > 0$; $v(x) = v_n(x)$ для $x \in [0, a - 1/n]$; $v(x), v_n(x) \in C[0, a]$;

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant a} |v(x) - v_n(x)| = V,$$

где V — произвольное фиксированное положительное число.

Применяя формулу (49) для представления разности решения задач (45), (46) с разными потенциалами и учитывая (48), получим, что

$$|\delta_n(k) - \delta(k)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k} \int_0^a |v_n(\xi) - v(\xi)| \sin^2(k\xi + z_n(\xi, k)) \exp\left\{ -\frac{1}{k} \int_\xi^a p_n(s, k) ds \right\} d\xi, \tag{50}$$

где $\delta_n(k)$, $\delta(k)$ — фазы рассеяния, $z_n(x, k)$, $z(x, k)$ — решения задачи (45), (46) для потенциалов $v_n(x)$, $v(x)$ соответственно. Функция $p_n(x, k)$ определяется решениями $z_n(x, k)$ и $z(x, k)$ аналогично функции $p(x, k)$. Так как функция $p_n(x, k)$ ограничена по модулю для всех s и k, то из (50) и условий на функции $v(x)$ и $v_n(x)$ следует, что

$$\|\delta_n - \delta\|_{C[k_1, k_2]} \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $\|v_n - v\|_{C[0,a]} = V$, а $\|\delta_n - \delta\|_{C[k_1,k_2]} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, обратная задача рассеяния неустойчива.

Построенный пример показывает неустойчивость обратной задачи рассеяния в случае, когда оператор A, определяемый уравнениями (45), (46), (48) рассматривается действующим из $C[0, a]$ в $C[k_1, k_2]$. Можно показать, что обратная задача рассеяния является неустойчивой и в ряде других случаев, например когда оператор A рассматривается действующим из $L_2[0, a]$ в $C[k_1, k_2]$.

Мы рассмотрели обратную задачу для уравнения (39). Другие постановки обратных задач связаны с более общим уравнением (38). Можно показать, что при выполнении условия (41) решение задачи (38), (40), $\varphi_l(x, \lambda)$ для действительных $\lambda = k$ имеет при $x \to \infty$ асимптотику

$$\varphi_l(x, k) = A_l(x, k) \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k)\right) + o(1).$$

В связи с этим можно сформулировать два типа обратных задач квантовой теории рассеяния:

1) фаза рассеяния $\delta_l(k)$ задается при фиксированном значении $l = l_0$ для всех значений k, и требуется определить потенциал взаимодействия $v(x)$;

2) фаза рассеяния задается при фиксированном значении $k = k_0$, но для всех значений углового момента $l = 0, 1, \dots$, и требуется определить потенциал $v(x)$.

Указанные два типа обратных задач квантовой теории рассеяния для радиального уравнения Шредингера (38) были предметом исследований целого ряда авторов. Подробное изложение теории обратных задач квантовой теории рассеяния содержится в [90].

В заключение отметим, что обратные задачи квантовой теории рассеяния можно ставить не только для радиального уравнения Шредингера (38), но и для ряда других уравнений. Одной из важных обратных задач является задача для уравнения (39), рассматриваемого на всей прямой. В ней также требуется восстановить потенциал $v(x)$ по данным о поведении решения уравнения на бесконечности при различных значениях параметра [53, 86]. Эта обратная задача имеет большое значение для исследования ряда нелинейных уравнений математической физики [58].

§4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений существенно шире класса линейных уравнений. В связи с этим постановки обратных задач для нелинейных уравнений могут быть более разнообразными. Остановимся вначале кратко на обратных задачах,в которых исходной информацией является решение дифференциального уравнения как функция независимой переменной.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'(x) = f(x, \alpha(x), y(x)), \tag{1}$$

где $f(x, \alpha, y)$ — заданная функция трех переменных. Для уравнения (1) сформулируем следующую обратную задачу. На отрезке $[a, b]$ задано некоторое решение уравнения (1) $\bar{y}(x)$ и требуется определить неизвестный коэффициент $\alpha(x)$. Вопрос о существовании и единственности решения этой обратной задачи тесно связан с однозначной разрешимостью относительно α уравнения $y_1 := f(x, \alpha, y)$. Пусть для любых x, y, y_1 это уравнение имеет единственное решение $\alpha = F(x, y, y_1)$, где $F(x, y, y_1)$ — непрерывная функция. Тогда для любой функции $\bar{y}(x) \in C^1[a, b]$ существует единственное решение сформулированной обратной задачи $\alpha(x) \in C[a, b]$, определяемое формулой $\alpha(x) = F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))$.

Примерами дифференциальных уравнений, для которых сформулированная обратная задача имеет такое простое решение, являются следующие: $y'(x) = f(x,y)+\alpha(x)$; $y'(x) = f(x,y)+\alpha(x)[y^2+1]$. В общем случае однозначная разрешимость рассматриваемой обратной задачи может зависеть от того, какое решение уравнения (1) задано в качестве исходной информации. Рассмотрим, например, уравнение $y'(x) = \alpha(x)y^2$. Если исходной информацией является решение $\bar{y}(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$, то решением обратной задачи будет любая функция $\alpha(x)$. В то же время, если задано решение $\bar{y}(x)$, не обращающееся в нуль на отрезке $[a,b]$, то коэффициент $\alpha(x)$ определяется однозначно.

Рассмотрим пример постановки обратной задачи для уравнения второго порядка, содержащего два неизвестных коэффициента. Пусть дано уравнение

$$y''(x) = f(x,\alpha(x),\beta(x),y(x),y'(x)), \tag{2}$$

где $f(x,\alpha,\beta,y,z)$ — заданная функция. Обратная задача состоит в следующем. На отрезке $[a,b]$ заданы два решения уравнения (2) $y_1(x)$ и $y_2(x)$, требуется определить на этом отрезке коэффициенты $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Эта задача сводится к системе уравнений относительно $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

$$f(x,\alpha(x),\beta(x),y_1(x),y_1'(x)) = y_1''(x),$$
$$f(x,\alpha(x),\beta(x),y_2(x),y_2'(x)) = y_2''(x).$$

Однозначная разрешимость этой системы относительно $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ зависит от свойств функции $f(x,\alpha,\beta,y,z)$ и того, какие решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ заданы в качестве исходной информации.

Отметим, что приближенное решение рассмотренных обратных задач для уравнений (1) и (2) сводится к задачам вычисления производной от функции, заданной приближенно, и решению нелинейного уравнения или системы таких уравнений.

Для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений можно поставить обратную задачу определения зависящего от решения коэффициента уравнения по решению этого уравнения. Рассмотрим пример постановки такой задачи. Задано уравнение

$$y'(x) = f(y(x)) \tag{3}$$

с неизвестным коэффициентом $f(\xi)$. Требуется определить $f(\xi)$, если задано некоторое решение этого уравнения $\bar{y}(x)$. Особенность этой задачи состоит в том, что область определения неизвестной функции зависит от исходной информации, а именно от функции $\bar{y}(x)$. Если решение уравнения (3) $\bar{y}(x)$ задано на отрезке $[a,b]$, то $f(\xi)$ можно определить на отрезке $[c,d]$, где c и d соответственно наименьшее и наибольшее значения $\bar{y}(x)$ на отрезке $[a, b]$. В том случае, когда функция $\bar{y}(x)$ задана приближенно в равномерной метрике, мы можем решить обратную задачу, используя устойчивый метод вычисления производной, но область значения функции $f(\xi)$ будет известна только приближенно. Очевидно, что ситуация усложняется, если мы рассматриваем задачу определения функции $f(\xi)$ по решению $\bar{y}(x)$ нелинейного уравнения второго порядка $y''(x) = f(y'(x))$. В этом случае при приближенном задании решения уравнения $\bar{y}(x)$ для определения области определения $f(\xi)$ необходимо решить задачу вычисления производной.

Рассмотрим обратные задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Исследование этих задач начнем с простого случая уравнения первого порядка

$$y'(x, \lambda) = \lambda f(y(x, \lambda)), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(0, \lambda) = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0. \tag{5}$$

Обратная задача состоит в следующем. Известно решение задачи (4), (5) в точке $x = 1$ (как функция параметра λ):

$$y(1, \lambda) = a(\lambda), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0. \tag{6}$$

Требуется определить $f(\xi)$. Уточним постановку этой обратной задачи. Так как неизвестен не только коэффициент уравнения, но и решение уравнения, от которого зависит этот коэффициент, то естественно ставить задачу определения пары функций $f(\xi)$ и $y(x, \lambda)$, удовлетворяющих уравнению (4) и условиям (5), (6).

Предположим, что заданная функция $a(\lambda)$, такова, что

$$a(\lambda) \in C^1[0, \lambda_0], \quad a'(\lambda) > 0 \ \text{ при } \ \lambda \in [0, \lambda_0], \ \ a(0) = 0. \tag{7}$$

Дадим определение решения обратной задачи (4)–(6).

Определение. *Пара функций $f(\xi), y(x, \lambda)$ называется решением обратной задачи* (4)–(6), *если:*

$f(\xi) \in C[0, a(\lambda_0)]$, $f(\xi) > 0$ *при* $\xi \in [0, a(\lambda_0)]$; (8)

$y(x, \lambda) \in C^1[0, 1]$ *для всех* $\lambda \in [0, \lambda_0]$; (9)

$0 \leqslant y(x, \lambda) \leqslant a(\lambda)$ *для* $x \in [0, 1]$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$; (10)

$f(y(x, \lambda)), y(x, \lambda)$ *удовлетворяют* (4)–(6).

Докажем теорему существования и единственности решения обратной задачи (4)–(6).

Теорема 3.4.1. *Если функция $a(\lambda)$ удовлетворяет условиям* (7), *то решение обратной задачи* (4)–(6) *существует и единственно.*

Доказательство. Предположим, что пара функций $f(\xi)$ и $y(x,\lambda)$ является решением обратной задачи (4)–(6). Тогда из (4) следует, что $y'(x,\lambda) > 0$ при $x \in [0,1]$, $\lambda \in (0,\lambda_0]$. Поделив уравнение (4) на $f(y(x,\lambda))$ и проинтегрировав от 0 до 1, имеем

$$\int_0^1 \frac{y'(x,\lambda)dx}{f(y(x,\lambda))} = \lambda.$$

Сделав в интеграле замену переменной $t = y(x,\lambda)$ и использовав условия (5), (6), получим уравнение для функции $f(t)$

$$\int_0^{a(\lambda)} \frac{dt}{f(t)} = \lambda, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0.$$

Дифференцируя это уравнение по λ, имеем $f(a(\lambda)) = a'(\lambda)$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Следовательно, для $f(\xi)$ справедливо представление

$$f(\xi) = a'(a^{-1}(\xi)), \quad \xi \in [0, a(\lambda_0)], \tag{11}$$

где $a^{-1}(\xi)$ — функция, обратная к $a(\lambda)$. Подставив найденное выражение для $f(\xi)$ в уравнение (4), получим

$$\frac{dy}{a'(a^{-1}(y))} = \lambda dx.$$

Учитывая формулу для производной от обратной функции $(a^{-1}(\xi))' = \frac{1}{a'(a^{-1}(\xi))}$ и условия (5), (7), имеем $a^{-1}(y) = \lambda x$. Следовательно,

$$y(x,\lambda) = a(\lambda x), \quad x \in [0,1], \;\; \lambda \in [0,\lambda_0]. \tag{12}$$

Таким образом, если $f(\xi)$ и $y(x,\lambda)$ являются решениями обратной задачи (4)–(6), то для них справедливы представления (11) и (12) соответственно. Следовательно, решение обратной задачи единственно. Существование решения обратной задачи также следует из формул (11), (12). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при выполнении условий (7) пара функций $f(\xi) = a'(a^{-1}(\xi))$ и $y(x,\lambda) = a(\lambda x)$ удовлетворяет условиям (8)–(10) и $f(y(x,\lambda))$, $y(x,\lambda)$ удовлетворяют (4)–(6) при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Таким образом, теорема 3.4.1 доказана.

В данное определение решения обратной задачи было включено условие (10), представляющее собой априорную оценку функции $y(x,\lambda)$. Это условие потребовалось для того, чтобы область определения функции $f(\xi)$ совпадала с областью значений $y(x,\lambda)$

при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Возможен другой вариант определения решения обратной задачи (4)–(6).

Определение. *Пара функций $f(\xi)$, $y(x,\lambda)$ называется решением обратной задачи* (4)–(6), *если $f(\xi)$ непрерывна при $\xi \in (-\infty,\infty)$, $f(\xi) > 0$ при $\xi \in [0,a(\lambda_0)]$; $y(x,\lambda) \in C^1[0,1]$ для всех $\lambda \in [0,\lambda_0]$; $f(y(x,\lambda))$ и $y(x,\lambda)$ удовлетворяют* (4)–(6) *при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$.*

При таком определении решения обратной задачи (4)–(6) изменяется утверждение о единственности ее решения. Действительно, так как $f(\xi)$ определена для всех ξ, то можно рассматривать функцию $f(y(x,\lambda))$ при любых значениях $y(x,\lambda)$. Однако из (4), (5) и положительности $f(\xi)$ при $\xi \in [0,a(\lambda_0)]$ имеем $y'(x,\lambda) > 0$ при $x \in [0,1]$, $\lambda \in (0,\lambda_0]$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично предыдущему. Но функция $f(\xi)$ определяется формулой (11) только для $\xi \in [0,a(\lambda_0)]$. Таким образом, единственность определения функции $f(\xi)$ можно доказать только для $\xi \in [0,a(\lambda_0)]$, т.е. на области значений $y(x,\lambda)$ при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Для доказательства существования непрерывной на всей прямой функции $f(\xi)$ достаточно доопределить $f(\xi) = a'(a^{-1}(\xi))$ с отрезка $\xi \in [0,a(\lambda_0)]$ на всю прямую так, чтобы полученная при этом функция была непрерывной. Очевидно, что такое доопределение неоднозначно.

Рассмотрим обратные задачи для нелинейных уравнений второго порядка,содержащих параметр. Задачи такого типа возникают при исследовании некоторых физических процессов [97] и обратных задач для уравнений в частных производных [3].

Рассмотрим задачу определения функций $f(t)$ и $y(x,\lambda)$, удовлетворяющих уравнению

$$y''(x,\lambda) = \lambda^2 f(y(x,\lambda)), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \tag{13}$$

и условиям

$$y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = b(\lambda), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \tag{14}$$

$$y(1,\lambda) = a(\lambda), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0, \tag{15}$$

где $b(\lambda)$ и $a(\lambda)$ — заданные функции. В постановке этой обратной задачи не выделено явно дополнительное условие, им может быть либо $y'(0,\lambda) = b(\lambda)$, либо $y(1,\lambda) = a(\lambda)$.

Предположим, что функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a(\lambda) \in C^1[0,\lambda_0], \quad a(0) = 0, \quad a'(\lambda) > 0 \ \text{ при } \ \lambda \in [0,\lambda_0], \tag{16}$$

$$b(\lambda) = \lambda g(\lambda), \quad g(\lambda) \in C^1[0,\lambda_0], \quad g(\lambda) > 0 \ \text{ при } \ \lambda \in [0,\lambda_0]. \tag{17}$$

Определение. *Решением обратной задачи* (13)–(15) *назовем пару функций $f(t)$ и $y(x,\lambda)$, таких, что $f(t) \in C(-\infty,\infty)$,*

$f(t) \in C^1[0, a(\lambda_0)]$, $f(t) > 0$ *при* $t \in [0, a(\lambda_0)]$; *для любого* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *функция* $y(x, \lambda) \in C^2[0, 1]$; $y(x, \lambda)$ *и* $f(y(x, \lambda))$ *удовлетворяют* (13)–(15) *при* $x \in [0, 1]$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Для обратной задачи (13)–(15) справедлива следующая теорема единственности решения [26].

Теорема 3.4.2. *Пусть функции* $a(\lambda)$ *и* $b(\lambda)$ *удовлетворяют условиям* (16) *и* (17) *соответственно. Тогда если* $f_1(t)$, $y_1(x, \lambda)$ *и* $f_2(t)$, $y_2(x, \lambda)$ — *решения обратной задачи* (13)–(15), *то* $f_1(t) = f_2(t)$ *для* $t \in [0, a(\lambda_0)]$ *и* $y_1(x, \lambda) = y_2(x, \lambda)$ *при* $x \in [0, 1]$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Доказательство. Пусть $f(t)$ и $y(x, \lambda)$ — некоторое решение обратной задачи (13)–(15). Тогда из (13), (14) и положительности $f(t)$ при $t \in [0, a(\lambda_0)]$ следует, что при $\lambda \in (0, \lambda_0]$

$$0 \leqslant y(x, \lambda) \leqslant a(\lambda), \quad y'(x, \lambda) > 0 \ \text{ для } \ x \in [0, 1].$$

Умножив уравнение (13) на $y'(x, \lambda)$ и проинтегрировав от 0 до x, получим

$$\left(y'(x, \lambda)\right)^2 - \left(y'(0, \lambda)\right)^2 = 2\lambda^2 \int\limits_{y(0,\lambda)}^{y(x,\lambda)} f(\xi) d\xi.$$

Учитывая условие (14), имеем

$$y'(x, \lambda)\left(b^2(\lambda) + 2\lambda^2 \int\limits_0^{y(x,\lambda)} f(\xi) d\xi\right)^{-1/2} = 1.$$

Проинтегрировав это равенство от 0 до 1 и сделав в интеграле замену переменной $t = y(x, \lambda)$, получим

$$\int\limits_{y(0,\lambda)}^{y(1,\lambda)} \left(b^2(\lambda) + 2\lambda^2 \int\limits_0^t f(\xi) d\xi\right)^{-1/2} dt = 1.$$

Учитывая условия (14), (15), (17), имеем

$$\int\limits_0^{a(\lambda)} \left(g^2(\lambda) + 2 \int\limits_0^t f(\xi) d\xi\right)^{-1/2} dt = \lambda, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0. \tag{18}$$

Таким образом, если функции $f(t)$ и $y(x, \lambda)$ являются решением обратной задачи (13)–(15), то функция $f(t)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению (18).

Пусть $f_1(t)$, $y_1(x, \lambda)$ и $f_2(t)$, $y_2(x, \lambda)$ — решения обратной задачи (13)–(15). Тогда функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ удовлетворяют уравнению

(18). Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. Обозначим

$$\beta_i(t) = 2\int_0^t f_i(\xi)d\xi, \quad i = 1,2. \tag{19}$$

Функции $\beta_i(t)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_0^{a(\lambda)} \left(g^2(\lambda) + \beta_i(t)\right)^{-1/2} dt = \lambda, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0.$$

Сделав в этом уравнении замену переменной $\mu = a(\lambda)$, имеем

$$\int_0^{\mu} \left(g^2(a^{-1}(\mu)) + \beta_i(t)\right)^{-1/2} dt = a^{-1}(\mu), \quad 0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0),$$

где $a^{-1}(\mu)$ — функция, обратная к $a(\lambda)$.

Получим уравнение для разности $\bar{\beta}(t) = \beta_1(t) - \beta_2(t)$. Так как

$$\int_0^{\mu} \left\{ \left(g^2(a^{-1}(\mu) + \beta_1(t)\right)^{-1/2} - \left(g^2(a^{-1}(\mu) + \beta_2(t)\right)^{-1/2} \right\} dt = 0,$$

$$0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0),$$

то $\bar{\beta}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\mu} G(\mu, t)\bar{\beta}(t)dt = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0), \tag{20}$$

где функция

$$G(\mu,t) = \left[\psi_1(\mu,t)\psi_2(\mu,t)\right]^{-1}\left[\psi_1(\mu,t) + \psi_2(\mu,t)\right]^{-1},$$

$$\psi_i(\mu,t) = \left(g^2(a^{-1}(\mu)) + \beta_i(t)\right)^{1/2}, \quad i = 1,2.$$

Уравнение (20) для функции $\bar{\beta}(t)$ является линейным интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода. Покажем, что оно имеет только нулевое решение. Из определения функций $G(\mu,t)$, $\beta_i(t)$ и условий (17) следует, что при $0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0)$ выполнено неравенство $G(\mu,\mu) > 0$. Кроме того, функция $G(\mu,t)$ имеет непрерывную при $0 \leqslant t \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0)$ частную производную по

μ. Следовательно, продифференцировав уравнение (20) по μ и поделив на $G(\mu,\mu)$, получим

$$\bar\beta(\mu)+\int\limits_0^\mu G_1(\mu,t)\bar\beta(t)dt=0,\quad 0\leqslant\mu\leqslant a(\lambda_0),\tag{21}$$

где $G_1(\mu,t)=\frac{\partial G}{\partial\mu}(\mu,t)/G(\mu,\mu)$. Уравнение (21) является линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода с непрерывным ядром. Следовательно, $\bar\beta(\mu)=0$ для $0\leqslant\mu\leqslant a(\lambda_0)$, а значит, $\beta_1(t)=\beta_2(t)$ при $t\in[0,a(\lambda_0)]$. Из этого равенства и (19) получим $f_1(t)=f_2(t)$ для $t\in[0,a(\lambda_0)]$. Равенство $y_1(x,\lambda)=y_2(x,\lambda)$ при $x\in[0,1]$, $\lambda\in[0,\lambda_0]$ следует из того, что функции $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ являются решением задачи Коши (13), (14) с одной и той же функцией $f(t)=f_1(t)=f_2(t)$, такой, что $f(t)\in C^1[0,a(\lambda_0)]$. Теорема 3.4.2 доказана.

Остановимся на вопросе существования решения обратной задачи (13)–(15). В общем случае его исследование достаточно сложно. Однако при специальном виде функции $b(\lambda)$ решение может быть получено в явном виде.

Предположим, что $a(\lambda)\in C^3[0,\lambda_0]$, $a''(\lambda)>0$ при $\lambda\in[0,\lambda_0]$, $a(0)=0$, $a'(0)>0$, а $b(\lambda)=a'(0)\lambda$. Тогда пара функций

$$\bar f(t)=\begin{cases} a''(a^{-1}(t)), & t\in[0,a(\lambda_0)],\\ a''(0), & t\leqslant 0,\\ a''(\lambda_0), & t\geqslant a(\lambda_0),\end{cases}\tag{22}$$

и $\bar y(x,\lambda)=a(\lambda x)$ является решением обратной задачи. Действительно, все свойства функций $f(t)$ и $y(x,\lambda)$, сформулированные в определении, следуют из свойств $a(\lambda)$. То, что функции $\bar y(x,\lambda)$ и $\bar f(\bar y(x,\lambda))$ удовлетворяют (13)–(15) при $x\in[0,1]$, $\lambda\in[0,\lambda_0]$, проверяется подстановкой.

З а м е ч а н и е. В определение решения обратной задачи (13)–(15) не включена априорная оценка на решение $y(x,\lambda)$, а функция $f(t)$ считается заданной и непрерывной на всей прямой. В связи с этим в формуле (22) для функции $\bar f(t)$ выбрано одно из возможных непрерывных продолжений функции $\bar f(t)$ с отрезка $[0,a(\lambda_0)]$ на всю прямую $t\in(-\infty,\infty)$.

Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении зависящего от решения коэффициента при старших производных [26]. Требуется определить функции $k(t)$ и $y(x,\lambda)$, удовлетворяющие уравнению

$$\left[k(y(x,\lambda))y'(x,\lambda)\right]'=\lambda^2y(x,\lambda),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\tag{23}$$

и условиям

$$y(0,\lambda)=0,\quad y'(0,\lambda)=b(\lambda),\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\tag{24}$$
$$y(1,\lambda)=a(\lambda),\quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0.\tag{25}$$

где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям (16) и (17) соответственно.

Определение. *Решением обратной задачи* (23)–(25) *назовем функции* $k(t)$ *и* $y(x,\lambda)$, *такие, что* $k(t) \in C^1[-\infty,\infty]$, $k(t) > 0$ *при* $t \in [0, a(\lambda_0)]$; *для любого* $\lambda \in [0,\lambda_0]$ *функции* $y(x,\lambda) \in C^2[0,1]$, $y(x,\lambda)$ *и* $k(y(x,\lambda))$ *удовлетворяют* (23)–(25) *при* $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$.

Докажем теорему единственности решения обратной задачи (23)–(25).

Теорема 3.4.3. *Пусть функции* $a(\lambda)$ *и* $b(\lambda)$ *удовлетворяют условиям* (16) *и* (17) *соответственно. Тогда, если* $k_1(t)$, $y_1(x,\lambda)$ *и* $k_2(t)$, $y_2(x,\lambda)$ — *решения обратной задачи* (23)–(25) *и* $k_1(0) = k_2(0)$, *то* $k_1(t) = k_2(t)$ *для* $t \in [0, a(\lambda_0)]$ *и* $y_1(x,\lambda) = y_2(x,\lambda)$ *при* $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$.

Доказательство. Пусть $k(t)$ и $y(x,\lambda)$ — решение обратной задачи (23)–(25). Получим интегральное уравнение для функции $k(t)$. Интегрируя (23), имеем

$$k(y(x,\lambda))y'(x,\lambda) = k(y(0,\lambda))y'(0,\lambda) + \lambda^2 \int_0^x y(\xi,\lambda)d\xi.$$

Из этого соотношения и положительности $y'(0,\lambda)$ при $\lambda \in (0,\lambda_0]$ следует, что при $\lambda \in (0,\lambda_0]$ $0 \leqslant y(x,\lambda) \leqslant a(\lambda)$, $y'(x,\lambda) > 0$ $x \in [0,1]$. Умножим уравнение (23) на $k(y(x,\lambda))y'(x,\lambda)$ и проинтегрируем от 0 до x, тогда

$$\int_0^x \left[k(y(\xi,\lambda))y'(\xi,\lambda)\right]' k(y(\xi,\lambda))y'(\xi,\lambda)d\xi = \lambda^2 \int_0^x y(\xi,\lambda)y'(\xi,\lambda)k(y(\xi,\lambda))d\xi.$$

Сделав в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменной $\theta = y(\xi,\lambda)$ и вычислив интеграл в левой части равенства, имеем

$$\left[k(y(x,\lambda))y'(x,\lambda)\right]^2 = \left[k(y(0,\lambda))y'(0,\lambda)\right]^2 + 2\lambda^2 \int_{y(0,\lambda)}^{y(x,\lambda)} k(\theta)\theta d\theta.$$

Учитывая положительность $k(y(x,\lambda))$, $y'(x,\lambda)$, а также, используя условия (24), получим

$$y'(x,\lambda)k(y(x,\lambda)) = \left[k^2(0)b^2(\lambda) + 2\lambda^2 \int_0^{y(x,\lambda)} k(\theta)\theta d\theta\right]^{1/2}.$$

Разделим это равенство на выражение, стоящее в правой части, и проинтегрируем от 0 до 1, тогда получим

$$\int_0^1 y'(x,\lambda)k(y(x,\lambda))\left[k^2(0)b^2(\lambda)+2\lambda^2\int_0^{y(x,\lambda)}k(\theta)\theta d\theta\right]^{-1/2}dx=1.$$

Сделав в интеграле замену переменной $t = y(x,\lambda)$ и использовав условия (17), (24), (25), получим нелинейное интегральное уравнение для функции $k(t)$

$$\int_0^{a(\lambda)} k(t)\left[k^2(0)g^2(\lambda)+2\int_0^t k(\theta)\theta d\theta\right]^{-1/2}dt=\lambda, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0.$$

Введя переменную $\mu = a(\lambda)$, запишем это уравнение в следующем виде:

$$\int_0^{\mu} k(t)\left[k^2(0)g^2(a^{-1}(\mu))+2\int_0^t k(\theta)\theta d\theta\right]^{-1/2}dt=a^{-1}(\mu), \quad 0\leqslant\mu\leqslant a(\lambda_0). \tag{26}$$

Пусть $k_i(t)$, $y_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$, — решения обратной задачи (23)-(25), такие, что $k_1(0) = k_2(0) = k_0$. Тогда $k_i(t)$, $i = 1,2$, являются решением интегрального уравнения (26) с $k(0) = k_0$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение, т.е. $k_1(t) = k_2(t)$ для $t \in [0, a(\lambda_0)]$. Из того, что $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют (26), следует, что

$$\int_0^{\mu}\left\{k_1(t)\left[k_0^2g^2(a^{-1}(\mu))+2\int_0^t k_1(\theta)\theta d\theta\right]^{-1/2}-\right.$$
$$\left.-k_2(t)\left[k_0^2g^2(a^{-1}(\mu))+2\int_0^t k_2(\theta)\theta d\theta\right]^{-1/2}\right\}dt=0, \quad 0\leqslant\mu\leqslant a(\lambda_0). \tag{27}$$

Введем функции

$$\varphi_i(t,\mu)=\left[k_0^2g^2(a^{-1}(\mu))+2\int_0^t k_i(\theta)\theta d\theta\right]^{1/2}, \quad i=1,2.$$

Тогда (27) можно записать следующим образом:

$$\int_0^{\mu}\frac{k_1(t)\varphi_2(t,\mu)-k_2(t)\varphi_1(t,\mu)}{\varphi_1(t,\mu)\varphi_2(t,\mu)}dt=0, \quad 0\leqslant\mu\leqslant a(\lambda_0). \tag{28}$$

Обозначим $\bar{k}(t) = k_1(t) - k_2(t)$ и преобразуем (28)

$$\int_0^\mu \left\{ \frac{\bar{k}(t)\varphi_2(t,\mu)}{\varphi_1(t,\mu)\varphi_2(t,\mu)} + \frac{k_2(t)[\varphi_2^2(t,\mu) - \varphi_1^2(t,\mu)]}{\varphi_1(t,\mu)\varphi_2(t,\mu)[\varphi_2(t,\mu) + \varphi_1(t,\mu)]} \right\} dt = 0.$$

Вводя обозначения

$$G_1(\mu,t) = (\varphi_1(t,\mu))^{-1},$$
$$G_2(\mu,t) = 2k_2(t)\left\{\varphi_1(t,\mu)\varphi_2(t,\mu)[\varphi_2(t,\mu) + \varphi_1(t,\mu)]\right\}^{-1}$$

и учитывая, что

$$\varphi_2^2(t,\mu) - \varphi_1^2(t,\mu) = -2\int_0^t \bar{k}(\theta)\theta d\theta,$$

получим интегральное уравнение для $\bar{k}(t)$

$$\int_0^\mu G_1(\mu,t)\bar{k}(t)dt - \int_0^\mu G_2(\mu,t)\int_0^t \bar{k}(\theta)\theta d\theta\, dt = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0).$$

Переставив порядок интегрирования во втором интеграле, получим для $\bar{k}(t)$ интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^\mu G(\mu,t)\bar{k}(t)dt = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0), \tag{29}$$

с ядром

$$G(\mu,t) = G_1(\mu,t) - t\int_t^\mu G_2(\mu,\theta)d\theta.$$

Из определения функций $\varphi_i(t,\mu)$ и $G_i(\mu,t)$, $i = 1,2$, следует, что $G(\mu,\mu) = G_1(\mu,\mu) > 0$ для $0 \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0)$ и $\frac{\partial G}{\partial \mu}(\mu,t)$ непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant \mu \leqslant a(\lambda_0)$. Продифференцировав (29) по μ и разделив на $G(\mu,\mu)$, получим для $\bar{k}(t)$ интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с правой частью, равной нулю. Следовательно, $\bar{k}(t) = 0$ для $t \in [0, a(\lambda_0)]$ и $k_1(t) = k_2(t)$ для $t \in [0, a(\lambda_0)]$.

Докажем, что $y_1(x,\lambda) = y_2(x,\lambda)$ при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Так как $y_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$, — решения (23), (24) с $k_1(t) = k_2(t) = k(t)$, то

$$\left(k(y_1(x,\lambda))y_1'(x,\lambda)\right)' - \left(k(y_2(x,\lambda))y_2'(x,\lambda)\right)' = \lambda^2\left(y_1(x,\lambda) - y_2(x,\lambda)\right).$$

Интегрируя это равенство и учитывая условия (24), имеем

$$k(y_1(x,\lambda))y_1'(x,\lambda) - k(y_2(x,\lambda))y_2'(x,\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^x (y_1(\xi,\lambda) - y_2(\xi,\lambda))d\xi.$$

Прибавляя и вычитая в левой части уравнения $k(y_1(x,\lambda))y_2'(x,\lambda)$ и обозначая $z(x,\lambda) = y_1(x,\lambda) - y_2(x,\lambda)$, получим уравнение для $z(x,\lambda)$

$$k(y_1(x,\lambda))z'(x,\lambda) + y_2'(x,\lambda)p(x,\lambda)z(x,\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^x z(\xi,\lambda)d\xi,$$

$$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,\lambda_0], \tag{30}$$

где $p(x,\lambda) = \int\limits_0^1 k'\big(y_2(x,\lambda) + \theta(y_1(x,\lambda) - y_2(x,\lambda))\big)d\theta$.

Интегрируя уравнение (30) с начальным условием $z(0,\lambda) = 0$, получим

$$z(x,\lambda) = \int\limits_0^x B(x,s,\lambda) \int\limits_0^s z(\xi,\lambda)d\xi ds, \tag{31}$$

где $B(x,s,\lambda) = \frac{\lambda^2}{k(y_1(s,\lambda))} \exp\Big(- \int\limits_s^x \frac{y_2'(\theta,\lambda)p(\theta,\lambda)}{k(y_1(\theta,\lambda))}d\theta\Big)$.

Переставив в (31) порядок интегрирования, получим однородное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции $z(x,\lambda)$

$$z(x,\lambda) = \int\limits_0^x B_1(x,\xi,\lambda)z(\xi,\lambda)d\xi, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,\lambda_0], \tag{32}$$

с ядром

$$B_1(x,\xi,\lambda) = \int\limits_\xi^x B(x,s,\lambda)ds.$$

Уравнение (32) имеет для всех $\lambda \in [0,\lambda_0]$ только нулевое решение $z(x,\lambda) = 0$ при $x \in [0,1]$, следовательно, $y_1(x,\lambda) = y_2(x,\lambda)$ для $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Теорема 3.4.3 доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании решения обратной задачи (23)-(25) в случае специального вида функций $b(\lambda)$. Предположим, что $a(\lambda) \in C^2[0,\lambda_0]$, $a(0) = 0$, $a'(\lambda) > 0$ при $\lambda \in [0,\lambda_0]$, а $b(\lambda) = a'(0)\lambda$. Пусть q — произвольная положительная постоянная.

Рассмотрим функцию

$$\bar{k}_q(t) = \frac{1}{a'(a^{-1}(t))}\Big[q + \int\limits_0^{a^{-1}(t)} a(\xi)d\xi\Big],$$

положительную и непрерывно дифференцируемую на отрезке $[0, a(\lambda_0)]$. Тогда функции $\bar{y}(x,\lambda) = a(\lambda x)$ и $\bar{k}_q(\bar{y}(x,\lambda))$ удовлетворяют (23)–(25) при $x \in [0,1]$, $\lambda \in [0,\lambda_0]$. Действительно,

$$(\bar{k}_q(y(x,\lambda))y'(x,\lambda))' = (\bar{k}_q(a(\lambda x))\lambda a'(\lambda x))' =$$

$$= \left(\frac{1}{a'(\lambda x)}\left[q + \int\limits_0^{\lambda x} a(\xi)d\xi\right]\lambda a'(\lambda x)\right)' = \lambda^2 a(\lambda x) = \lambda^2 \bar{y}(x,\lambda).$$

Следовательно, $\bar{y}(x,\lambda)$ и $\bar{k}_q(\bar{y}(x,\lambda))$ удовлетворяют уравнению (23). Выполнение условий (24), (25) очевидно. Функцию $\bar{k}_q(t)$ можно продолжить на всю прямую так, чтобы полученная в результате $\bar{k}_q(t) \in C^1(-\infty,\infty)$. Тогда пара $\bar{k}_q(t)$ и $\bar{y}(x,\lambda)$ будет являться решением обратной задачи (23)–(25) в смысле данного определения. Отметим, что наличие произвольной постоянной q в определении $\bar{k}_q(t)$ показывает необходимость задания значения $k(0)$ для однозначного определения функции $k(t)$ на отрезке $[0, a(\lambda_0)]$.

Глава IV

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе рассматриваются обратные задачи для линейных уравнений в частных производных, состоящие в определении либо начального, либо граничного условия, либо правой части уравнения по некоторой дополнительной информации о решении уравнения. Такого типа задачи, как правило, являются некорректными и сводятся к линейным операторным уравнениям 1-го рода. С целью упрощения изложения обратные задачи рассматриваются для уравнений с постоянными коэффициентами. В более общем виде исследования подобных задач для уравнений в частных производных проводились целым рядом авторов [см., например, 43, 49, 51, 67, 88, 92, 96, 101, 102].

§1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этом параграфе будут рассмотрены обратные задачи для уравнения теплопроводности, представляющие собой задачи определения либо начального условия, либо граничного условия, либо функции, характеризующей действие источников тепла по дополнительной информации о решении краевой задачи для уравнения теплопроводности. Обратные задачи такого типа возникают при исследовании теплофизических и ряда других процессов.

Задача с обратным направлением времени. Одной из наиболее известных обратных задач для уравнения теплопроводности является задача с обратным направлением времени. Рассмотрим ее постановку в случае первой краевой задачи.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями состоит в определении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t_0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

начальному условию

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Эту задачу можно интерпретировать следующим образом. Известно распределение температуры в тонком стержне длиной l в начальный момент времени $t = t_0$ $u(x, t_0) = \varphi(x)$. Требуется найти распределение температуры в стержне в последующие моменты времени $t_0 < t \leqslant T$.

Задача с обратным направлением времени может быть сформулирована так. Известно распределение температуры в стержне в момент времени $t = T$. Требуется определить распределение температуры в предыдущие моменты времени $t_0 \leqslant t < T$. Для определенности поставим задачу более конкретно. *Известно распределение температуры $u(x,t)$ в момент времени $t = T$*

$$u(x, T) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

требуется определить распределение $\varphi(x) = u(x, t_0)$ в начальный момент времени $t = t_0$.

Приступим к исследованию поставленной обратной задачи. Как известно, при определенных предположениях относительно функции $\varphi(x)$ решение задачи (1)–(3) может быть получено с помощью метода разделения переменных и имеет следующий вид [85]:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(t-t_0)\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Положив $t = T$ и учитывая (4), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=g(x),$$
$$0\leqslant x\leqslant l. \tag{5}$$

Таким образом, обратная задача свелась к уравнению (5) относительно неизвестной функции $\varphi(x)$.

Покажем, что уравнение (5) имеет единственное решение в пространстве $L_2[0,l]$. Так как это уравнение является линейным, то для доказательства единственности его решения достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $g(x) = 0$.

Итак, пусть в (5) $g(x) = 0$ при $x \in [0, l]$. Так как система функций $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является ортогональной в пространстве $L_2[0, l]$, а $\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} \neq 0$ для $n = 1, 2, \ldots$, то, умножив (5) на $\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$ и проинтегрировав от 0 до l, получим, что

$$\int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) d\xi = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Так как система функций $\left\{\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\right\}$, $k = 1, 2, \ldots$, полна в $L_2[0, l]$, то из (6) следует, что $\varphi(x) = 0$ и уравнение (5) имеет единственное решение.

Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения (5). Обозначим через (h, p) скалярное произведение функций $h(x)$ и $p(x)$ в пространстве $L_2[0, l]$. Система функций $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, является полной ортонормированной системой в $L_2[0, l]$. Пусть уравнение (5) с правой частью $g(x) \in L_2[0, l]$ имеет решение $\varphi(x) \in L_2[0, l]$. Обозначим через φ_k и g_k коэффициенты Фурье (φ, ψ_k) и (g, ψ_k) функций $\varphi(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда из (5) получим, что при $k = 1, 2, \ldots$,

$$(\varphi, \psi_k) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right)d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l g(\xi)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T - t_0)\right\} =$$

$$= (g, \psi_k)\exp\left\{\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T - t_0)\right\}.$$

Записывая для функции $\varphi(x)$ равенство Парсеваля, имеем

$$\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{\infty}(g, \psi_k)^2 \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T - t_0)\right\}. \tag{7}$$

Таким образом, для существования решения уравнения (5) в пространстве $L_2[0, l]$ необходимо, чтобы функция $g(x) \in L_2[0, l]$ была такова, что ряд, стоящий в правой части равенства (7), сходился. Так как члены этого ряда содержат быстро возрастающий множитель $\exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T - t_0)\right\}$, то требование сходимости ряда налагает сильное условие на характер убывания коэффициентов Фурье (g, ψ_k) функции $g(x)$. Очевидно, что эти условия выполнены не для всех $g(x) \in L_2[0, l]$. В качестве примера рассмотрим бесконечно дифференцируемую на отрезке $[0, l]$ функцию

$$\bar{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} exp(-k)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right).$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (7), для этой функции расходится, так как

$$(\tilde{g}, \psi_k)^2 \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\} =$$
$$= \exp\left\{2\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0) - 2k\right\} \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Следовательно, уравнение (5) для $g(x) = \tilde{g}(x)$ решения не имеет.

Задача решения уравнения (5) является неустойчивой при $g(x) \in L_2[0,l]$ и $\varphi(x) \in L_2[0,l]$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять последовательность функций $\varphi_k(x) = k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$, являющихся решениями уравнения (5) при

$$g_k(x) = k\exp\left\{-\left[\frac{\pi k}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right).$$

Тогда $\|g_k\|_{L_2[0,l]} \to 0$, а $\|\varphi_k\|_{L_2[0,l]} \to \infty$ при $k \to \infty$, что и доказывает неустойчивость задачи.

Рассматриваемая обратная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. Действительно, поменяв местами порядок суммирования и интегрирования в левой части уравнения (5), получим уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$K\varphi \equiv \int_0^l K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

с ядром

$$K(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(T-t_0)\right\}.$$

Так как каждый член этого ряда содержит быстро убывающий при $n \to \infty$ множитель, то $K(x,\xi)$ является непрерывной в квадрате $0 \leqslant x,\xi \leqslant l$ функцией. Следовательно, интегральный оператор K, определяемый ядром $K(x,\xi)$, является вполне непрерывным, если его рассматривать действующим из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$. А значит, задача решения уравнения (8) в этой паре пространств некорректна.

Так как ядро $K(x,\xi)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка непрерывные в квадрате $0 \leqslant x,\xi \leqslant l$, то интегральный оператор K можно рассматривать действующим из $C[0,l]$ в $C^p[0,l]$, где p — произвольное фиксированное натуральное число. В этом случае задача решения уравнения (8) также будет неустойчивой. Для доказательства неустойчивости достаточно взять последовательность

$$\tilde{\varphi}_k(x) = k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

тогда

$$\|\tilde{\varphi}_k\|_{C[0,l]} \to \infty, \text{ а } \|K\tilde{\varphi}_k\|_{C^*[0,l]} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

что и доказывает некорректность задачи решения уравнения (8) в рассматриваемой паре пространств.

Получим оценку устойчивости решения задачи теплопроводности с обратным течением времени в случае, когда имеется дополнительная информация о решении задачи.

Будем для упрощения записи считать далее, что $a^2 = 1$. Предположим, что функция $u(x,t)$ непрерывна, имеет непрерывные производные $u_t(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и удовлетворяет уравнению (1) при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant T$, где ε — произвольное фиксированное положительное число. Предположим также, что $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (2) при $t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant T$ и не равна тождественно нулю.

Рассмотрим при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$ функцию

$$g(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx.$$

Дифференцируя, имеем

$$g'(t) = 2\int_0^l u(x,t)u_t(x,t)\,dx,$$

$$g''(t) = 2\int_0^l u(x,t)u_{tt}(x,t)\,dx + 2\int_0^l (u_t(x,t))^2\,dx.$$

Так как

$$(u_t(x,t))_t = (u_{xx}(x,t))_t = (u_t(x,t))_{xx} = u_{xxxx}(x,t),$$

то

$$g''(t) = 2\int_0^l u(x,t)u_{xxxx}(x,t)\,dx + 2\int_0^l (u_t(x,t))^2\,dx.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям и учитывая краевые условия (2), получим

$$\int_0^l u(x,t)u_{xxxx}(x,t)dx = u(x,t)u_{xxx}(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l u_x(x,t)u_{xxx}(x,t)dx =$$

$$= -u_x(x,t)u_{xx}(x,t)\Big|_0^l + \int_0^l (u_{xx}(x,t))^2 dx = \int_0^l (u_t(x,t))^2 dx.$$

Следовательно,

$$g''(t) = 4\int_0^l (u_t(x,t))^2 dx.$$

Рассмотрим функцию $h(t) = \ln(g(t))$. Покажем, что $h''(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$. Действительно,

$$h''(t) = \frac{d}{dt}\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{g^2(t)}\left[g''(t)g(t) - (g'(t))^2\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2(t)}\left[4\int_0^l (u_t(x,t))^2 dx \int_0^l (u(x,t))^2 dx - 4\left(\int_0^l u_t(x,t)u(x,t)dx\right)^2\right].$$

Следовательно, используя неравенство Коши–Буняковского, получим, что $h''(t) \geqslant 0$ для $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$. Из неотрицательности $h''(t)$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon, T]$ следует, что при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$

$$h(t) \leqslant h(t_0 - \varepsilon)\frac{T - t}{T - (t_0 - \varepsilon)} + h(T)\frac{t - (t_0 - \varepsilon)}{T - (t_0 - \varepsilon)}.$$

Из этого неравенства имеем

$$\ln(g(t)) \leqslant \frac{T - t}{T - (t_0 - \varepsilon)}\ln(g(t_0 - \varepsilon)) + \frac{t - (t_0 - \varepsilon)}{T - (t_0 - \varepsilon)}\ln(g(T)),$$

следовательно,

$$g(t) \leqslant \left[g(t_0 - \varepsilon)\right]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\left[g(T)\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}} \tag{9}$$

при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$.

Рассмотрим функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие тем же условиям, что $u(x,t)$, и такие, что

$$\left[\int_0^l (u_i(x, t_0 - \varepsilon))^2 dx\right]^{1/2} \leqslant C, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

где C — положительная постоянная. Обозначив $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, из неравенства (9) с учетом определения функции $g(t)$ получим

$$\int_0^l (u_1(x,t) - u_2(x,t))^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^l (u_1(x,t_0-\varepsilon) - u_2(x,t_0-\varepsilon))^2 dx\right]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \times$$

$$\times \left[\int_0^l (u_1(x,T) - u_2(x,T))^2 dx\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}.$$

Положив $t = t_0$, используя обозначение нормы в пространстве $L_2[0,l]$ и неравенство (10), имеем

$$\|u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0)\|_{L_2[0,l]} \leqslant$$

$$\leqslant (2C)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \|u_1(x,T) - u_2(x,T)\|_{L_2[0,l]}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}. \tag{11}$$

Это неравенство представляет собой оценку условной устойчивости решения задачи теплопроводности с обратным направлением времени. Она получена в предположении, что функции $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, удовлетворяют неравенству (10), т.е. их нормы в пространстве $L_2[0,l]$ при $t = t_0 - \varepsilon$ ограничены заданной постоянной. Эта оценка может показаться несколько странной, поскольку она получена для решения некорректной задачи только в предположении (10) об ограниченности решения, которое не обеспечивает компактность множества в $L_2[0,l]$. Рассмотрим этот вопрос более детально.

В оценке (11) разность решений в момент времени t_0 оценивается через разность решений в момент времени T. Ограниченность же этих решений — неравенство (10) — предполагается не при $t = t_0$, а при $t = t_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $U_{t_0-\varepsilon}$ множество

$$U_{t_0-\varepsilon} = \left\{u(x,t_0-\varepsilon),\ \|u(x,t_0-\varepsilon)\|_{L_2[0,l]} \leqslant C\right\}.$$

Переход от решения $u(x,t_0-\varepsilon)$ при $t = t_0-\varepsilon$ к решению $u(x,t_0)$ при $t = t_0$ можно рассматривать как результат действия интегрального оператора K_1

$$\int_0^l K_1(x,\xi)u(\xi,t_0-\varepsilon)d\xi = u(x,t_0)$$

с ядром

$$K_1(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) \exp\left\{ -\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 \varepsilon \right\}.$$

Так как ядро $K_1(x,\xi)$ непрерывно при $0 \leqslant x,\xi \leqslant l$, то оператор K_1, рассматриваемый действующим из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$, является вполне непрерывным. Следовательно, ограниченное множество $U_{t_0-\varepsilon}$ в результате действия оператора K_1 перейдет в множество $U_{t_0} = K_1 U_{t_0-\varepsilon}$, компактное в пространстве $L_2[0,l]$. Таким образом, неравенство (11) представляет собой оценку устойчивости задачи теплопроводности с обратным направлением времени на компактном в $L_2[0,l]$ множестве U_{t_0}.

Приведенная оценка устойчивости задачи теплопроводности с обратным направлением времени является частным случаем оценки решения задачи Коши для эволюционного операторного уравнения первого порядка [40, 45].

Задача определения начального распределения температуры по измерению температуры в точке. Рассмотрим постановку этой обратной задачи на примере второй краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{12}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{14}$$

Обратная задача ставится так. При $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 > 0$ задана функция $g(t) = u(x_0, t)$, где x_0 — некоторая фиксированная точка отрезка $[0,l]$, а $u(x,t)$ — решение задачи (12)–(14). Требуется определить $\varphi(x)$ на отрезке $[0,l]$. Физическая интерпретация этой обратной задачи такова. В течение некоторого интервала времени в фиксированной точке стержня измеряется температура, и по этим измерениям требуется определить начальное распределение температуры.

Решение задачи (12)–(14) может быть получено методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi \, \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ -\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t \right\} \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Положив в этом равенстве $x = x_0$, получим уравнение для функции $\varphi(x)$

$$\frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi *$$

$$* \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = g(t), \qquad (15)$$

где $t \in [t_0, t_1]$.

Исследуем вопрос о единственности решения уравнения (15) в случае, когда точка измерения x_0 находится на конце отрезка.

Теорема 4.1.1. *Если $x_0 = 0$, то решение уравнения* (15) *единственно в пространстве $L_2[0,l]$.*

Доказательство. Из линейности уравнения (15) следует, что для доказательства единственности решения в $L_2[0,l]$ достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $g(t) = 0$. Положив в (15) $g(t) = 0$ и $x_0 = 0$, получим, что при $t \in [t_0, t_1]$

$$\int\limits_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int\limits_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\} = 0. \qquad (16)$$

Рассмотрим в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$, где постоянная $\alpha \in (0, t_0)$, функцию комплексной переменной

$$\Phi(z) = \int\limits_0^l \varphi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int\limits_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}. \qquad (17)$$

Так как при $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$

$$\left|\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 z\right\}\right| \leqslant \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 \alpha\right\},$$

то в этой полуплоскости ряд, стоящий в правой части (17), сходится равномерно. Учитывая то, что каждый член этого ряда является аналитической функцией при $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$, и применяя теорему Вейерштрасса [42], получаем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической при $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$. Так как из (16) следует, что $\Phi(z) = 0$ на отрезке действительной оси $[t_0, t]$, лежащем в области аналитичности $\Phi(z)$, то из теоремы единственности для аналитических функций следует, что $\Phi(z) = 0$ для всех z, таких, что $\operatorname{Re} z \geqslant \alpha$.

Таким образом, равенство (16) выполнено для всех действительных $t \geqslant t_0$. Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to +\infty$, получим последовательно, что

$$\int_0^l \varphi(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = 0, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{18}$$

Так как система функций $\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, $n = 0,1,2,\dots$, является полной в пространстве $L_2[0,l]$, то из равенств (18) следует, что $\varphi(x) = 0$. Теорема 4.1.1 доказана.

Покажем, что при измерении температуры внутри стержня ($x_0 \in (0,l)$), единственность решения обратной задачи зависит от выбора точки наблюдения x_0. Действительно, пусть $x_0 = l/2$. Возьмем $\varphi(x) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$. Решение задачи (12)–(14) имеет вид

$$u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\exp\left\{-\left[\frac{\pi}{l}\right]^2 a^2 t\right\}.$$

Следовательно, $g(t) = u(x_0,t) = u(l/2,t) = 0$ при $t \geqslant 0$ и решение обратной задачи неединственно. Пусть теперь $x_0 = l/\pi$. В этом случае

$$\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = \cos(n) \neq 0, \quad n = 1,2,\dots.$$

Тогда, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.1.1, получим, что решение уравнения (15) единственно.

Рассматриваемая обратная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. Действительно, поменяв местами порядок интегрирования и суммирования в левой части уравнения (15), получим уравнение Фредгольма 1-го рода

$$G\varphi \equiv \int_0^l G(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi = g(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{19}$$

с ядром

$$G(t,\xi) = \frac{1}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right),$$

непрерывным в прямоугольнике $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant \xi \leqslant l$. Следовательно, интегральный оператор G, рассматриваемый действующим из $L_2[0,l]$ в $L_2[t_0,t_1]$, вполне непрерывен. Таким образом, задача решения уравнения (19) в этой паре пространств некорректна.

Задача определения краевого условия. Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении зависящей от времени функции, входящей в краевое условие, по дополнительной информации о решении краевой задачи для уравнения теплопроводности, представляющей собой функцию, зависящую от времени. Пусть функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t \leqslant T, \tag{20}$$
$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{21}$$
$$u_x(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{23}$$

Предположим, что функция $\nu(t)$ задана, а функция $\mu(t)$ неизвестна, и требуется определить $\mu(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (20)–(23)

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{24}$$

где $g(t)$ — заданная функция.

Рассмотрим вопрос о единственности поставленной обратной задачи. Единственность решения этой задачи исследовалась в более общей постановке целым рядом авторов. Приведем один из результатов, полученных в этом направлении [51], сформулировав его для случая уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами (20). Обозначим

$$Q_{lT} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Теорема 4.1.2. *Пусть функция $\bar{u}(x,t) \in C^{2,1}(Q_{lT})$ и удовлетворяет в Q_{lT} уравнению (20). Тогда если $\bar{u}(l,t) = \bar{u}_x(l,t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, то $\bar{u}(x,t) = 0$ в Q_{lT}.*

Из этой теоремы следует единственность задачи определения функции $\mu(t)$ из (20)–(24) при заданных функциях $\nu(t)$ и $g(t)$. Действительно, пусть $u_1(x,t)$, $u_2(x,t) \in C^{2,1}(Q_{lT})$ удовлетворяют в Q_{lT} уравнению (20) и таковы, что

$$u_1(0,t) = \mu_1(t), \quad u_2(0,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = g(t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(l,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Рассмотрим функцию $\bar{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 4.1.2. Следовательно, $\bar{u}(x,t) = 0$ в Q_{lT}, а значит, $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ при $t \in [0,T]$.

Отметим, что в теореме 4.1.2 начальное условие для функции $\bar{u}(x,t)$ не задается.

Рассмотрим другую постановку обратной задачи для краевой задачи (20)–(23). Предположим, что функция $\nu(t)$ задана, а $\mu(t)$

неизвестна и требуется определить $\mu(t)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (20)–(23) следующего вида:

$$u(x_0,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{25}$$

где $g(t)$ — заданная функция, а $x_0 \in (0,l)$. Исследование единственности решения этой обратной задачи также можно провести, используя теорему 4.1.2.

Теорема 4.1.3. *Если функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t) \in C^{2,1}(Q_{lT})$, удовлетворяют в Q_{lT} уравнению (20), условиям (22), (23), (25) и таковы, что $u_i(0,t) = \mu_i(t)$, $i = 1,2$, при $t \in [0,T]$, то $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ при $t \in [0,T]$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{u}(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_t = a^2\bar{u}_{xx}, && x_0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T,\\
&\bar{u}(x_0,t) = 0, && 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&\bar{u}_x(l,t) = 0, && 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&\bar{u}(x,0) = 0, && x_0 \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned}$$

Покажем, что $\bar{u}(x,t) = 0$ для $x \in [x_0,l]$, $t \in [0,T]$. Умножив уравнение на $\bar{u}(x,t)$ и проинтегрировав, получим

$$\int_{x_0}^{l}\int_{0}^{t} \bar{u}_t(\xi,\tau)\bar{u}(\xi,\tau)d\tau\, d\xi = a^2 \int_{0}^{t}\int_{x_0}^{l} \bar{u}_{xx}(\xi,\tau)\bar{u}(\xi,\tau)d\xi\, d\tau.$$

Вычисляя интегралы и используя краевые и начальные условия, имеем для $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{l}(\bar{u}(\xi,t))^2 d\xi + a^2 \int_{0}^{t}\int_{x_0}^{l}(\bar{u}_x(\xi,\tau))^2 d\xi\, d\tau = 0.$$

Следовательно, $\bar{u}(x,t) = 0$ при $x \in [x_0,l]$, $t \in [0,T]$, тогда $\bar{u}_x(x_0,t) = 0$ для $t \in [0,T]$. Таким образом, функция $\bar{u}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (20) при $x \in [0,x_0]$, $t \in [0,T]$ и $\bar{u}(x_0,t) = \bar{u}_x(x_0,t) = 0$ для $t \in [0,T]$. Применяя теорему 4.1.2 для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, получим, что $u_1(0,t) = u_2(0,t)$ при $t \in [0,T]$, т.е. $\mu_1(t) = \mu_2(t)$. Теорема 4.1.3 доказана.

Приведем пример сведения задачи определения граничного условия к задаче решения интегрального уравнения 1-го рода. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, 0 < t \leqslant T, \tag{26}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{27}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{28}$$

Требуется определить функцию $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (26)–(28)

$$u(x_0,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x_0 > 0. \tag{29}$$

Решение задачи (26)–(28) имеет вид [85]

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right\}\mu(\tau)d\tau.$$

Следовательно, в данном случае обратная задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода

$$\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с ядром

$$K(t,\tau) = \frac{x_0}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

5.10

Задачи определения источника тепла. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(t,x).$$

Функция $F(t,x)$ определяет плотность тепловых источников. Один из классов обратных задач для уравнения теплопроводности образуют задачи, состоящие в определении плотности тепловых источников по дополнительной информации о решении уравнения. Будем предполагать, что функция $F(x,t) = f(x)g(t)$. Рассмотрим обратные задачи, состоящие в определении одной из функций, входящей в это произведение, в предположении, что другая функция известна. Сформулируем соответствующие обратные задачи в случае второй краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{30}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{31}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{32}$$

Решение этой задачи при определенных предположениях относительно $f(x)$ и $g(t)$ может быть получено методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int\limits_0^l f(\xi)d\xi \int\limits_0^t g(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \,*$$

$$* \int\limits_0^t g(\tau)\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(t-\tau)\right\}d\tau \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{33}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу. Функция $f(x)$ известна, и задана функция

$$h(t) = u(x_0, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{34}$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка отрезка $[0, l]$. Требуется определить функцию $g(t)$ при $t \in [0, T]$.

Исследуем эту обратную задачу. Положив в (33) $x = x_0$, имеем

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi \int_0^t g(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi *$$

$$* \int_0^t g(\tau)\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(t-\tau)\right\}d\tau \cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = h(t),$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предположим, что $f(x) \in C^2[0, l]$ и $g(t) \in C[0, T]$. Поменяв местами порядок интегрирования и суммирования, получим для функции $g(t)$ интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t K(t, \tau)g(\tau)d\tau = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{35}$$

с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi + \tag{36}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi \exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2(t-\tau)\right\}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right).$$

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения уравнения (35) в пространстве $C[0, T]$.

Т е о р е м а 4.1.4. *Предположим, что $f(x) \in C^4[0, l]$ и $f'(0) = f'(l) = 0$. Тогда, если $f(x_0) \neq 0$ и $h(t) \in C^1[0, T]$, $h(0) = 0$, то уравнение (35) имеет единственное решение $g(t) \in C[0, T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из условий на функцию $f(x)$ следует, что при $n = 1, 2, \ldots$

$$\left|\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\right| \leqslant \frac{C}{n^4}, \quad C = \text{const}.$$

Учитывая эти неравенства, получим, что ядро уравнения (35) $K(t,\tau)$ непрерывно и имеет непрерывную производную $K_t(t,\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Дифференцируя уравнение (35) по t, имеем

$$K(t,t)g(t) + \int_0^t K_t(t,\tau)g(\tau)d\tau = h'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (37)$$

Положив в (36) $t = \tau$, получим

$$K(t,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right).$$

Правая часть этого равенства представляет собой разложение в ряд функции $f(x)$, записанное при $x = x_0$. Следовательно, $K(t,t) = f(x_0) \neq 0$. Таким образом, уравнение (37) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывными ядром и правой частью, а значит, оно имеет единственное решение $g(t) \in C[0,T]$. Интегрируя (37), получим, что $g(t)$ является решением (35). Теорема доказана.

Приведем пример функции $f(x)$ и точки x_0, для которых уравнение (35) и соответствующая ему обратная задача имеет не единственное решение. Пусть $x_0 = l/2$, а $f(x) = -f(l-x)$ для $x \in [0,l]$. Для всех четных n

$$\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = \int_0^l f(l-\theta)\cos\left(\frac{\pi n}{l}(l-\theta)\right)d\theta =$$

$$= -\int_0^l f(\theta)\cos(\pi n)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\theta\right)d\theta = -\int_0^l f(\theta)\cos(\frac{\pi n}{l}\theta)d\theta.$$

Следовательно, для четных n

$$\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = 0.$$

Учитывая эти равенства, а также то, что для нечетных n $\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$, и определение (36) функции $K(t,\tau)$, получим, что $K(t,\tau) = 0$ для $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, в этом случае решением уравнения (35) с правой частью $h(t) = 0$ будет любая непрерывная функция $g(t)$.

Рассмотрим теперь задачу определения функции $f(x)$ в предположении, что $g(t)$ известна и равна 1, т.е. плотность источников не меняется во времени. Итак, требуется определить функцию $f(x)$, если $g(t) = 1$ и известна дополнительная информация (34) о решении краевой задачи (30)–(32).

Положив в (33) $x = x_0$, $g(t) = 1$ и использовав (34), получим уравнение для определения $f(x)$

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi * \tag{38}$$

$$*\frac{2l}{(\pi n a)^2}\left(1-\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Это уравнение аналогично уравнению (15). Применяя метод доказательства единственности решения уравнения (15) при $x_0 = 0$, который был использован в теореме 4.1.1, можно показать, что при $x_0 = 0$ решение уравнения (38) единственно в классе $L_2[0, l]$. В том случае, когда измерения проводятся внутри стержня, единственность решения уравнения (38) зависит от выбора точки x_0.

Поменяв в левой части (38) местами порядок интегрирования и суммирования, получим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для функции $f(x)$:

$$\int_0^l B(t,\xi)f(\xi)d\xi = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с ядром

$$B(t,\xi)=\frac{t}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{(\pi n a)^2}\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)\left(1-\exp\left\{-\left[\frac{\pi n}{l}\right]^2 a^2 t\right\}\right).$$

§2. МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

Рассмотрим один из методов решения обратных задач для уравнения в частных производных — метод квазиобращения [52]. Он основан на замене исходного уравнения в частных производных на другое, содержащее малый параметр. Изложим его для решения задачи для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{3}$$

Для упрощения записи ряда дальнейших формул предполагается, что коэффициент температуропроводности $a^2 = 1$, а длина отрезка $l = \pi$. Задача с обратным направлением времени состоит в определении начального распределения температуры $\varphi(x)$ по распределению температуры в момент времени T

$$u(x,T) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{4}$$

Применяя метод разделения переменных для решения задачи (1)–(3), получим формулу для вычисления $u(x,T) = g(x)$ при заданной $\varphi(x)$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{-n^2 T\}\sin(nx). \tag{5}$$

Обратная задача, состоящая в определении $\varphi(x)$ по заданной функции $g(x)$, представляет собой задачу решения уравнения (1) с краевыми условиями (2) и условием (4). Сделав в (1), (2), (4) замену переменной $\tau = T - t$, получим

$$u_\tau = -u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{6}$$
$$u(0,\tau) = u(\pi,\tau) = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{7}$$
$$u(x,0) = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{8}$$

Применяя для решения этой задачи метод разделения переменных, имеем

$$u(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{n^2 \tau\}\sin(nx).$$

Положив $\tau = T$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{n^2 T\}\sin(nx). \tag{9}$$

Эта формула дает решение задачи теплопроводности с обратным направлением времени. Однако ее нельзя применять на практике, поскольку решение, определяемое формулой (9), существует не для всех функций $g(x)$ и неустойчиво по отношению к малым изменениям $g(x)$. Это следует из того, что общий член ряда в формуле (9) содержит быстро возрастающий при $n \to \infty$ сомножитель $\exp\{n^2 T\}$.

Запишем формулу (5) следующим образом: $g = K\varphi$, где оператор K определяется выражением, стоящим в правой части (5).

Формулу (9) можно записать так: $\varphi = K^{-1}g$, где обратный к оператору K оператор K^{-1} определяется выражением, стоящим в правой части (9). Основная проблема,возникающая при решении обратной задачи, состоит в том, что оператор K^{-1} определен не для всех функций $g(x)$ и не является непрерывным.

Метод квазиобращения основан на переходе от задачи (6)–(8), определяющей оператор K^{-1}, к задаче для уравнения более высокого порядка, содержащего малый параметр.

Рассмотрим краевую задачу

$$v_\tau = -v_{xx} - \alpha v_{xxxx}, \qquad 0 < x < \pi, \ 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{10}$$

$$v(0,\tau) = v(\pi,\tau) = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{11}$$

$$v_{xx}(0,\tau) = v_{xx}(\pi,\tau) = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \tag{12}$$

$$v(x,0) = g(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{13}$$

где α — положительный параметр. Решение задачи (10)–(13) может быть получено с помощью метода разделения переменных и имеет вид

$$v(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{n^2\tau(1-\alpha n^2)\}\sin(nx). \tag{14}$$

Обозначим через $\varphi_\alpha(x) = v(x,T)$. Покажем, что при определенных предположениях функцию $\varphi_\alpha(x)$ можно рассматривать в качестве приближенного решения задачи с обратным направлением времени. Эта задача представляет собой задачу решения уравнения

$$K\varphi = g. \tag{15}$$

Будем считать, что оператор K действует из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$. Рассмотрим задачу решения уравнения (15) в случае приближенно заданной правой части $g(x)$.

Предположим, что для функции $\bar{g}(x) \in L_2[0,\pi]$ существует решение уравнения (15) $\bar{\varphi}(x) \in L_2[0,\pi]$. Однако $\bar{g}(x)$ неизвестна, а вместо нее заданы функция $g_\delta(x) \in L_2[0,\pi]$ и величина погрешности δ, такие, что

$$\|g_\delta - \bar{g}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \delta. \tag{16}$$

В этом случае использовать в качестве приближенного решения задачи функцию $\varphi_\delta(x) = K^{-1}g_\delta(x)$ (т.е. применять формулу (9)) невозможно, поскольку K^{-1}, во-первых, определен не для всех $g_\delta(x) \in L_2[0,\pi]$, а, во-вторых, не является непрерывным.

Рассмотрим семейство линейных операторов R_α, определяемых формулой (14), а именно $R_\alpha g = v(x,T)$. Из формулы (14) следует, что

$$R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{n^2T(1-\alpha n^2)\}\sin(nx). \tag{17}$$

Для любого $\alpha > 0$ оператор R_α определен на всем пространстве $L_2[0,\pi]$ и непрерывен, если его рассматривать действующим из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$. Покажем, что функцию $\varphi_\alpha(x) = R_\alpha g_\delta$ можно рассматривать в качестве приближенного решения уравнения (15).

Теорема 4.2.1. *Пусть функция $\alpha(\delta)$ такова, что $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \to 0$ и $\exp\left\{\frac{T}{4\alpha(\delta)}\right\}\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда $\|\varphi_{\alpha(\delta)} - \bar{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]} \to 0$ при $\delta \to 0$, где $\varphi_{\alpha(\delta)} = R_{\alpha(\delta)} g_\delta$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $R_\alpha g_\delta$, где $\alpha > 0$, и оценим $\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]}$. Из неравенства треугольника следует, что

$$\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \|R_\alpha g_\delta - R_\alpha \bar{g}\|_{L_2[0,\pi]} + \|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]}. \qquad (18)$$

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства. Учитывая линейность оператора R_α и неравенство (16), получим, что

$$\|R_\alpha g_\delta - R_\alpha \bar{g}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \|R_\alpha\| \, \|g_\delta - \bar{g}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \|R_\alpha\| \delta, \qquad (19)$$

где $\|R_\alpha\|$ — норма оператора R_α, рассматриваемого действующим из $L_2[0,\pi]$ в $L_2[0,\pi]$.

Оценим $\|R_\alpha\|$. Так как система функций $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$, является полной ортонормированной системой в $L_2[0,\pi]$, то, используя равенство Парсеваля и формулу (17), получим, что для любой функции $g(x) \in L_2[0,\pi]$

$$\|R_\alpha g\|^2_{L_2[0,\pi]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi g(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)^2 \exp\{2n^2T(1-\alpha n^2)\}.$$

Так как для любого натурального n справедливо неравенство $n^2T(1-\alpha n^2) \leqslant \frac{T}{4\alpha}$, то

$$\|R_\alpha g\|^2_{L_2[0,\pi]} \leqslant \exp\left\{\frac{T}{2\alpha}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi g(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)^2$$

Из равенства Парсеваля следует, что ряд, стоящий в правой части этого неравенства, равен $\|g\|^2_{L_2[0,\pi]}$. Следовательно,

$$\|R_\alpha g\|^2_{L_2[0,\pi]} \leqslant \exp\left\{\frac{T}{2\alpha}\right\}\|g\|^2_{L_2[0,\pi]},$$

а значит,

$$\|R_\alpha\| \leqslant \exp\left\{\frac{T}{4\alpha}\right\}.$$

Учитывая неравенство (19), получим, что

$$\|R_\alpha g_\delta - R_\alpha \bar{g}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \exp\left\{\frac{T}{4\alpha}\right\}\delta. \tag{20}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (18). Так как $\bar{g} = K\bar{\varphi}$, то

$$\bar{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{-n^2T\}\sin(nx).$$

Следовательно, для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\pi \bar{g}(\xi)\sin(n\xi)d\xi = \int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{-n^2T\}.$$

Используя эти формулы, получим, что

$$R_\alpha \bar{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi \exp\{-\alpha n^4 T\}\sin(nx),$$

$$R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi[\exp\{-\alpha n^4 T\} - 1]\sin(nx).$$

Учитывая это представление и равенство Парсеваля, получим, что

$$\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2_{L_2[0,\pi]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)^2 [1 - \exp\{-\alpha n^4 T\}]^2.$$

Покажем, что функция $p(\alpha) = \|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2_{L_2[0,\pi]} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Действительно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)^2 = \|\bar{\varphi}\|^2_{L_2[0,\pi]}$$

сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, такое, что

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \bar{\varphi}(\xi)\sin(n\xi)d\xi\right)^2 [1 - \exp\{-\alpha n^4 T\}]^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $\alpha > 0$. С другой стороны, так как $1 - \exp\{-\alpha n^4 T\} \to 0$ при $\alpha \to 0$, то существует такое $\alpha(\varepsilon)$, что при $0 < \alpha < \alpha(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \tilde{\varphi}(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right)^2 [1 - \exp\{-\alpha n^4 T\}]^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $p(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Из неравенств (18) и (20) имеем

$$\|R_\alpha g_\delta - \tilde{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant \exp\left\{\frac{T}{4\alpha}\right\}\delta + \sqrt{p(\alpha)}.$$

Таким образом, если функция $\alpha(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы, то $\exp\left\{\frac{T}{4\alpha(\delta)}\right\}\delta \to 0$ и $\sqrt{p(\alpha(\delta))} \to 0$ при $\delta \to 0$, а значит, и $\|R_{\alpha(\delta)} g_\delta - \tilde{\varphi}\|_{L_2[0,\pi]} \to 0$ при $\delta \to 0$, что и доказывает теорему.

В этом параграфе был рассмотрен наиболее простой вариант метода квазиобращения для задачи с обратным направлением времени. Подробное изложение метода квазиобращения и его различных применений содержится в [52].

§3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

В этом параграфе рассмотрены некоторые обратные задачи, связанные с исследованием стационарных полей.

Обратные задачи для уравнения Лапласа. При исследовании различных проблем, связанных с изучением стационарных полей, например гравитационного или магнитного, с целью поиска полезных ископаемых, возникают задачи продолжения этих полей [21].

Рассмотрим пример постановки подобной задачи. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую в прямоугольнике уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad 0 < x < a, \ \ 0 < y < b, \tag{1}$$

и дополнительным условиям

$$u(0,y) = u(a,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{3}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{4}$$

Эту задачу можно рассматривать как обратную по отношению к классической задаче Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Действительно, задача определения функции

$$u(x,d) = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{5}$$

где d — фиксированная точка, такая, что $d \in (0, b]$, по функции $\psi(x) = u_y(x,0)$ представляет собой задачу определения части условий задачи Дирихле $h(x) = u(x,d)$ на одной из сторон прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant d$, по дополнительной информации о решении задачи Дирихле $u_y(x,0) = \psi(x)$.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < d$ с условиями (2), (3), (5) может быть получено методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a}(d-y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} d} \sin \frac{\pi n}{a} x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a h(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} d} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

Следовательно,

$$u_y(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a^2} \int_0^a \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \operatorname{cth} \frac{\pi n d}{a} \sin \frac{\pi n}{a} x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a^2} \int_0^a h(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \left(\operatorname{sh} \frac{\pi n d}{a} \right)^{-1} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

Таким образом, если функции $u(x,0) = \varphi(x)$ и $u_y(x,0) = \psi(x)$ известны, обратная задача сводится к задаче определения $h(x)$ из уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^a h(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \left(\operatorname{sh} \frac{\pi n d}{a} \right)^{-1} \sin \frac{\pi n}{a} x = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad (6)$$

где

$$g(x) = \psi(x) a^2 / 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^a \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{a} \xi \, d\xi \operatorname{cth} \frac{\pi n d}{a} \sin \frac{\pi n}{a} x$$

— заданная функция. Единственность определения функции $h(x)$ из уравнения (6) в пространстве $L_2[0,a]$ следует из полноты системы функций $\sin \frac{\pi n}{a} x$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $L_2[0,a]$.

Поменяв в (6) местами порядок интегрирования и суммирования, получим для неизвестной функции $h(x)$ интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$Gh \equiv \int_0^a G(x,\xi) h(\xi) d\xi = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad (7)$$

с ядром

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi n}{a}\xi \left[\operatorname{sh}\frac{\pi n d}{a}\right]^{-1}.$$

Так как этот ряд сходится равномерно в прямоугольнике $0 \leqslant x, \xi \leqslant a$, а также равномерно сходятся ряды из производных по x и ξ, то функция $G(x,\xi)$ непрерывно дифференцируема в квадрате $0 \leqslant x, \xi \leqslant a$. Следовательно, задача решения уравнения (7) будет некорректна как в том случае, когда интегральный оператор G рассматривается действующим из $L_2[0,a]$ в $L_2[0,a]$, так и в том случае, когда он рассматривается действующим из $C[0,a]$ в $C[0,a]$.

Получим оценку условной устойчивости решения задачи (1)-(4). Пусть функция $u(x,y)$ такова, что $u(x,y)$, $u_{xx}(x,y)$, $u_{xy}(x,y)$, $u_{yy}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$; $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, условиям (2)-(4) и не равна нулю тождественно.

Рассмотрим для $y \in [0,b]$ функцию

$$p(y) = \int_0^a \left(u(x,y)\right)^2 dx.$$

Дифференцируя, имеем

$$p'(y) = 2\int_0^a u(x,y)u_y(x,y)dx,$$

$$p''(y) = 2\int_0^a u(x,y)u_{yy}(x,y)dx + 2\int_0^a \Big(u_y(x,y)\Big)^2 dx.$$

Преобразуем первый интеграл, входящий в выражение для второй производной

$$\int_0^a u(x,y)u_{yy}(x,y)dx = -\int_0^a u(x,y)u_{xx}(x,y)dx =$$

$$= -u(x,y)u_x(x,y)\Big|_0^a + \int_0^a \left(u_x(x,y)\right)^2 dx = \int_0^a \left(u_x(x,y)\right)^2 dx. \qquad (8)$$

Так как

$$\frac{d}{dy}\int\limits_0^a (u_x(x,y))^2 dx = 2\int\limits_0^a u_x(x,y)u_{xy}(x,y)dx =$$

$$= 2u_x(x,y)u_y(x,y)\Big|_0^a - 2\int\limits_0^a u_{xx}(x,y)u_y(x,y)dx =$$

$$= 2\int\limits_0^a u_{yy}(x,y)u_y(x,y)dx = \frac{d}{dy}\int\limits_0^a (u_y(x,y))^2 dx,$$

то

$$\int\limits_0^a (u_x(x,y))^2 dx = \int\limits_0^a (u_y(x,y))^2 dx +$$

$$+\int\limits_0^a \left[(u_x(x,0))^2 - (u_y(x,0))^2\right] dx.$$

Подставляя это равенство в (8), имеем

$$\int\limits_0^a u(x,y)u_{yy}(x,y)dx = \int\limits_0^a (u_y(x,y))^2 dx + \int\limits_0^a \left[(u_x(x,0))^2 - (u_y(x,0))^2\right] dx.$$

Следовательно,

$$p''(y) = 4\int\limits_0^a (u_y(x,y))^2 dx + 4q,$$

где $q = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[(u_x(x,0))^2 - (u_y(x,0))^2\right] dx$.

Рассмотрим функцию $k(y) = \ln(p(y) + |q|)$. Так как

$$k''(y) = \frac{(p(y)+|q|)p''(y) - (p'(y))^2}{(p(y)+|q|)^2},$$

то, используя выражения для производных $p(y)$, имеем

$$k''(y) = \frac{1}{(p(y)+|q|)^2}\Bigg\{4\int\limits_0^a \Big(u_y(x,y)\Big)^2 dx \int\limits_0^a (u(x,y))^2 dx +$$

$$+4q\int\limits_0^a (u(x,y))^2 dx + 4\int\limits_0^a (u_y(x,y))^2 dx|q| +$$

$$+4q|q| - 4\left(\int\limits_0^a u(x,y)u_y(x,y)dx\right)^2\Bigg\}.$$

Следовательно,

$$k''(y) \geqslant \frac{4[qp(y)+q|q|]}{(p(y)+|q|)^2} \geqslant -4.$$

Рассмотрим функцию $w(y) = k(y) + 2y(y-b)$. Так как $w''(y) = k''(y) + 4$, то $w''(y) \geqslant 0$ при $y \in [0,b]$. Следовательно,

$$w(y) \leqslant w(0)(b-y)/b + w(b)y/b.$$

Из этого неравенства, учитывая определение $w(y)$, имеем

$$k(y) \leqslant k(0)(b-y)/b + k(b)y/b - 2y(y-b).$$

Следовательно,

$$\ln(p(y)+|q|) \leqslant \frac{b-y}{b}\ln(p(0)+|q|) + \frac{y}{b}\ln(p(b)+|q|) + 2y(b-y)$$

и окончательно для $y \in [0,b]$

$$p(y) \leqslant (p(0)+|q|)^{(b-y)/b}(p(b)+|q|)^{y/b}\exp\{2y(b-y)\} - |q|. \qquad (9)$$

Получим теперь оценку условной устойчивости для решения задачи (1)–(4). Пусть функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и $u(x,y)$, удовлетворяют уравнению Лапласа при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, условиям (2) при $y \in [0.b]$, условиям $u_1(x,0) = \varphi_1(x)$, $u_{1y}(x,0) = \psi_1(x)$, $u_2(x,0) = \varphi_2(x)$, $u_{2y}(x,0) = \psi_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, и таковы, что

$$\int_0^a \left(u_i(x,b)\right)^2 dx \leqslant C^2, \quad C = \text{const}.$$

Обозначив $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$, имеем $\|u(x,b)\|^2_{L_2[0,a]} \leqslant 4C^2$.

Применив неравенство (9) к $u(x,y)$ и учитывая определение функции $p(y)$, получим, что для $y \in [0,b]$ справедлива оценка

$$\|u_1(x,y) - u_2(x,y)\|^2_{L_2[0,a]} \leqslant \left(\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|^2_{L_2[0,a]} + |q|\right)^{\frac{b-y}{b}} *$$
$$*\left(4C^2 + |q|\right)^{y/b}\exp\left(2y(b-y)\right) - |q|,$$

где $q = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\left(\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)\right)^2 - \left(\psi_1(x) - \psi_2(x)\right)^2\right]dx$ и $|q| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_1' - \varphi_2'\|^2_{L_2[0,a]} + \frac{1}{2}\|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2[0,a]}$.

Полученная оценка представляет собой частный случай оценки решения задачи Коши для эволюционного операторного уравнения второго порядка [40, 45].

Обратные задачи для уравнения Лапласа, связанные с задачами продолжения стационарных физических полей, исследуются для различного типа областей. Приведем постановку обратной задачи для задачи Дирихле в кольце.

Требуется определить функцию $u(a,\varphi) = f(\varphi)$, если известно, что $u(\rho,\varphi)$ является решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, && 0 < a \leqslant \rho \leqslant b, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ &u(a,\varphi) = f(\varphi), && 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ &u(b,\varphi) = g(\varphi), && 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{aligned}$$

где $g(\varphi)$ — заданная функция, и задана дополнительная информация о решении задачи

$$u_\rho(b,\varphi) = h(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

где функция $h(\varphi)$ известна.

Исследование этой обратной задачи может быть проведено аналогично задаче (1)–(4) с использованием метода разделения переменных.

Обратные задачи теории потенциала. Рассмотрим уравнение Пуассона в пространстве

$$\Delta u = -4\pi\rho(x,y,z). \tag{10}$$

При определенных предположениях относительно функции $\rho(x,y,z)$ можно показать [73], что уравнение (10) имеет единственное, стремящееся на бесконечности к нулю решение, которое определяется формулой

$$u(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{11}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется ньютоновским, или объемным, потенциалом, а функция $\rho(x,y,z)$ — его плотностью. Физический смысл объемного потенциала состоит в том, что он (в определенной системе физических единиц) представляет собой потенциал силы тяжести, создаваемой в пространстве телом с плотностью распределения масс $\rho(x,y,z)$.

Рассмотрим обратную задачу, имеющую большое значение для разработки геофизических методов поиска полезных ископаемых. Предположим, что тело с некоторой плотностью масс занимает ограниченную область пространства, т.е. функция $\rho(x,y,z)$

отлична от нуля только в ограниченной области T. В некоторой области T_1, не имеющей общих точек с T, измеряется объемный потенциал, создаваемый телом. Требуется, зная этот внешний объемный потенциал, определить функцию $\rho(x,y,z)$. Очевидно, что эта обратная задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\iiint\limits_T \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} = u(x,y,z), \quad (x,y,z)\in T_1. \tag{12}$$

Сформулированную обратную задачу можно исследовать и в рамках формулы (11), рассматривая ее как линейное интегральное уравнение 1-го рода относительно неизвестной функции $\rho(x,y,z)$, при заданной в области T_1 функции $u(x,y,z)$.

Рассмотрим исследуемую обратную задачу в рамках уравнения (12). Важной особенностью этой задачи является то, что неизвестными в ней являются как область T, в которой функция $\rho(x,y,z)$ отлична от нуля (т.е. пределы интегрирования в тройном интеграле), так и функция $\rho(x,y,z)$ в области T. Таким образом, в общей постановке обратная задача объемного потенциала представляет собой задачу одновременного определения как области T, так и плотности $\rho(x,y,z)$, заданной в этой области. *Для анализа единственности решения этой обратной задачи* найдем объемный потенциал шара со сферически-симметричной плотностью распределения масс.

Пусть область T — шар радиуса a с центром в начале координат, а определенная в T функция $\rho(x,y,z) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, т.е. зависит только от расстояния от точки (x,y,z) до начала координат. Тогда

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_T \frac{\rho(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

В силу сферической симметричности функции $\rho(x,y,z)$ потенциал $u(x,y,z)$ зависит только от расстояния R от точки (x,y,z) до начала координат $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Учитывая это и переходя к сферическим координатам $\xi = r\sin\varphi\cos\theta$, $\eta = r\sin\varphi\sin\theta$, $\zeta = r\cos\varphi$, получим для $R>a$

$$u(R)=\int\limits_0^a\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(r)r^2\sin\varphi d\theta\, d\varphi\, dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}}=2\pi\int\limits_0^a\int\limits_0^\pi \frac{\rho(r)r^2\sin\varphi d\varphi\, dr}{\sqrt{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}}.$$

Вводя переменную $t=\sqrt{R^2-2Rr\cos\varphi+r^2}$, имеем для $R>a$

$$u(R) = \frac{2\pi}{R}\int\limits_0^a \left(\int\limits_{R-r}^{R+r} \rho(r)r\, dt\right)dr.$$

Окончательная формула для потенциала имеет вид

$$u(R) = \frac{4\pi}{R} \int_0^a \rho(r) r^2 dr, \quad R > a. \tag{13}$$

Проанализируем с помощью вычисленного потенциала шара со сферически симметричной плотностью обратную задачу в общей постановке, т.е. задачу определения и формы тела, и его плотности. Покажем, что решение этой задачи неединственно. Действительно, пусть все тела представляют собой шары с центром в нуле и радиусом, меньшим A. Пусть потенциал $u(x, y, z)$, создаваемый этими телами, известен для всех точек пространства, лежащих вне шара радиуса A. Требуется по объемному потенциалу определить радиус шара и его плотность. Рассмотрим шар радиуса a с постоянной плотностью ρ_0. Тогда из формулы (13) следует, что при $R > A$

$$u(R) = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{3R}. \tag{14}$$

Следовательно, потенциал $u(R)$ не изменится, если изменить плотность и радиус шара так, чтобы произведение $\rho_0 a^3$ осталось постоянным. Таким образом, из формулы (14) следует, что задача одновременного определения формы тела и его плотности имеет не единственное решение даже в том случае, когда плотность постоянна, но неизвестна. Отметим, что формула (14) и следующая из нее неединственность обратной задачи имеют простой физический смысл. Действительно, величина $4\pi\rho_0 a^3/3$ равна массе шара M, т.е. потенциал шара $u(R) = M/R$. Следовательно, шары разного размера и плотности, но с одинаковой массой будут иметь один и тот же потенциал при $R > A$.

В связи с неединственностью решения обратной задачи объемного потенциала в общей постановке естественно возникают две другие обратные задачи. Первую можно сформулировать так. Требуется определить плотность распределения масс $\rho(x, y, z)$ в теле заданной формы, если известен внешний объемный потенциал этого тела, т.е. нужно определить плотность тела в предположении, что известна его форма. Вторая задача состоит в определении по внешнему потенциалу формы тела в предположении, что распределение плотности в нем известно, например плотность постоянна.

Рассмотрим первую задачу, т.е. задачу определения плотности при известной форме тела. Легко видеть, что она также имеет неединственное решение. Действительно, воспользуемся формулой (13) для объемного потенциала шара со сферически симметричной плотностью. Если при $R > a$ задан потенциал этого шара $u(R)$, то из формулы (13) имеем

$$\int_0^a \rho(r)r^2 dr = \frac{u(R)R}{4\pi} = \text{const}, \quad R > a.$$

Таким образом, вся информация относительно функции $\rho(r)$, полученная из исходных данных обратной задачи, состоит в том, что задано значение интеграла

$$\int_0^a \rho(r)r^2 dr = G. \tag{15}$$

Очевидно, что однозначно определить функцию $\rho(r)$ из этого условия невозможно. Например, при $a = 1$ любая функция $\rho(r) = cr+d$, где c и d — положительные постоянные, такие, что $c/4+d/3 = G$, удовлетворяет условию (15).

Исследованию обратной задачи определения формы тела в предположении, что его плотность известна и задан внешний объемный потенциал, посвящено большое число работ. Впервые единственность решения этой обратной задачи была изучена в работе П.С. Новикова [63], а затем исследования в этом направлении были продолжены целым рядом авторов [29, 65, 66, 75].

Задача определения формы тела по его внешнему потенциалу при известной плотности тела, является нелинейной. При определенных предположениях эта задача может быть сведена к задаче решения нелинейного интегрального уравнения. Предположим, что тело T является звездным относительно некоторой известной точки M, т.е. любой луч, проведенный из M, пересекает поверхность Σ, ограничивающую тело T, только в одной точке. Допустим также, что плотность тела известна и постоянна $\rho(x, y, z) = \rho_0$. Взяв точку M в качестве начала координат, получим, что уравнение поверхности Σ может быть задано следующим образом: $r = \sigma(\varphi, \theta)$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Тогда формула для потенциала имеет вид

$$u(x, y, z)=$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sigma(\varphi,\theta)} \frac{\rho_0 r^2 \sin\varphi dr}{\sqrt{(x-r\sin\varphi\cos\theta)^2+(y-r\sin\varphi\sin\theta)^2+(z-r\cos\varphi)^2}} \right] d\theta\, d\varphi.$$

Если функция $u(x, y, z)$ известна в некоторой области, не содержащей тело T, то эта формула определяет нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\sigma(\varphi, \theta)$, задающей поверхность Σ, ограничивающую тело T.

§4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

которая описывает процесс колебаний упругой струны, закрепленной на обоих концах. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяют начальное положение струны и начальное распределение скоростей соответственно.

Решение задачи (1)–(4) может быть получено методом разделения переменных и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \cos \frac{\pi n}{l} at + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \sin \frac{\pi n}{l} at \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу. Предположим, что начальное распределение скоростей $\psi(x) = 0$, а функция $\varphi(x)$, определяющая начальное положение струны, неизвестна. Требуется определить $\varphi(x)$, если задано положение струны в момент времени $t_0 \in (0,T]$

$$u(x,t_0) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $g(x)$ — заданная функция. Положив в формуле (5) $\psi(x) = 0$ и $t = t_0$, получим уравнение для функции $\varphi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \cos \frac{\pi n}{l} at_0 \sin \frac{\pi n}{l} x = g(x). \tag{7}$$

Это уравнение является линейным уравнением относительно функции $\varphi(x)$ вида $A_{t_0}\varphi = g$, где линейный оператор A_{t_0} определяется выражением, стоящим в левой части уравнения (7). Рассмотрим вопрос о корректности задачи решения этого уравнения в случае, когда оператор A_{t_0} рассматривается действующим из пространства $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$.

Покажем, что корректность исследуемой задачи существенным образом зависит от выбора момента наблюдения t_0. Пусть $t_0 = 2l/a$, тогда из (7) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \sin \frac{\pi n}{l} x = g(x). \tag{8}$$

Так как выражение, стоящее в левой части этого равенства, есть разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\left\{\sqrt{2/l} \sin \frac{\pi n}{l} x\right\}$, то (8) можно переписать так: $\varphi(x) = g(x)$, т.е. при $t_0 = 2l/a$ оператор A_{t_0} равен единичному и, очевидно, что в этом случае задача решения уравнения (7) корректна. Этот эффект понятен и с физической точки зрения. Процесс колебания струны носит периодический характер, и через время $t_0 = 2l/a$ струна займет то же положение, которое она занимала в начальный момент времени. Является ли значение $t_0 = 2l/a$ единственным (без учета периода колебаний) значением, при котором задача корректна?

Теорема 4.4.1. *Если $t_0 = \frac{2pl}{(2k-1)a}$, где p и k — натуральные числа, то для любой $g(x) \in L_2[0,l]$ существует единственное решение $\varphi(\xi) \in L_2[0,l]$ уравнения (7) и выполнена оценка устойчивости*

$$\|\varphi\|_{L_2[0,l]} \leqslant C\|g\|_{L_2[0,l]}, \quad C = \text{const}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию натурального аргумента n $\cos \frac{\pi n a t_0}{l} = \cos \frac{2\pi n p}{2k-1}$. Так как при $n_2 = n_1 + 2k - 1$ выполнено равенство $\cos \frac{\pi n_2 a t_0}{l} = \cos \frac{\pi n_1 a t_0}{l}$, то функция $\cos \frac{2\pi n p}{2k-1}$ принимает не более чем $2k-1$ различных значений. Покажем, что при $n = 1, 2, \dots, 2k-1$ функция $\cos \frac{2\pi n p}{2k-1} \neq 0$. Действительно, предположим, что для некоторого $n = n_0$ $\cos \frac{2\pi n_0 p}{2k-1} = 0$. Тогда $2\pi n_0 p/(2k-1) = \pi/2 + \pi q$, где q — целое число. Следовательно, должно выполняться равенство $4n_0 p = (2q+1)(2k-1)$. Но это равенство невозможно, так как в его левой части стоит четное число, а в правой — нечетное. Таким образом, $\cos \frac{2\pi n p}{2k-1}$ не обращается в ноль при натуральных значениях n и принимает конечное число значений. Следовательно,

$$\min_{n \geqslant 1} \left| \cos \frac{2\pi n p}{2k-1} \right| = c_1 > 0. \tag{10}$$

Положим в (7) $t_0 = \frac{2pl}{(2k-1)a}$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \cos \frac{2\pi n p}{2k-1} \sin \frac{\pi n}{l} x = g(x). \tag{11}$$

Обозначим через φ_n и g_n коэффициенты Фурье

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(\xi)\sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi, \quad g_n = \int_0^l g(\xi)\sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi.$$

Так как система функций $\sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi$, $n = 1,2,\ldots$, является полной ортонормированной системой в пространстве $L_2[0,l]$, то из (11) следует, что

$$\varphi_n \cos\frac{2\pi np}{2k-1} = g_n, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Учитывая неравенство (10), получим, что для любой функции $g(x) \in L_2[0,l]$ уравнение (11). имеет единственное решение $\varphi(x) \in L_2[0,l]$, определяемое формулой

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left(\cos\frac{2\pi np}{2k-1}\right)^{-1} \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Из этой формулы, неравенства (10) и равенства Парсеваля следует оценка устойчивости (9) с константой $C = 1/c_1$, и теорема 4.4.1 доказана.

Из теоремы 4.4.1 следует, что при $t_0 = \frac{2pl}{(2k-1)a}$, где p, k — любые натуральные числа, задача решения уравнения (7) корректна. Покажем теперь, что существует бесконечное множество значений t_0, при которых эта задача является некорректной. Пусть $t_0 = \frac{(2p-1)l}{2ka}$, где p, k — натуральные числа. В этом случае $\cos\frac{\pi n a t_0}{l} = \cos\frac{\pi n(2p-1)}{2k}$ и при $n = k$ $\cos\frac{\pi n a t_0}{l} = 0$. Тогда решением уравнения (7) с нулевой правой частью $g(x)$ будет являться функция $\varphi(\xi) = \sin\frac{\pi k\xi}{l}$. Следовательно, решение уравнения (7) неединственно и задача некорректна.

В связи с приведенным анализом корректности рассмотренной обратной задачи возникает следующий вопрос: чем можно объяснить тот факт, что для каких-то точек наблюдения t_0 задача является корректной, а для сколь угодно близких к ним — некорректной?

Пусть $t_0 = 2l/a$. Тогда оператор A_{t_0}, определяемый выражением, стоящим в левой части (7), и рассматриваемый действующим из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$, равен единичному и задача решения уравнения $A_{t_0}\varphi = g$ корректна. Взяв последовательность точек наблюдения $t_{0k} = \frac{(4k-1)l}{2ka}$, получим, что $t_{0k} \to t_0$ при $k \to \infty$. Но при всех натуральных k задача решения уравнения $A_{t_{0k}}\varphi = g$ некорректна. Этот странный на первый взгляд факт объясняется тем, что

$\|A_{t_{0k}} - A_{t_0}\|$ не стремится к нулю при $t_{0k} \to t_0$. Действительно,

$$\|A_{t_{0k}} - A_{t_0}\| = \sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]} \leqslant 1} \|(A_{t_{0k}} - E)\varphi\|_{L_2[0,l]} =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]} \leqslant 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \left(\cos \frac{\pi(4k-1)n}{2k} - 1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Так как для любого натурального k при $n = k$ $\cos \frac{\pi(4k-1)n}{2k} = 0$, то $\|A_{t_{0k}} - A_{t_0}\| \geqslant 1$ для всех натуральных k. Таким образом, различные (с точки зрения корректности) свойства операторного уравнения $A_{t_0}\varphi = g$ для близких между собой точек наблюдения t_0 объясняются тем, что семейство операторов A_{t_0} не является непрерывным по параметру t_0.

Рассмотрим другую постановку обратной задачи для краевой задачи (1)–(4). Предположим, что функция $\varphi(x)$ известна и требуется определить $\psi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(4) вида (6). Для упрощения записи предположим, что известная функция $\varphi(x) = 0$. Положив в (5) $t = t_0$, получим уравнение для неизвестной функции $\psi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l}\xi \, d\xi \sin \frac{\pi n}{l} a t_0 \sin \frac{\pi n}{l} x = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (12)$$

Задача решения этого уравнения в случае, когда $g(x) \in L_2[0,l]$ и решение $\psi(x)$ ищется также в $L_2[0,l]$, будет некорректной при любом $t_0 > 0$. Действительно, единственность решения уравнения (12) в пространстве $L_2[0,l]$ зависит от значения t_0. Если t_0 таково, что $\sin \frac{\pi n}{l} a t_0 \neq 0$ для всех $n \geqslant 1$, например $t_0 = l/\pi a$, то решение уравнения (12) единственно. Если же t_0 таково, что существует n, при котором $\sin \frac{\pi n}{l} a t_0 = 0$, например $t_0 = l/2a$, то решение уравнения (12) неединственно. Однако при всех $t_0 > 0$ решение (12) существует не для любой $g(x) \in L_2[0,l]$. Действительно, если для $g(x) \in L_2[0,l]$ уравнение (12) имеет решение $\psi(x) \in L_2[0,l]$, то

$$\|\psi\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \left(\sin \frac{\pi n a t_0}{l} \right)^{-2} \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2.$$

Из этого представления для решения следует, что при любых $t_0 > 0$ уравнение (12) не будет иметь решение, например, для

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

т.к ряд из коэ…
ряда не сх.

Таким образом, задача решения уравнения (12) или, что то же самое, линейного операторного уравнения $B_{t_0}\psi = g$, где B_{t_0} — оператор, определяемый выражением, стоящим в левой части (12), и действующий из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,l]$, является некорректной для любого $t_0 > 0$.

Глава V

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе рассмотрены обратные задачи для уравнений в частных производных, состоящие в определении неизвестного коэффициента уравнения по дополнительной информации о решении некоторой задачи для этого уравнения. Задачи подобного рода возникают при проведении различных научных исследований в связи с необходимостью определения характеристик вещества, в котором происходит изучаемый процесс, по результатам наблюдений. Несмотря на различие изложенных в этой главе обратных задач, их объединяет то, что дополнительная информация в каждой из обратных задач, представляет собой функцию, зависящую от времени. Такой тип дополнительной информации характерен для многочисленных экспериментов в различных областях науки и техники.

Рассмотренные в этой главе обратные задачи являются примерами весьма большой и интенсивно исследуемой области обратных коэффициентных задач для уравнений в частных производных. Более подробное представление о результатах, достигнутых в этом направлении, можно получить, ознакомившись с монографиями [4, 13, 47–49, 69, 70].

§1. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $k(t)$, зависящим от времени

$$u_t = k(t)u_{xx}, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3}$$

где множество $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < \pi, \ 0 < t \leqslant T\}$. Будем предполагать, что функции $k(t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$k(t) \in C[0,T]; \quad k(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\varphi(x) \in C^4[0,\pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0. \tag{5}$$

Решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t)$, такую, что $u(x,t) \in C[\bar{Q}_T]$, $u(x,t) \in C^{2,1}[Q_T]$ и $u(x,t)$ удовлетворяет (1)–(3).

Прежде чем ставить и исследовать обратную задачу для краевой задачи (1)–(3), покажем, что задача (1)–(3) имеет единственное решение.

Теорема 5.1.1. *Если выполнены условия* (4), (5), *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3).

Доказательство. Покажем, что решение задачи (1)–(3) существует. Рассмотрим в $\bar{Q}_T$ функцию

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\left\{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau\right\} \sin(nx), \tag{6}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin(n\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Интегрируя по частям и учитывая (5), получим, что

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi n^4} \int_0^{\pi} \varphi''''(\xi) \sin(n\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, для всех натуральных n справедлива оценка $|\varphi_n| \leqslant C/n^4$, где $C = \text{const}$. Из этой оценки следует, что функция $u(x,t)$, определяемая равенством (6), непрерывна в $\bar{Q}_T$ и удовлетворяет условиям (2), (3). На множестве $\bar{Q}_T$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \exp\left\{-n^2 \int_0^t k(\tau)\,d\tau\right\} \sin(nx)$$

сходится равномерно. Следовательно, $u(x,t) \in C^{2,1}[Q_T]$. Вычисляя производные $u_t(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ (см. (6)), получим, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в Q_T и, следовательно, является решением задачи (1)–(3).

Для доказательства единственности решения задачи (1)–(3) достаточно показать, что она имеет только нулевое решение при $\varphi(x) = 0$. Пусть $v(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) с $\varphi(x) = 0$. Умножив уравнение (1) на $v(x,t)$ и интегрируя, имеем для $0 < t \leqslant T$

$$\int_0^{\pi}\int_0^t v_t(x,\tau)v(x,\tau)\,d\tau\,dx = \int_0^t k(\tau) \int_0^{\pi} v_{xx}(x,\tau)v(x,\tau)\,dx\,d\tau,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left[(v(x,t))^2 - (v(x,0))^2 \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^t k(\tau)\left[v_x(x,\tau)v(x,\tau)\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi (v_x(x,\tau))^2 dx \right] d\tau.$$

Так как $v(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и условию (3) с $\varphi(x) = 0$, то

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (v(x,t))^2 dx + \int\limits_0^t k(\tau)\int\limits_0^\pi (v_x(x,\tau))^2 dx\, d\tau = 0.$$

Из этого равенства и положительности $k(t)$ следует, что для всех $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ $v(x,t) = 0$. Таким образом, решение задачи (1)–(3) единственно. Теорема 5.1.1 доказана.

Замечание. Доказательство теоремы 5.1.1 можно провести при более слабых предположениях относительно функции $\varphi(x)$, чем условия (5).

Перейдем теперь к постановке обратной задачи. Предположим, что в краевой задаче (1)–(3) известна функция $\varphi(x)$ и неизвестен коэффициент $k(t)$. Требуется определить $k(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(3)

$$u(x_0,t) = q(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где $q(t)$ — известная функция, а точка $x_0 \in (0,\pi)$.

Исследуем вопрос о единственности решения этой обратной задачи. Очевидно, что для единственности решения обратной задачи необходимо, чтобы $\varphi(x)$ не равнялась тождественно нулю на отрезке $[0,\pi]$, так как в противном случае решение задачи (1)–(3) $u(x,t) = 0$ в $\bar{Q}_T$ для любой функции $k(t)$. Достаточно ли этого условия для единственности решения рассматриваемой обратной задачи? Легко видеть, что обратная задача может иметь неединственное решение и при $\varphi(x) \not\equiv 0$ на отрезке $[0,\pi]$. Действительно, пусть $\varphi(x) = \sin 2x$ и $x_0 = \pi/2$. Решением задачи (1)–(3) будет функция

$$u(x,t) = \sin(2x)\exp\left\{ -4\int\limits_0^t k(\tau)d\tau \right\}.$$

Следовательно, $u(x_0,t) = 0$ при $t \in [0,T]$ для любой функции $k(t)$ и решение обратной задачи неединственно.

Сформулируем условия на функцию $\varphi(x)$, обеспечивающие единственность решения обратной задачи.

Теорема 5.1.2. *Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (5), $\varphi''(x) > 0$ при $x \in (0,\pi)$. Тогда, если $k_1(t), k_2(t) \in C^1[0,T]$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ положительны на $[0,T]$ и таковы, что $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, удовлетворяют (8) при $t \in [0,T]$, где $u_i(x,t)$ — решения задачи (1)–(3) для $k_i(t)$, $i = 1,2$, соответственно, то $k_1(t) = k_2(t)$ при $t \in [0,T]$.*

Доказательство. Докажем вначале, что при сделанных предположениях решение задачи (1)–(3) таково, что $u_{xx}(x,t) > 0$ при $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$. Из условий (5) следует, что ряд

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \exp\left\{-n^2 \int_0^t k(\tau)d\tau\right\} \sin(nx) = u_{xx}(x,t)$$

сходится в $\bar{Q}_T$ равномерно, а значит, u_{xx} в $\bar{Q}_T$ непрерывна. Точно так же можно показать, что u_t непрерывна в $\bar{Q}_T$. Рассматривая ряд (6), определяющий решение $u(x,t)$, при $t \in [t_0,T]$, где t_0 — произвольная положительная постоянная, и учитывая условия (5), получим, что при $0 < t \leqslant T$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ существуют непрерывные производные $u_{xxt}(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$.

Обозначим через $w(x,t) = u_t(x,t)$. Функция $w(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$w_t = k(t)w_{xx} + \frac{k'(t)}{k(t)}w, \quad 0 < t \leqslant T, \ 0 < x < \pi, \tag{9}$$
$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$w(x,0) = k(0)\varphi''(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Докажем, что $w(x,t) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_T$. Рассмотрим функцию $y(x,t) = w(x,t)e^{-\lambda t}$, где λ — произвольная положительная постоянная. Функция $y(x,t)$ является решением задачи

$$y_t + \lambda y - \frac{k'(t)}{k(t)}y = k(t)y_{xx}, \quad 0 < t \leqslant T, \ 0 < x < \pi, \tag{10}$$
$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$
$$y(x,0) = k(0)\varphi''(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{12}$$

Покажем, что $y(x,t) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_T$. Предположим, что это не так. Обозначим через (x_1,t_1) точку, в которой достигается отрицательный минимум функции $y(x,t)$ на $\bar{Q}_T$. Из неотрицательности $k(0)\varphi''(x)$ и условий (11), (12) следует, что $0 < x_1 < \pi$, а $0 < t_1 \leqslant T$. Тогда в точке (x_1,t_1) выполнены следующие условия:

$$y(x_1,t_1) < 0, \quad y_t(x_1,t_1) \leqslant 0, \quad y_{xx}(x_1,t_1) \geqslant 0. \tag{13}$$

Выберем число λ так, чтобы $\lambda > \max_{0\leqslant t\leqslant T} |k'(t)/k(t)|$. Тогда, рассматривая уравнение (10) в точке (x_1, t_1), получим противоречие, поскольку из (13) следует, что

$$y_t(x_1,t_1) + y(x_1,t_1)\left[\lambda - \frac{k'(t_1)}{k(t_1)}\right] < 0,$$

$$k(t_1)y_{xx}(x_1,t_1) \geqslant 0.$$

Таким образом, исходное предположение было неверно и $y(x,t) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_T$.

Докажем, что $w(x,t) > 0$ для $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$. Для доказательства этого неравенства используем одну теорему из общей теории параболических уравнений [88]. Для уравнения (9) она может быть сформулирована следующим образом. Если функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению (9) при $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$, $w(x,t) \geqslant 0$ в $\bar{Q}_T$ и существует точка (x_2, t_2), $0 < x_2 < \pi$, $0 < t_2 \leqslant T$, такая, что $w(x_2,t_2) = 0$, то $w(x,t) = 0$ для всех $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant t_2$. Из этой теоремы следует, что $w(x,t) > 0$ для $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$. Действительно, если в какой-то точке (x_2,t_2), такой, что $0 < x_2 < \pi$, $0 < t_2 \leqslant T$, $w(x_2,t_2) = 0$, то $w(x,t) = 0$ для $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant t_2$. Но тогда $w(x,0) = k(0)\varphi''(x) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, что противоречит условиям теоремы, а значит, $w(x,t) > 0$ для $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$. Следовательно, $u_{xx}(x,t) > 0$ при $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$.

Перейдем теперь к доказательству единственности решения исследуемой обратной задачи. Из (6) следует, что равенство (8) для функций $u_i(x,t)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\left\{-n^2\int_0^t k_i(\tau)d\tau\right\}\sin(nx_0) = q(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{14}$$

Введем функции

$$a_i(t) = \int_0^t k_i(\tau)d\tau.$$

Из (14) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left[\exp\{-n^2a_1(t)\} - \exp\{-n^2a_2(t)\}\right]\sin(nx_0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{15}$$

Так как

$$\exp\{-n^2a_1(t)\} - \exp\{-n^2a_2(t)\} = -n^2(a_1(t) - a_2(t)) \cdot$$
$$\cdot \int_0^1 \exp[-n^2a_2(t) - \theta(n^2a_1(t) - n^2a_2(t))]\,d\theta,$$

то (15) можно записать следующим образом:

$$b(t)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n n^2\sin(nx_0)\int_0^1 \exp\left[-n^2a_2(t)-\theta n^2 b(t)\right]d\theta = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{16}$$

где $b(t) = a_1(t) - a_2(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n n^2\sin(nx_0)\int_0^1 \exp\left[-n^2a_2(t)-\theta n^2 b(t))\right]d\theta.$$

Функция $\Phi(t)$ непрерывна при $t\in[0,T]$, и

$$\Phi(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n n^2\sin(nx_0) = -\varphi''(x_0) < 0. \tag{17}$$

Предположим, что $\Phi(t)$ обращается в ноль на отрезке $[0,T]$. Обозначим через t_0 минимальный ноль функции $\Phi(t)$ на отрезке $[0,T]$. Из неравенства (17) и непрерывности $\Phi(t)$ следует, что $t_0 > 0$. Так как $\Phi(t) < 0$ для $t \in [0,t_0)$, то из (16) следует, что $b(t) = 0$ для $t \in [0, t_0]$.

Тогда

$$\Phi(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n n^2\sin(nx_0)\exp\{-n^2a_2(t_0)) = -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(x_0,t_0).$$

Следовательно, в силу доказанной положительности второй частной производной по x решения задачи (1)–(3) для $0 < x < \pi$, $0 < t \leqslant T$, $\Phi(t_0) \neq 0$, что противоречит тому, что t_0 является нулем $\Phi(t)$. Следовательно, $\Phi(t) < 0$ для всех $t\in[0,T]$ и из (16) имеем $b(t) = 0$ для $t\in[0,T]$. Тогда $k_1(t) = k_2(t)$ для $t \in [0,T]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что теорема 5.1.2 остается справедливой, если условие $\varphi''(x) > 0$ при $x\in(0,\pi)$ заменить на условие $\varphi''(x) < 0$ при $x \in (0,\pi)$.

Из формулы (6) для решения задачи (1)–(3) и условия (8) следует, что рассматриваемая обратная задача представляет собой задачу решения нелинейного операторного уравнения

$$Ak = q, \tag{18}$$

где оператор A определяется следующим образом:

$$Ak=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \exp\left\{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau\right\}\sin(nx_0). \tag{19}$$

Очевидно, что задача решения уравнения (18) является некорректной, если оператор A рассматривать действующим из пространства $C[0,T]$ в $C[0,T]$, т.е. дополнительная информация $q(t)$ в (8) может задаваться приближенно в равномерной метрике. Действительно, из формулы (19) следует, что уравнение (18) не может иметь решение $k(t) \in C[0,T]$, если $q(t) \in C[0,T]$, но $q(t) \notin C^1[0,T]$. Легко видеть, что условие $q(t) \in C^1[0,T]$ является необходимым для существования решения уравнения (18) в классе непрерывных функций. Необходимость этого следует из равенства (8), в котором в левой части стоит решение задачи (1)–(3), имеющее непрерывную частную производную по t. Таким образом, если обратная задача имеет решение, то в левой части (8) стоит непрерывно дифференцируемая функция, следовательно, и $q(t)$ должна быть непрерывно дифференцируемой.

Для задачи решения уравнения (18) не выполнены также условия устойчивости в том случае, когда оператор рассматривается действующим из $C[0,T]$ в $C[0,T]$. Действительно, возьмем произвольную положительную функцию $k(t) \in C[0,T]$ и последовательность $k_p(t) = k(t) + k_0 \cos(pt)$, где $0 < k_0 < \min_{0 \leq t \leq T} k(t)$. Тогда $k_p(t) \in C[0,T]$, $k_p(t) > 0$ для $t \in [0,T]$ и $\|k_p(t) - k(t)\|_{C[0,T]} = k_0$ при $p \to \infty$. В то же время $\|Ak_p - Ak\|_{C[0,T]} \to 0$ при $p \to \infty$.

Исследуемая обратная задача существенно упрощается в том случае, когда функция $\varphi(x) = \sin(mx)$, где m — натуральное число. В этом случае уравнение (18) записывается следующим образом:

$$\exp\left(-m^2 \int_0^t k(\tau)d\tau\right) \sin(mx_0) = q(t). \tag{20}$$

Очевидными условиями разрешимости уравнения (20) являются положительность функции $q_1(t) = q(t)/\sin(mx_0)$ при $t \in [0,T]$ и равенство $q_1(0) = 1$. Пусть $q(t) \in C^1[0,T]$. Дифференцируя уравнение (20), получим

$$-m^2 k(t) \exp\left\{-m^2 \int_0^t k(\tau)d\tau\right\} = q_1'(t),$$

т.е. $-m^2 k(t) q_1(t) = q_1'(t)$.

Следовательно,

$$k(t) = -\frac{q'(t)_1}{m^2 q_1(t)} = -\frac{q'(t)}{m^2 q(t)}.$$

Из этой формулы для коэффициента $k(t)$ следует, что для положительности $k(t)$ при $t \in [0,T]$ необходимо, чтобы произведение $q'(t)q(t)$ было отрицательным при $t \in [0,T]$.

§2. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2), (3), если известны функции $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении коэффициента уравнения (1) $q(x)$ по дополнительной информации о решении задачи (1)–(3) следующего типа:

$$u(x_0,t) = f_1(t), \quad u_x(x_0,t) = f_2(t), \tag{4}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — заданные функции [69].

Изучим вначале условия существования и единственности решения задачи Коши (1)–(3). Приведем формулу Даламбера [85] для неоднородного уравнения колебаний

$$v_{tt} = v_{xx} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{5}$$

поскольку она будет использована в дальнейшем. Решение уравнения (5) с начальными условиями

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x)$$

задается формулой

$$v(x,t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Вопрос о существовании и единственности решения задачи (1)–(3) будем рассматривать для области на плоскости (x,t), представляющей собой треугольник $\Delta(x_0,t_0)$, ограниченный характеристиками уравнения (1) $x+t = x_0+t_0$, $x-t = x_0-t_0$ и прямой $t = 0$.

Т е о р е м а 5.2.1. *Если для $t_0 > 0$ функции $q(x) \in C[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $\varphi(x) \in C^2[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $\psi(x) \in C^1[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, то в $\Delta(x_0,t_0)$ существует единственное решение задачи (1)–(3) $u(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), то, использовав формулу Даламбера, получим интегральное уравнение

$$u(x,t) = w(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi)u(\xi,\tau)d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

где

$$w(x,t) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi.$$

Докажем, что уравнение (6) имеет единственное непрерывное в $\Delta(x_0,t_0)$ решение.

Рассмотрим в $\Delta(x_0,t_0)$ последовательность функций

$$u_n(x,t) = w(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi)u_{n-1}(\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \quad n=1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$u_0(x,t) = 0 \ \text{ в } \ \Delta(x_0,t_0).$$

Из непрерывности $w(x,t)$ и $q(x)$ следует, что все $u_n(x,t)$ непрерывны в $\Delta(x_0,t_0)$.

Обозначим $z_n(x,t) = u_n(x,t) - u_{n-1}(x,t)$. Из формулы (7) имеем

$$|z_n(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q_0|z_{n-1}(\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau, \quad (x,t)\in\Delta(x_0,t_0), \tag{8}$$

где $q_0 = \max_{x_0-t_0\leqslant x\leqslant x_0+t_0}|q(x)|$.

Покажем, что в $\Delta(x_0,t_0)$ справедлива оценка

$$|z_n(x,t)| \leqslant W\frac{q_0^{n-1}t_0^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n=1,2,\ldots,$$

где W — максимальное значение $|w(x,t)|$ в $\Delta(x_0,t_0)$.

Докажем эту оценку по индукции. Очевидно, что при $n=1$ она справедлива. Предположим, что она справедлива при $n=m$. Тогда из неравенства (8) имеем

$$|z_{m+1}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q_0|z_m(\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant W\frac{q_0^m t_0^{m-1}}{2(m-1)!}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tau^{m-1}\, d\xi\, d\tau \leqslant W\frac{q_0^m t_0^m t^m}{m!},$$

т.е. оценка доказана. Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x,t) - u_{n-1}(x,t)\right]$$

сходится в $\Delta(x_0,t_0)$, а его сумма $u(x,t)$ является функцией, непрерывной в$\Delta(x_0,t_0)$. Так как последовательность $u_n(x,t)$, определяемая (7), сходится к $u(x,t)$ равномерно в $\Delta(x_0,t_0)$, то $u(x,t)$ является решением уравнения (6) в $\Delta(x_0,t_0)$.

Покажем, что уравнение (6) имеет в $\Delta(x_0,t_0)$ только одно непрерывное решение. Предположим, что есть два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением уравнения

$$z(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi)z(\xi,\tau)d\xi\, d\tau.$$

Обозначим через $\bar{z}(t)$ максимум модуля функции $z(x,t)$ на отрезке $x_0 - t_0 + t \leqslant x \leqslant x_0 + t_0 - t$, тогда имеем неравенство

$$\bar{z}(t) \leqslant q_0 t_0 \int\limits_0^t \bar{z}(\tau)d\tau, \quad t \in [0,t_0].$$

Применяя лемму Гронуолла, получим, что $\bar{z}(t) = 0$ для $t \in [0,t_0]$, а значит, и $z(x,t) = 0$ в $\Delta(x_0,t_0)$, т.е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в $\Delta(x_0,t_0)$. Следовательно, уравнение (6) имеет единственное, непрерывное в $\Delta(x_0,t_0)$ решение.

Докажем теперь, что из непрерывности решения уравнения (6) следует существование непрерывных вторых частных производных. Из условий теоремы имеем $w(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$. Так как функции $q(x)$ и $u(x,t)$ непрерывны, то правая часть уравнения (6) представляет собой функцию, непрерывно дифференцируемую в $\Delta(x_0,t_0)$. Дифференцируя (6), найдем выражения для первых частных производных $u(x,t)$

$$u_x(x,t)=w_x(x,t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[q(x+t-\tau)u(x+t-\tau,\tau)-q(x-t+\tau)u(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau,$$

или

$$u_x(x,t)=w_x(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x} q(\theta)u(\theta,x+t-\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\theta)u(\theta,\theta+t-x)d\theta, \quad (9)$$

$$u_t(x,t)=w_t(x,t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[q(x+t-\tau)u(x+t-\tau,\tau)+q(x-t+\tau)u(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau,$$

или

$$u_t(x,t) = w_t(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} q(\theta)u(\theta, x+t-\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\theta)u(\theta,\theta+t-x)d\theta. \tag{10}$$

Так как $w(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$ и $u(x,t) \in C^1(\Delta(x_0,t_0))$, то из (9), (10) следует, что $u(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$. Дифференцируя (9) и (10), найдем выражения для вторых производных функции $u(x,t)$:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,t) = w_{xx}(x,t) + \frac{1}{2}q(x)u(x,t) - \frac{1}{2}q(x+t)u(x+t,0) + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x} q(\theta)u_t(\theta, x+t-\theta)d\theta + \frac{1}{2}q(x)u(x,t) - \\ - \frac{1}{2}q(x-t)u(x-t,0) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\theta)u_t(\theta,\theta+t-x)d\theta, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} u_{xt}(x,t) = w_{xt}(x,t) - \frac{1}{2}q(x+t)u(x+t,0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x} q(\theta)u_t(\theta, x+t-\theta)d\theta + \\ + \frac{1}{2}q(x-t)u(x-t,0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\theta)u_t(\theta,\theta+t-x)d\theta, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) = w_{tt}(x,t) - \frac{1}{2}q(x+t)u(x+t,0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x} q(\theta)u_t(\theta, x+t-\theta)d\theta - \\ - \frac{1}{2}q(x-t)u(x-t,0) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} q(\theta)u_t(\theta,\theta+t-x)d\theta. \end{gathered} \tag{13}$$

Так как функция $w(x,t)$ является решением уравнения (1) при $q(x) = 0$, то из (11), (13) получим, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\Delta(x_0,t_0)$. Из (6), (10) следует, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2), (3) при $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию обратной задачи. Предположим, что функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в дополнительных условиях таковы, что

$$\begin{gathered} f_1(t) \in C^2[0,t_0], \quad f_2(t) \in C^1[0,t_0], \\ f_1(0) = \varphi(x_0), \quad f_1'(0) = \psi(x_0), \quad f_2(0) = \varphi'(x_0), \quad f_2'(0) = \psi'(x_0). \end{gathered} \tag{14}$$

Эти условия естественным образом вытекают из гладкости решения задачи (1)–(3) $u(x,t)$ и согласования между собой условий (2), (3) и (4).

Прежде чем доказывать те или иные утверждения относительно обратной задачи (1)–(4), определим, что будет подразумеваться под ее решением. Так как из (1)–(4) будет определяться не только коэффициент $q(x)$, но и решение $u(x,t)$, то решением обратной задачи (1)–(4) будем считать пару функций $q(x)$, $u(x,t)$.

Определение. *Функции $q(x)$ и $u(x,t)$ будем называть решением обратной задачи (1)–(4) на множестве $\Delta(x_0,t_1)$, где $t_1 > 0$, если $q(x) \in C[x_0 - t_1, x_0 + t_1]$; $u(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_1))$; $q(x)$ и $u(x,t)$ удовлетворяют (1) в $\Delta(x_0,t_1)$; $u(x,t)$ удовлетворяет (2), (3) при $x \in [x_0 - t_1, x_0 + t_1]$ и (4) при $t \in [0,t_1]$.*

Теорема 5.2.2. *Предположим, что для некоторого $t_0 > 0$ функция $\varphi(x) \in C^2[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ и $|\varphi(x)| \geqslant \alpha > 0$ для $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, $\psi(x) \in C^1[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, а $f_1(t)$, $f_2(t)$ удовлетворяют условиям (14). Тогда существует $t_1 \in (0,t_0]$, такое, что в $\Delta(x_0,t_1)$ решение обратной задачи (1)–(4) существует и единственно.*

Доказательство. Предположим, что функции $q(x)$ и $u(x,t)$ являются решением обратной задачи на множестве $\Delta(x_0,t_0)$. Тогда из (2), (4), (12) и (13) следует, что

$$f_1''(t) = w_{tt}(x_0,t) - \frac{1}{2}q(x_0+t)\varphi(x_0+t) - \frac{1}{2}q(x_0-t)\varphi(x_0-t)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0+t}^{x_0} q(\theta)u_t(\theta, x_0+t-\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-t}^{x_0} q(\theta)u_t(\theta,\theta+t-x_0)d\theta, \quad (15)$$

$$f_2'(t) = w_{xt}(x_0,t) - \frac{1}{2}q(x_0+t)\varphi(x_0+t) + \frac{1}{2}q(x_0-t)\varphi(x_0-t)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x_0+t}^{x_0} q(\theta)u_t(\theta, x_0+t-\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-t}^{x_0} q(\theta)u_t(f,\theta+t-x_0)d\theta. \quad (16)$$

Сложив эти равенства и введя переменную $x = x_0 + t$, получим, что для $x \in [x_0, x_0 + t_0]$

$$q(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\Bigg[w_{tt}(x_0, x-x_0) + w_{xt}(x_0, x-x_0) -$$

$$-f_1''(x-x_0) - f_2'(x-x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} q(\theta)u_t(\theta, x-\theta)d\theta\Bigg].$$

Вычитая и вводя переменную $x = x_0 - t$, имеем при $x \in [x_0 - t_0, x_0]$

$$q(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\Bigg[w_{tt}(x_0, x_0-x) - w_{xt}(x_0, x_0-x) -$$

$$-f_1''(x_0-x) + f_2'(x_0-x) - \int\limits_{x}^{x_0} q(\theta)u_t(\theta, \theta-x)d\theta\Bigg]$$

Объединяя эти два равенства, получим, что при $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$

$$q(x) = q_0(x) + \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_{x_0}^{x} q(\theta) u_t(\theta, |\theta - x|) d\theta \, \mathrm{sgn}(x_0 - x), \tag{17}$$

где функция

$$q_0(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \big[- f_1''(|x - x_0|) - f_2'(|x - x_0|) \, \mathrm{sgn}(x - x_0) +$$
$$+ w_{tt}(x_0, |x - x_0|) + w_{xt}(x_0, |x - x_0|) \, \mathrm{sgn}(x - x_0) \big]$$

непрерывна на отрезке $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, поскольку

$$-f_2'(0) + w_{xt}(x_0, 0) = -f_2'(0) + \psi'(x_0) = 0$$

в силу (14).

Рассмотрим в $\Delta(x_0, t_0)$ равенства (6), (10) и (17). Они определяют систему трех нелинейных интегральных уравнений относительно функций $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ и $q(x)$. Докажем, используя принцип сжимающих отображений, что эта система имеет единственное решение в $\Delta(x_0, t_1)$, где t_1 — достаточно малое положительное число, такое, что $t_1 \in (0, t_0]$.

Рассмотрим на множестве $\Delta(x_0, t_0)$ пространство $\bar{C}(\Delta(x_0, t_0))$ вектор-функций $\bar{g}(x,t) = \{g_1(x,t), g_2(x,t), g_3(x,t)\}$, где $g_1(x,t) = u(x,t)$, $g_2(x,t) = u_t(x,t)$, $g_3(x,t) = q(x)$, с нормой $\|g(x)\|(t_0) = \max_{1 \leqslant k \leqslant 3} \max_{(x,t) \in \Delta(x_0,t_0)} |g_k(x,t)|$. Определим на $\bar{C}(\Delta(x_0, t_0))$ оператор $A = \{A_1, A_2, A_3\}$, где операторы A_i определяются равенствами (6), (10), (17) соответственно:

$$A_1 \bar{g} = w(x,t) - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g_3(\xi) g_1(\xi, \tau) d\xi \, d\tau,$$

$$A_2 \bar{g} = w_t(x,t) - \frac{1}{2} \int\limits_x^{x+t} g_3(\theta) g_1(\theta, x+t-\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x} g_3(\theta) g_1(\theta, \theta+t-x) d\theta, \tag{18}$$

$$A_3 \bar{g} = q_0(x) + \frac{\mathrm{sgn}(x_0 - x)}{\varphi(x)} \int\limits_{x_0}^{x} g_3(\theta) g_2(\theta, |\theta - x|) d\theta.$$

Систему уравнений (6), (10) и (17) с учетом сделанных обозначений можно записать в виде нелинейного операторного уравнения

$$\bar{g} = A \bar{g}. \tag{19}$$

Введем вектор-функцию $\bar{g}_0(x,t) = \{w(x,t), w_t(x,t), q_0(x)\}$ и рассмотрим в пространстве $\bar{C}(\Delta(x_0,t_1))$, где $t_1 \in (0,t_0]$, множество

$$G(t_1) = \{\bar{g}(x,t) \in \bar{C}(\Delta(x_0,t_1)),\ \|\bar{g} - \bar{g}_0\|(t_1) \leqslant \|\bar{g}_0\|(t_0)\}.$$

Покажем, что при достаточно малых t_1 оператор A отображает множество $G(t_1)$ в себя. Очевидно, что $\|\bar{g}_0\|(t_1) \leqslant \|\bar{g}_0\|(t_0)$ при $t_1 \leqslant t_0$. Тогда из определения множества $G(t_1)$ следует, что для любого элемента этого множества справедлива оценка

$$\|\bar{g}\|(t_1) \leqslant \|\bar{g} - \bar{g}_0\|(t_1) + \|\bar{g}_0\|(t_1) \leqslant 2\|\bar{g}_0\|(t_0).$$

Из этого неравенства, формул (18) и условия $|\varphi(x)| \geqslant \alpha > 0$ для $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$, следует, что если $\bar{g} \in G(t_1)$, то для $(x,t) \in \Delta(x_0,t_1)$ выполнены неравенства

$$|A_1\bar{g} - w(x,t)| \leqslant 2(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 \int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} d\xi\, d\tau \leqslant 2(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 t_1^2,$$

$$|A_2\bar{g} - w_t(x,t)| \leqslant 2(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 \int\limits_{x-t}^{x+t} d\theta \leqslant 4(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 t_1,$$

$$|A_3\bar{g} - q_0(x)| \leqslant \frac{4(\|g_0\|(t_0))^2}{\alpha} \int\limits_{x_0}^{x} d\theta \leqslant 4(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 \frac{t_1}{\alpha}.$$

Объединяя эти неравенства, получим

$$\|A\bar{g} - \bar{g}_0\|(t_1) \leqslant 4(\|\bar{g}_0\|(t_0))^2 \max\left\{\frac{1}{2}t_1^2, t_1, \frac{t_1}{\alpha}\right\}.$$

Из этого неравенства и определения множества $G(t_1)$ следует, что для $t_1 \in (0,t_0]$, таких, что

$$\max\left\{\frac{1}{2}t_1^2, t_1, \frac{t_1}{\alpha}\right\} < (4\|\bar{g}_0\|(t_0))^{-1}, \tag{20}$$

оператор A отображает множество $G(t_1)$ в себя.

Покажем, что если неравенство (20) выполнено, то оператор A является сжимающим на множестве $G(t_1)$. Действительно, пусть $\bar{g}^1$ и $\bar{g}^2$ — произвольные элементы множества $G(t_1)$. Тогда для любых компонент вектор-функций $\bar{g}^1 = \{g_1^1, g_2^1, g_3^1\}$, $\bar{g}^2 = \{g_1^2, g_2^2, g_3^2\}$ справедливы неравенства

$$|g_k^1 g_s^1 - g_k^2 g_s^2| \leqslant |g_k^1 - g_k^2|\,|g_s^1| + |g_k^2|\,|g_s^1 - g_s^2| \leqslant 4\|\bar{g}_0\|(t_0)\,\|\bar{g}^1 - \bar{g}^2\|(t_1).$$

Из (18) и этих неравенств следует, что

$$\|A\bar{g}^1 - A\bar{g}^2\|(t_1) \leqslant 4\|\bar{g}_0\|(t_0)\,\|\bar{g}^1 - \bar{g}^2\|(t_1)\max\left\{\frac{1}{2}t_1^2, t_1, \frac{t_1}{\alpha}\right\}.$$

Следовательно, если $t_1 > 0$ таково, что выполнено неравенство (20), то оператор A является сжимающим на $G(t_1)$. Тогда, используя принцип сжимающих отображений, получим, что уравнение (19) имеет в $\bar{C}(\Delta(x_0, t_1))$ единственное решение $\{u(x,t), u_t(x,t), q(x)\}$. Следовательно, функции $\{u(x,t), u_t(x,t), q(x)\}$ удовлетворяют уравнениям (6), (10), (17). Так как $u(x,t)$ и $q(x)$ удовлетворяют уравнению (6), то, повторяя доказательство теоремы 5.2.1, получим, что функция $u(x,t) \in C^2(\Delta(x_0,t_1))$ и $u(x,t)$, $q(x)$ удовлетворяют в $\Delta(x_0,t_1)$ уравнению (1), а $u(x,t)$ — условиям (2), (3) при $x \in [x_0 - t_1, x_0 + t_1]$. Из уравнения (17), проводя последовательность обратных преобразований, получим равенства (15) и (16). Следовательно, при $t \in [0, t_1]$ $f_1''(t) = u_{tt}(x_0, t)$ и $f_2'(t) = u_{xt}(x_0, t)$. Интегрируя эти равенства, имеем

$$f_1(t) - f_1(0) - f_1'(0)t = u(x_0,t) - u(x_0,0) - u_t(x_0,0)t,$$
$$f_2(t) - f_2(0) = u_x(x_0,t) - u_x(x_0,0).$$

Учитывая условия (14), получим, что $u(x,t)$ удовлетворяет (4) при $t \in [0, t_1]$. Теорема 5.2.2. доказана.

Замечание 1. Из теоремы 5.2.2 следует, что задание двух дополнительных условий (4) на функцию $u(x,t)$ необходимо для однозначного определения $q(x)$. Действительно, предположим, что функция $q(x)$ однозначно определяется на некотором отрезке $[x_0 - t_2, x_0 + t_2]$, где $t_2 > 0$, только при задании первого условия в (4) $u(x_0,t) = f_1(t)$. Рассмотрим две пары функций $\{f_1(t), f_{21}(t)\}$, $\{f_1(t), f_{22}(t)\}$, удовлетворяющие условиям (14), и такие, что $f_{21}(t) \neq f_{22}(t)$ для $t > 0$. Тогда из теоремы 5.2.2 следует, что существуют решения обратной задачи (1)–(4) $\{q_1(x), u_1(x,t)\}$ и $\{q_2(x), u_2(x,t)\}$, определяемые парами $\{f_1(t), f_{21}(t)\}$, $\{f_1(t), f_{22}(t)\}$ соответственно. В силу нашего предположения $q_1(x) = q_2(x)$ для $x \in [x_0 - t_2, x_0 + t_2]$. Но тогда из теоремы 5.2.1 следует, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ на множестве $\Delta(x_0, t_2)$ и

$$f_{21}(t) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0,t) = f_{22}(t) \quad \text{для} \quad t \in [0, t_2],$$

что противоречит неравенству функций $f_{21}(t)$ и $f_{22}(t)$. Следовательно, первоначальное предположение о возможности однозначного определения $q(x)$ только по одному дополнительному условию неверно.

Замечание 2. Естественность формулировки обратной задачи (1)–(4) как задачи определения пары функций $q(x)$ и $u(x,t)$

еще раз подчеркивается тем, что доказательство теоремы 5.2.2 сводится к исследованию системы нелинейных уравнений для этих функций. Отметим, что от системы трех уравнений (6), (10), (17) для функций $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $q(x)$ можно перейти к системе двух уравнений для $u(x,t)$ и $q(x)$, если в уравнении (17) подставить представление (10) для $u_t(x,t)$.

Более подробно обратная задачи (1)–(4) изучена в [69].

§3. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Одним из методов исследования уравнений в частных производных является метод интегральных преобразований, позволяющий сводить задачи для уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Этот метод может быть использован и для исследования обратных коэффициентных задач для уравнений в частных производных. Приведем пример его применения для анализа одной обратной задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - q(x)u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u_x(\pi,t) = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{4}$$

Будем предполагать, что функции $q(x)$ и $\mu(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$q(x) \in C[0,\pi], \quad q(x) > 0, \quad x \in [0,\pi], \tag{5}$$

$$\mu(t) \in C^2[0,\infty), \quad \mu(0) = \mu'(0) = 0, \quad \mu(t) = 0 \text{ при } t \geqslant t_0, \quad \mu(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \geqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу определения неизвестного коэффициента $q(x)$ в уравнении (1) по дополнительной информации о решении задачи (1)–(4)

$$u(\pi,t) = g(t), \quad t > 0. \tag{7}$$

где $g(t)$ — заданная функция.

Так как при неизвестной функции $q(x)$ решение задачи (1)–(4) $u(x,t)$ также неизвестно, то обратную сформулируем как задачу определения двух функций $q(x)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющих (1)–(4), (7).

Определение. *Решением обратной задачи* (1)–(4), (7) *назовем функции* $q(x)$ *и* $u(x,t)$, *такие, что* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* (5); $u(x,t)$, $u_x(x,t) \in C[0 \leqslant x \leqslant \pi, t \geqslant 0]$, $u_t(x,t)$, $u_{xx}(x,t) \in C[0 < x < \pi, t > 0]$; $q(x)$ *и* $u(x,t)$ *удовлетворяют* (1), $u(x,t)$ *удовлетворяет* (2)–(4), (7).

Докажем теорему единственности решения поставленной обратной задачи с помощью перехода от задачи для уравнения в частных производных (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром и использования результатов, полученных для обратной задачи Штурма–Лиувилля, которая была рассмотрена в гл. III, §3.

Теорема 5.3.1. *Предположим, что функция* $\mu(t)$ *удовлетворяет условиям* (6). *Тогда, если* $q_i(x)$, $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, *— решения обратной задачи* (1)–(4), (7), *то* $q_1(x) = q_2(x)$ *для* $x \in [0,\pi]$ *и* $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ *для* $x \in [0,\pi]$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $q(x)$ и $u(x,t)$ — решение обратной задачи (1)–(4), (7). Так как $\mu(t) = 0$ при $t \geqslant t_0$, то функция $u(x,t)$ для $t \geqslant t_0$ является решением следующей задачи:

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} - q(x)u, && 0 < x < \pi, \ \ t > t_0, \\
&u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, && t \geqslant t_0, \\
&u(x,t_0) = \Psi(x), && 0 \leqslant x \leqslant \pi,
\end{aligned}
$$

где $\Psi(x) \in C^1[0,\pi]$, $\Psi'(0) = \Psi'(\pi) = 0$.

Используя метод разделения переменных [85] для решения этой задачи, получим, что

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \Psi(\xi) y_n(\xi) d\xi \, e^{-\lambda_n (t-t_0)} y_n(x), \tag{8}
$$

где λ_n и $y_n(x)$ — соответственно собственные значения и нормированные собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$
\begin{aligned}
&y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \\
&y'(0) = y'(\pi) = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Покажем, что собственные значения $\lambda_n > 0$ при $n \geqslant 0$. Так как предполагается, что λ_n упорядочены по возрастанию, то достаточно показать, что $\lambda_0 > 0$. Предположим, что это не так. Тогда $q(x) - \lambda_0 > 0$ для $x \in [0,\pi]$. Рассмотрим собственную функцию $y_0(x)$. Так как $y_0(0) \neq 0$, то примем для определенности, что $y_0(0) = a > 0$.

Функция $y_0(x)$ является решением задачи Коши для уравнения (9) с $\lambda = \lambda_0$ и условиями $y_0(0) = a$, $y_0'(0) = 0$. Тогда из неравенства $q(x) - \lambda_0 > 0$ для $x \in [0,\pi]$, следует, что $y_0'(x) > 0$ для $x \in (0,\pi]$.

что противоречит условию $y_0'(\pi) = 0$. Таким образом, $\lambda_n > 0$ для $n \geqslant 0$.

Из положительности собственных значений λ_n и формулы (8) следует, что при $t \to \infty$ $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{xx}(x,t) \to 0$ равномерно на отрезке $[0,\pi]$.

Введем функцию $v(x,p)$, являющуюся преобразованием Лапласа от $u(x,t)$ по переменной t

$$v(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)dt.$$

Из (1)–(4) следует, что для значений комплексного параметра p, таких, что $\operatorname{Re} p > 0$, функция $v(x,p)$ является решением краевой задачи

$$v'' - (q(x) + p)v = 0, \tag{10}$$

$$v'(0,p) = 0, \tag{11}$$

$$v'(\pi,p) = \nu(p), \tag{12}$$

где $\nu(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\mu(t)dt$.

Рассмотрим функцию $w(x,p)$, являющуюся решением задачи Коши для уравнения (10) с начальными условиями

$$w(0,p) = 1, \quad w'(0,p) = 0. \tag{13}$$

Так как $v(x,p)$ и $w(x,p)$ — решения линейного дифференциального уравнения (10) и $v'(0,p) = w'(0,p) = 0$, то они линейно зависимы. Следовательно, $v(x,p) = c(p)w(x,p)$. Тогда из условия (12) имеем $c(p) = \nu(p)/w'(\pi,p)$ и

$$v(x,p) = \frac{\nu(p)w(x,p)}{w'(\pi,p)}. \tag{14}$$

Пусть $q_i(x)$, $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, — решения обратной задачи (1)–(4), (7). Обозначим через $v_i(x,p)$ преобразования Лапласа от $u_i(x,t)$, а через $w_i(x,p)$ — решения задачи Коши для уравнения (10) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (13). Из (7) следует, что $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$. Тогда, используя формулу (14), получим, что для $\operatorname{Re} p > 0$

$$\frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}. \tag{15}$$

Так как функции $w_i(x,p)$ представляют собой решения уравнения (10) с $q(x) = q_i(x)$ и условиями (13), то $w_i(x,p)$ и $w_i'(x,p)$ при фиксированном x как функции комплексной переменной p являются функциями аналитическими во всей комплексной плоскости. Следовательно, функции $w_i(x,p)/w_i'(x,p)$ являются аналитическими во всей комплексной плоскости, за исключением нулей $w_i'(x,p)$, являющихся особыми точками. Из (15) следует, что нули и особые точки функций $w_1(\pi,p)/w_1'(\pi,p)$ и $w_2(\pi,p)/w_2'(\pi,p)$ совпадают. Покажем, что нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_1'(\pi,p)$ не совпадают. Предположим, что это не так и для $p = p_0$

$$w_1(\pi,p_0) = w_1'(\pi,p_0) = 0. \tag{16}$$

Тогда $w_1(x,p_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (10) с $q(x) = q_1(x)$ и начальными условиями (16). Следовательно, $w_1(x,p_0) = 0$ для $x \in [0,\pi]$, что противоречит условию $w_1(0,p_0) = 1$. Таким образом, нули функций $w_1(\pi,p)$, $w_1'(\pi,p)$ не совпадают. Точно так же не совпадают нули функций $w_2(\pi,p)$ и $w_2'(\pi,p)$. Тогда из (15) следует, что все нули функций $w_1(\pi,p)$ и $w_2(\pi,p)$ совпадают и все нули функций $w_1'(\pi,p)$ и $w_2'(\pi,p)$ также совпадают.

Пусть $p = p_0^i$ является нулем функции $w_i(\pi,p)$, $i = 1,2$. Покажем, что $\lambda_0^i = -p_0^i$ является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q_i(x)y = \lambda y, \tag{17}$$
$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{18}$$

Действительно, так как функция $w_i(x,p_0)$ является решением уравнения (10) с $q(x) = q_i(x)$ и $p = p_0^i$, то функция $y_i(x) = w_i(x,p_0^i)$ является решением (17) с $\lambda_0^i = -p_0^i$. Первое краевое условие в (18) для $y_i(x)$ следует из (13), а второе из того, что p_0^i есть ноль функции $w_i(\pi,p)$. Таким образом, $y_i(x)$ является решением (17), (18). Это решение нетривиальное, так как в силу (13) $y_i(0) = w_i(0,p_0^i) = 1$. Следовательно, λ_0^i является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (17), (18). Таким образом, мы показали, что любой ноль функции $w_i(\pi,p)$, взятый со знаком минус, является собственным значением задачи (17), (18). Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Если λ_0^i является собственным значением, а $y_i(x)$ — собственной функцией задачи (17), (18), то $p_0^i = -\lambda_0^i$ есть ноль $w_i(\pi,p)$. Следовательно, существует взаимоодноначное соответствие между нулями $w_i(\pi,p)$ и собственными значениями задачи (17), (18). Точно так же можно показать, что существует такое же взаимоодноначное соответствие между нулями функции $w_i'(\pi,p)$ и собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (17) с краевыми условиями

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \tag{19}$$

Обозначим через λ_n^i, $n = 0,1,\ldots$, собственные значения задач (17), (18), а через μ_n^i — собственные значения задач (17), (19).

Из совпадения нулей $w_1(\pi,p)$ и $w_2(\pi,p)$ следует, что $\lambda_n^1 = \lambda_n^2$, $n = 0,1,\ldots$, а из совпадения нулей функций $w_1'(\pi,p)$ и $w_2'(\pi,p)$ следует, что $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n = 0,1,\ldots$. Таким образом, задачи Штурма-Лиувилля (17), (18) и (17), (19) с функциями $q_1(x)$ и $q_2(x)$ имеют одинаковые собственные значения. Тогда, применяя теорему 3.3.5 о единственности решения обратной задачи Штурма-Лиувилля, получим, что $q_1(x) = q_2(x)$ для $x \in [0,\pi]$.

Докажем, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$. Так как $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$, то $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, являются решениями задачи (1)-(4). Следовательно, их разность $\bar{u}(x,t)$ — решение (1)-(4) с $\bar{\mu}(t) = 0$ для $t \geqslant 0$. Умножив уравнение (1) на $\bar{u}(x,t)$ и проинтегрировав, получим с учетом краевых и начальных условий, что для любого $t > 0$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \left(\bar{u}(\xi,t)\right)^2 d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^\pi \left(\bar{u}_x(\xi,\tau)\right)^2 d\xi\, d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\pi q(\xi)\left(\bar{u}(\xi,\tau)\right)^2 d\xi\, d\tau = 0.$$

Из этого равенства, учитывая положительность $q(x)$, получим $\bar{u}(x,t) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$. Следовательно, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$. Теорема 5.3.1 доказана.

В изученной обратной задаче дополнительное условие (7) задавалось на том же конце отрезка, что и неоднородное граничное условие (3). Рассмотрим теперь такую постановку обратной задачи, в которой дополнительное условие задается на том конце отрезка, где граничное условие однородно. Пусть в качестве дополнительной информации для решения задачи определения $q(x)$ вместо условия (7) задано условие

$$u(0,t) = g_0(t), \quad t > 0. \tag{20}$$

Определение. *Решением обратной задачи* (1)-(4), (20) *назовем функции* $q(x)$ *и* $u(x,t)$, *такие, что* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* (5); $u(x,t), u_x(x,t) \in C[0 \leqslant x \leqslant \pi, t \geqslant 0]$, $u_t(x,t), u_{xx}(x,t) \in C[0 < x < \pi, t > 0]$; $q(x), u(x,t)$ *удовлетворяют* (1), $u(x,t)$ *удовлетворяет* (2)-(4), (20).

Теорема 5.3.2. *Предположим, что функция* $\mu(t)$ *удовлетворяет условиям* (6). *Тогда, если* $q_i(x)$, $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, — *решения обратной задачи* (1)-(4), (20), *такие, что* $q_i(x) = q_i(\pi - x)$, $i = 1,2$, *то* $q_1(x) = q_2(x)$ *для* $x \in [0,\pi]$ *и* $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ *для* $x \in [0,\pi]$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $q(x)$, $u(x,t)$ — решение обратной задачи (1)-(4), (20). Тогда для преобразования Лапласа $v(x,p)$ от функции $u(x,t)$ справедливо представление (14), где $w(x,p)$ определяется так же, как в теореме 5.3.1. Из дополнительного условия (20) следует, что $v_1(0,p) = v_2(0,p)$. Тогда, используя формулу (14) и условия $w_1(0,p) = w_2(0,p) = 1$, получим, что

$$\frac{1}{w_1'(\pi,p)} = \frac{1}{w_2'(\pi,p)}, \tag{21}$$

где $w_i'(x,p)$ — решения задачи Коши для уравнения (10) с $q(x) = q_i(x)$ и начальными условиями (13). Из равенства (21) аналогично доказательству теоремы 5.3.1 получим, что $\mu_n^1 = \mu_n^2$, $n = 0, 1, \ldots$, где μ_n^i — собственные значения задачи (17), (19). Тогда, используя теорему 3.3.6 о единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля для класса потенциалов, симметричных относительно середины отрезка, получим, что $q_1(x) = q_2(x)$.

Равенство $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ доказывается аналогично теореме 5.3.1. Следовательно, теорема 5.3.2 доказана.

Из формул (15) и (21) следует, что обратные задачи (1)–(4), (7) и (1)–(4), (20) отличаются между собой очень сильно. Действительно, из равенства (15) вытекает совпадение всех собственных значений для двух типов краевых условий (18) и (19), а из (21) — равенство собственных значений только для одного краевого условия (19). Проведенный анализ позволяет сделать заключение о том, что информация о неизвестном коэффициенте $q(x)$ существенно зависит от точки наблюдения — дополнительное условие (7) содержит гораздо больше информации о неизвестной функции $q(x)$, чем условие (20).

Рассмотрим теперь обратную задачу для краевой задачи (1)–(4), состоящую в определении неизвестного коэффициента уравнения $q(x)$ и неизвестной функции $\mu(t)$ в краевом условии (3) по дополнительной информации о решении задачи (1)–(4) вида (7). Покажем, что она будет иметь единственное решение, если функция $\mu(t)$ неотрицательна.

Определение. *Решением обратной задачи* (1)–(4), (7) *назовем функции* $q(x)$, $\mu(t)$ *и* $u(x,t)$, *такие, что* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* (5); $\mu(t)$ *удовлетворяет условиям* (6) *и неотрицательна при* $t \geqslant 0$; $u(x,t), u_x(x,t) \in C[0 \leqslant x \leqslant \pi, t \geqslant 0]$, $u_t(x,t), u_{xx}(x,t) \in C[0 < x < \pi, t > 0]$; $q(x)$, $u(x,t)$ *удовлетворяют* (1); $u(x,t)$, $\mu(t)$ *удовлетворяют* (3); $u(x,t)$ *удовлетворяет* (2), (4), (7).

Теорема 5.3.3. *Если* $q_i(x)$, $\mu_i(t)$, $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, — *решения обратной задачи* (1)–(4), (7), *то* $q_1(x) = q_2(x)$ *для* $x \in [0,\pi]$, $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ *для* $t \geqslant 0$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ *для* $x \in [0,\pi]$, $t \geqslant 0$.

Доказательство. Если $q_i(x)$, $\mu_i(t)$, $u_i(x,t)$, $i = 1,2$ — решения обратной задачи (1)–(4), (7), то, проведя преобразования такие же, как в доказательстве теоремы 5.3.1, из условия (7) получим, что

$$\frac{\nu_1(p)w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\nu_2(p)w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}, \tag{22}$$

где функции $w_i(x,p)$ определяются так же, как в теореме 5.3.1, а $\nu_i(p)$ — преобразования Лапласа от функций $\mu_i(t)$.

$$\nu_i(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\mu_i(t)dt.$$

Так как функции $\mu_i(t)$ отличны от нуля на конечном отрезке, то их преобразования Лапласа являются функциями, аналитическими во всей комплексной плоскости, т.е. не имеют особых точек. Так как функции $\mu_i(t)$ неотрицательны и не равны тождественно нулю, то функции $\nu_i(p) > 0$ для всех действительных p. Таким образом, функции $\nu_i(p)$ не имеют на действительной оси ни особых точек, ни нулей. Тогда, так же, как в доказательстве теоремы 5.3.1, из равенства (22) следует, что совпадают нули функций $w_1(\pi, p)$ и $w_2(\pi, p)$, а также нули функций $w_1'(\pi, p)$ и $w_2'(\pi, p)$ и, следовательно, $q_1(x) = q_2(x)$ для $x \in [0, \pi]$. Тогда функция $w_1(x, p) = w_2(x, p)$ и из равенства (22) следует, что $\nu_1(p) = \nu_2(p)$ для всех p. Из равенств преобразований Лапласа следует равенство функций $\mu_1(t) = \mu_2(t)$, $t \geqslant 0$, а из равенств $q_1(x) = q_2(x)$, $\mu_1(t) = \mu_2(t)$ следует, что $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ для $x \in [0, \pi]$, $t \geqslant 0$. Теорема доказана.

Изложенные результаты представляют собой один из примеров исследования обратных коэффициентных задач для уравнений в частных производных с помощью сведения их к обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Одной из первых работ, выполненных в этом направлении, была работа [77]. В дальнейшем подобный метод исследования обратных задач для уравнений в частных производных применялся целым рядом авторов (см., например, [1, 9, 11, 24, 46, 47, 68]).

§4. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ РЕШЕНИЯ

Нелинейные уравнения в частных производных интенсивно используются для описания различных процессов. Как правило, эти уравнения содержат коэффициенты, зависящие от решения. В связи с этим при исследовании целого ряда процессов возникают задачи определения неизвестных, зависящих от решения, коэффициентов уравнения в частных производных.

Рассмотрим математическую модель процесса поглощения газа, проходящего по тонкой трубке, поглощающим веществом (сорбентом), расположенным в этой трубке:

$$u_x + a_t = 0, \quad 0 < x < l, \ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$a_t = \varphi(u) - a, \quad 0 < x < l, \ 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{4}$$

Здесь $u(x, t)$ — концентрация газа в порах сорбента, $a(x, t)$ — в сорбенте, $\mu(t)$ — концентрация газа в начале трубки, $\varphi(\xi)$ — функция, характеризующая поглощающие свойства сорбента.

Одной из важных обратных задач, возникающих при исследовании подобных процессов, является задача определения функции

$\varphi(\xi)$ по измерению концентрации газа в некоторой точке. Эта задача может быть сформулирована следующим образом. Заданы функции $\mu(t)$ и

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Требуется определить функции $\varphi(u(x,t))$, $u(x,t)$, $a(x,t)$, удовлетворяющие условиям (1)–(5).

Прежде чем исследовать поставленную обратную задачу, изучим вопрос о существовании и единственности решения задачи (1)–(4) в предположении, что функции $\mu(t)$ и $\varphi(\xi)$ известны. Предположим, что функции $\mu(t)$ и $\varphi(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu(t) \in C^1[0,T]; \quad \mu'(t) > 0, \quad t \in (0,T]; \quad \mu(0) = 0; \tag{6}$$

$$\varphi(\xi) \in C^1(-\infty,+\infty); \quad 0 < \varphi'(\xi) \leqslant \varphi_0, \quad \xi \in (-\infty,+\infty); \quad \varphi(0) = 0. \tag{7}$$

где φ_0 — положительная постоянная.

Обозначим через $Q_{l\tau}$, $\tau \in (0,T]$ множество

$$Q_{l\tau} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}.$$

Теорема 5.4.1. *Предположим, что функции $\mu(t)$ и $\varphi(\xi)$ удовлетворяют условиям* (6) *и* (7) *соответственно. Тогда существует единственная пара функций $u(x,t)$, $a(x,t) \in C^1[Q_{lT}]$, удовлетворяющих* (1)–(4).

Доказательство. Пусть функции $u(x,t)$, $a(x,t) \in C^1[Q_{lT}]$ удовлетворяют (1)–(4). Тогда, интегрируя уравнение (2) с условием (4), получим

$$a(x,t) = \int_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi(u(x,\tau))d\tau. \tag{8}$$

Из (1), (2), (8) имеем уравнение для $u(x,t)$

$$u_x(x,t) + \varphi(u(x,t)) = \int_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi(u(x,\tau))d\tau.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая условие (3), получим интегральное уравнение для функции $u(x,t)$

$$u(x,t) = \mu(t) - \int_0^x \varphi(u(\xi,t))d\xi + \int_0^x \int_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi(u(\xi,\tau))d\tau\, d\xi. \tag{9}$$

Покажем, что это нелинейное интегральное уравнение имеет единственное решение $u(x,t) \in C[Q_{lT}]$. Рассмотрим на множестве Q_{lT} последовательность непрерывных функций

$$u_n(x,t) = \mu(t) - \int\limits_0^x \varphi(u_{n-1}(\xi,t))d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi(u_{n-1}(\xi,\tau))d\tau\, d\xi, \quad n \geqslant 1,$$

$$u_0(x,t) = 0.$$

Докажем, используя метод математической индукции, что в Q_{lT} для всех $n \geqslant 1$

$$|u_n(x,t) - u_{n-1}(x,t)| \leqslant \frac{\mu(T)2^{n-1}\varphi_0^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{10}$$

Из свойств функций $\mu(t)$ и $\varphi(\xi)$ следует, что эта оценка выполнена при $n = 1$. Предположим, что она справедлива при $n = m$. Докажем (10) для $n = m+1$. Так как

$$|u_{m+1}(x,t) - u_m(x,t)| \leqslant \int\limits_0^x |\varphi(u_m(\xi,t)) - \varphi(u_{m-1}(\xi,t))|d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^t \exp(-(t-\tau))|\varphi(u_m(\xi,\tau)) - \varphi(u_{m-1}(\xi,\tau))|d\tau\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_0 \int\limits_0^x |u_m(\xi,\tau) - u_{m-1}(\xi,\tau)|d\xi +$$

$$+\varphi_0 \int\limits_0^x \int\limits_0^t \exp(-(t-\tau))|u_m(\xi,\tau) - u_{m-1}(\xi,\tau)|d\tau\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu(T)2^{m-1}\varphi_0^m x^m}{m!} + \frac{\mu(T)2^{m-1}\varphi_0^m x^m}{m!}(1-e^{-t}) \leqslant \frac{\mu(T)2^m\varphi_0^m x^m}{m!},$$

то оценка (10) справедлива при любом $n \geqslant 1$.

Из оценки (10) следует, что последовательность функций $u_n(x,t)$ равномерно на Q_{lT} сходится к непрерывной в Q_{lT} функции $u(x,t)$, являющейся решением уравнения (9). Определим непрерывную в Q_{lT} функцию $a(x,t)$ с помощью равенства (8). Из (8), (9) и свойств функции $\varphi(\xi)$ следует, что в Q_{lT} существуют непрерывные производные $u_x(x,t)$, $a_t(x,t)$ и функции $u(x,t)$, $a(x,t)$ удовлетворяют (1)–(4).

Единственность решения задачи (1)–(4) легко следует из уравнения (9). Действительно, если $u_i(x,t)$, $a_i(x,t)$, $i=1,2$, — решения задачи (1)–(4), то из уравнения (9) получим оценку для разности функций $u_1(x,t)-u_2(x,t)=v(x,t)$ в Q_{lT}

$$|v(x,t)| \leqslant \varphi_0 \int_0^x |v(\xi,t)|d\xi + \varphi_0 \int_0^x \int_0^t \exp(-(t-\tau))|v(\xi,\tau)|d\tau\, d\xi.$$

Пусть $v_0(x)=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|v(x,t)|$, тогда

$$v_0(x) \leqslant \varphi_0 \int_0^x v_0(\xi)d\xi + \varphi_0 \int_0^x v_0(\xi)d\xi(1-e^{-t}) \leqslant 2\varphi_0 \int_0^x v_0(\xi)d\xi.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим, что $v_0(x)=0$ для $x\in[0,l]$, а значит, и $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ в Q_{lT}. Тогда из (8) следует, что $a_1(x,t)=a_2(x,t)$ в Q_{lT}.

Докажем, что функции $u(x,t)$, $a(x,t)\in C^1[Q_{lT}]$. Из непрерывности $u(x,t)$ в Q_{lT}, условий (7) и уравнений (8), (9) следует, что $u_x(x,t)$, $a_t(x,t)$ и $a_x(x,t)\in C[Q_{lT}]$. Следовательно, нам достаточно показать, что в Q_{lT} существует непрерывная $u_t(x,t)$. Из (8), (9) имеем

$$u(x,t)=\mu(t)-\int_0^x \varphi(u(\xi,t))d\xi + \int_0^x a(\xi,t)d\xi. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию $v(x,t,\Delta t)=(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))/\Delta t$. Так как

$$\varphi(u(\xi,t+\Delta t))-\varphi(u(\xi,t))=p(\xi,t,\Delta t)(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)),$$

где

$$p(\xi,t,\Delta t)=\int_0^1 \varphi'(u(\xi,t)+\theta(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)))d\theta,$$

то из (11) следует, что функция $v(x,t,\Delta t)$ удовлетворяет уравнению

$$v(x,t,\Delta t)=\mu_0(t,\Delta t)-\int_0^x p(\xi,t,\Delta t)v(\xi,t,\Delta t)d\xi+\int_0^x a_0(\xi,t,\Delta t)d\xi, \tag{12}$$

где

$$\mu_0(t,\Delta t)=\frac{\mu(t+\Delta t)-\mu(t)}{\Delta t},\quad a_0(\xi,t,\Delta t)=\frac{a(\xi,t+\Delta t)-a(\xi,t)}{\Delta t}.$$

Решение интегрального уравнения (12) можно выписать в явном виде

$$v(x,t,\Delta t)=\mu_0(t,\Delta t)\exp\left\{-\int\limits_0^x p(s,t,\Delta t)ds\right\}+$$
$$+\int\limits_0^x \exp\left\{-\int\limits_\xi^x p(s,t,\Delta t)ds\right\}a_0(\xi,t,\Delta t)d\xi.$$

Предел выражения, стоящего в правой части этого равенства, при $\Delta t\to 0$ существует. Следовательно, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим, что

$$u_t(x,t)=\mu'(t)\exp\left\{-\int\limits_0^x \varphi'(u(s,t))ds\right\}+$$
$$+\int\limits_0^x \exp\left\{-\int\limits_\xi^x \varphi'(u(s,t))ds\right\}a_t(\xi,t)d\xi.$$

Теорема 5.4.1 доказана.

Установим некоторые свойства решения задачи (1)–(4), необходимые для исследования обратной задачи.

Теорема 5.4.2. *Предположим, что функции $\mu(t)$ и $\varphi(\xi)$ удовлетворяют условиям* (6) *и* (7) *соответственно. Тогда, если $u(x,t)$, $a(x,t)$ — решение задачи* (1)–(4), *то*

$$u_t(x,t)>0,\quad a_t(x,t)>0 \text{ для } 0\leqslant x\leqslant l,\quad 0<t\leqslant T, \tag{13}$$

и для любого $\tau\in(0T]$

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\mu(\tau),\quad 0\leqslant a(x,t)\leqslant\varphi(\mu(\tau)),\quad (x,t)\in Q_{l\tau}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$, $a(x,t)$ — решение задачи (1)–(4). Так как $u(x,t)$, $a(x,t)\in C^1[Q_{lT}]$, то из (1), (2) следует, что $a_{tt}(x,t)$, $u_{xt}(x,t)\in C[Q_{lT}]$. Обозначим через $v(x,t)=u_t(x,t)$ и $w(x,t)=a_t(x,t)$. Функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ являются решением задачи

$$v_x+w_t=0,\qquad (x,t)\in Q_{lT}, \tag{15}$$
$$w_t=\varphi'(u)v-w,\qquad (x,t)\in Q_{lT}, \tag{16}$$
$$v(0,t)=\mu'(t),\qquad 0<t\leqslant T, \tag{17}$$
$$w(x,0)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{18}$$

Интегрируя уравнение (16) с условием (18), получим

$$w(x,t) = \int_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi'(u(x,\tau))v(x,\tau)d\tau, \tag{19}$$

из (15), (16), (19) имеем

$$v_x + \varphi'(u)v = \int_0^t \exp(-(t-\tau))\varphi'(u(x,\tau))v(x,\tau)d\tau.$$

Интегрируя это уравнение с условием (17), получим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции $v(x,t)$

$$v(x,t) = \mu'(t)\exp\left\{-\int_0^x \varphi'(u(s,t))ds\right\} + \tag{20}$$

$$+\int_0^x\int_0^t \exp\left\{-\int_\xi^x \varphi'(u(s,t))ds - (t-\tau)\right\}\varphi'(u(\xi,\tau))v(\xi,\tau)d\xi\, d\tau.$$

Решение этого уравнения может быть записано в явном виде с помощью резольвенты $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ уравнения (20)

$$v(x,t) = f(x,t) + \int_0^x\int_0^t \Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\tau\, d\xi, \tag{21}$$

где $f(x,t) = \mu'(t)\exp\left(-\int_0^x \varphi'(u(s,t))ds\right)$.

Так как ядро уравнения (20)

$$\exp\left\{-\int_\xi^x \varphi'(u(s,t))ds - (t-\tau)\right\}\varphi'(u(\xi,\tau))$$

положительно, то $\Gamma(x,t,\xi,\tau) \geqslant 0$ для $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Тогда, учитывая, что $f(x,t) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 < t \leqslant T$, из формулы (21) получим, что $v(x,t) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant T$. Следовательно, первое неравенство из (13) доказано. Положительность $a_t(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant T$ следует из положительности $u_t(x,t)$ и формулы (19).

Докажем неравенства (14). Из (13) и уравнения (1) следует, что $u_x(x,t) < 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant T$, а из (9) $u(x,0) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$.

Тогда из положительности $u_t(x,t)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant T$ следует, что для любого $\tau > 0$ в $Q_{l\tau}$ выполнено неравенство $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \mu(\tau)$. Из этого неравенства, свойств функции $\varphi(\xi)$ и формулы (8) следует, что в Q_{lT} $0 \leqslant a(x,t) \leqslant \varphi(\mu(\tau))$. Теорема 5.4.2 доказана.

Перейдем теперь к исследованию обратной задачи (1)–(5).

Определение. *Функции $\varphi(\xi)$, $u(x,t)$, $a(x,t)$ назовем решением обратной задачи* (1)–(5), *если $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условиям* (7) *и $\varphi(\xi) \in C^2[0,\mu(T)]$; $u(x,t), a(x,t) \in C^1[Q_{lT}]$; $\varphi(u(x,t))$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$ удовлетворяют* (1)–(5).

Докажем вначале теорему единственности решения обратной задачи в предположении аналитичности функции $\varphi(\xi)$.

Теорема 5.4.3. *Пусть функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию* (6). *Если $\varphi_i(\xi)$, $u_i(x,t)$, $a_i(x,t)$, $i = 1,2$, — решения обратной задачи* (1)–(5) *и функции $\varphi_i(\xi)$ аналитичны на интервале, содержащем отрезок $[0,\mu(T)]$, то $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ в Q_{lT}.*

Доказательство. Введем следующие функции:

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t), \quad w(x,t)=a_1(x,t)-a_2(x,t), \quad \alpha(\xi)=\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi).$$

Разность $\varphi_1(u_1(x,t)) - \varphi_2(u_2(x,t))$ можно представить следующим образом: $\varphi_1(u_1(x,t)) - \varphi_2(u_2(x,t)) = \varphi_1(u_1(x,t)) - \varphi_2(u_1(x,t)) + \varphi_2(u_1(x,t)) - \varphi_2(u_2(x,t))$. Следовательно,

$$\varphi_1(u_1(x,t)) - \varphi_2(u_2(x,t)) = \alpha(u_1(x,t)) + p(x,t)v(x,t),$$

где

$$p(x,t) = \int_0^1 \varphi_2'(u_2(x,t) + \theta(u_1(x,t) - u_2(x,t)))d\theta.$$

Так как функции $\varphi_i(u_i(x,t))$, $u_i(x,t)$, $a_i(x,t)$, $i = 1,2$, удовлетворяют (1)–(4), то функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ являются решением задачи

$$v_x + w_t = 0, \qquad (x,t) \in Q_{lT}, \tag{22}$$

$$w_t = p(x,t)v + \alpha(u_1(x,t)) - w, \qquad (x,t) \in Q_{lT}, \tag{23}$$

$$v(0,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{24}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{25}$$

Интегрируя уравнение (23) с условием (25), имеем

$$w(x,t) = \int_0^t \exp(-(t-\tau))p(x,\tau)v(x,\tau)d\tau + \int_0^t \exp(-(t-\tau))\alpha(u_1(x,\tau))d\tau. \tag{26}$$

Используя это представление, уравнения (22), (23), получим

$$v_x + p(x,t)v = -\alpha(u_1(x,t)) + \int_0^t \exp(-(t-\tau))\alpha(u_1(x,\tau))d\tau +$$

$$+ \int_0^t \exp(-(t-\tau))p(x,\tau)v(x,\tau)d\tau.$$

Интегрируя это уравнение с условием (24), получим для функции $v(x,t)$ интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$v(x,t) = -\int_0^x \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds\right)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds - (t-\tau)\right)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\tau\, d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds - (t-\tau)\right)p(\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\tau\, d\xi \qquad (27)$$

с ядром

$$K(x,t,\xi,\tau) = \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds - (t-\tau)\right)p(\xi,\tau),$$

непрерывным и положительным при $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Обозначим через $R(x,t,\xi,\tau)$ резольвенту уравнения (27). Тогда решение этого уравнения

$$v(x,t) = -\int_0^x \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds\right)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t \exp\left(-\int_\xi^x p(s,t)ds - (t-\tau)\right)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\tau\, d\xi -$$

$$-\int_0^x\int_0^t R(x,t,\xi,\tau)\int_0^\xi \exp\left(-\int_\eta^\xi p(s,\tau)ds\right)\alpha(u_1(\eta,\tau))d\eta\, d\tau\, d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t R(x,t,\xi,\tau)\int_0^\xi\int_0^\tau \exp\left(-\int_\eta^\xi p(s,\tau)ds - (\tau-\theta)\right)\alpha(u_1(\eta,\theta))d\theta\, d\eta\, d\tau\, d\xi. \qquad (28)$$

Так как ядро $K(x,t,\xi,\tau)$ непрерывно и положительно, то резольвента $R(x,t,\xi,\tau)$ непрерывна и положительна при $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Рассмотрим функцию $\alpha(\xi)$. Так как $\varphi_i(\xi)$, $i = 1,2$, аналитические на интервале, содержащем отрезок $[0,\mu(T)]$, то либо $\alpha(\xi) = 0$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$, либо существует $\xi_0 > 0$, такое, что $|\alpha'(\xi)| > 0$ для $\xi \in (0,\xi_0]$. Покажем, что второй вариант невозможен. Предположим, что существует $\xi_0 > 0$, такое, что $|\alpha'(\xi)| > 0$ для $\xi \in (0,\xi_0]$. Пусть для определенности, $\alpha'(\xi) > 0$ для $\xi \in (0,\xi_0]$, тогда и $\alpha(\xi) > 0$ для $\xi \in (0,\xi_0]$.

Обозначим через t_0 корень уравнения $\mu(t) = \xi_0$, если $\xi_0 \leqslant \mu(T)$, в противном случае положим $t_0 = T$. Из неравенств (13), (14) для функции $u_1(x,t)$ следует, что для $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant t_0$

$$0 < u_1(x,t) \leqslant \mu(t_0) = \xi_0,$$

а значит, для этих x и t $\alpha(u_1(x,t)) > 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(x,t) = -\int\limits_0^x \exp\left(-\int\limits_\xi^x p(s,t)ds\right)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi +$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_\xi^x p(s,t)ds - (t-\tau)\right)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\tau\, d\xi$$

для $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant t_0$. Так как функция $\alpha(\xi)$ монотонно возрастает на $[0,\xi_0]$, то, учитывая неравенство (13) для функции $u_1(x,t)$, получим, что $f(x,t) < 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant t_0$. Тогда, учитывая положительность $R(x,t,\xi,\tau)$, из формулы (28) имеем $v(x,t) < 0$ для $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t \leqslant t_0$. Но так как $u_i(x,t)$ удовлетворяют (5), то $v(l,t) = 0$ для $0 < t \leqslant t_0$. Полученное противоречие доказывает, что $\alpha(\xi) = 0$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$. Следовательно, $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$. Так как в Q_{lT} справедливо неравенство $0 \leqslant u_1(x,t) \leqslant \mu(T)$, то из (28) следует, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в Q_{lT}. Тогда из (26) получим, что $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ в Q_{lT}. Теорема 5.4.3 доказана.

В теореме 5.4.3 предполагалось, что функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ аналитические. Покажем, что теорему единственности решения обратной задачи (1)–(5) можно доказать без этого условия, но, предполагая, что $\varphi(\xi)$ известна для сколь угодно малых положительных значений аргумента.

Теорема 5.4.4. *Предположим, что функция $\mu(t)$ удовлетворяет условиям* (6). *Пусть $\varphi_i(\xi)$, $u_i(x,t)$, $a_i(x,t)$, $i = 1,2$, — решения обратной задачи* (1)–(5) *и существует $\xi_0 > 0$, такое, что $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in [0,\xi_0]$. Тогда $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ в Q_{lT}.*

Доказательство. Рассмотрим формулу (28) для функции $v(x,t)$. Введем функции

$$h(x,\xi,t) = \exp\left(-\int\limits_{\xi}^{x} p(s,t)ds\right),$$

$$q(x,\xi,t,\tau) = h(x,\xi,t)\exp(-(t-\tau)).$$

Положив в (28) $x = l$, получим, что при $t \in [0,T]$

$$\int\limits_0^l h(l,\xi,t)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi - \int\limits_0^l\int\limits_0^t q(l,\xi,t,\tau)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\tau\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^l\int\limits_0^t R(l,t,\xi,\tau)\int\limits_0^{\xi} h(\xi,\eta,\dot{\tau})\alpha(u_1(\eta,\tau))d\eta\, d\tau\, d\xi -$$

$$- \int\limits_0^l\int\limits_0^t R(l,t,\xi,\tau)\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\tau} q(\xi,\eta,\tau,\theta)\alpha(u_1(\eta,\ \ ))d\theta\, d\eta\, d\tau\, d\xi = 0,$$

так как $v(l,t) = 0$ для $t \in [0,T]$. Изменив в последних двух интегралах порядок интегрирования и введя функцию

$$B(\xi,t,\tau) = q(l,\xi,t,\tau) - \int\limits_{\xi}^{l} h(\eta,\xi,\tau)R(l,t,\eta,\tau)d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{l}\int\limits_{\tau}^{t} q(\eta,\xi,\theta,\tau)R(l,t,\eta,\theta)d\theta\, d\eta,$$

получим, что при $t \in [0,T]$

22

$$\int\limits_0^l h(l,\xi,t)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi - \int\limits_0^t\int\limits_0^l B(\xi,t,\tau)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\xi\, d\tau = 0. \qquad (29)$$

Докажем, что из этого уравнения и условий теоремы следует, что $\alpha(\xi) = 0$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$. Обозначим через T_0 корень уравнения $\mu(t) = \xi_0$ в случае $\mu(T) > \xi_0$. В случае $\xi_0 \geqslant \mu(T)$ утверждение доказано. Из неравенства (14) следует, что в Q_{lT_0} выполнено неравенство $0 \leqslant u_1(x,t) \leqslant \mu(T_0) = \xi_0$. Так как по условию теоремы

$\alpha(\xi) = 0$ для $\xi \in [0, \xi_0]$, то $\alpha(u_1(x,t)) = 0$ в Q_{lT_0}. Тогда из (29) имеем, что для $t \in [T_0, T]$

23

$$\int_0^t h(l,\xi,t)\alpha(u_1(\xi,t))d\xi - \int_{T_0}^t \int_0^l B(\xi,t,\tau)\alpha(u_1(\xi,\tau))d\xi\, d\tau = 0. \qquad (30)$$

Из неравенства (13) и уравнения (1) следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,t) < 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \;\; T_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Учитывая это, сделаем замену переменных в интегралах, входящих в (30), $z = u_1(\xi, t)$, $\xi = u_1^{-1}(z,t)$. В результате, учитывая равенства (3) и (5) для функции $u_1(x,t)$, получим, что для $t \in [T_0, T]$

24

$$\int_{g(t)}^{\mu(t)} H(z,t)\alpha(z)dz - \int_{T_0}^t \int_{g(\tau)}^{\mu(\tau)} B_0(z,t,\tau)\alpha(z)dz\, d\tau = 0, \qquad (31)$$

где

$$H(z,t) = \frac{h(l, u_1^{-1}(z,t), t)}{\frac{\partial u_1}{\partial x}(u_1^{-1}(z,t),t)},$$

$$B_0(z,t,\tau) = \frac{B(u_1^{-1}(z,\tau),t,\tau)}{\frac{\partial u_1}{\partial x}(u_1^{-1}(z,\tau),t)}.$$

Из (13) следует, что функция $g(t)$ является монотонно возрастающей. Рассмотрим число $T_1 \in (T_0, T]$, являющееся корнем уравнения $g(t) = \mu(T_0) = \xi_0$ при $g(T) > \mu(T_0)$ или равное T при $g(T) \leqslant \mu(T_0)$. Так как $\alpha(z) = 0$ для $z \in [0, \mu(T_0)]$, то для $t \in [T_0.T_1]$ (31) можно записать в виде

$$\int_{\mu(T_0)}^{\mu(t)} H(z,t)\alpha(z)dz - \int_{T_0}^t \int_{\mu(T_0)}^{\mu(\tau)} B_0(z,t,\tau)\alpha(z)\, dz\, d\tau = 0.$$

Поменяв во втором интеграле порядок интегрирования и введя переменную $\theta = \mu(t)$, получим интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода для функции $\alpha(z)$

25

$$\int_{\mu(T_0)}^{\theta} Q(z.\theta)\alpha(z)dz = 0, \quad \theta \in [\mu(T_0).\mu(T_1)]. \qquad (32)$$

где

$$Q(z,\theta) = H(z,\mu^{-1}(\theta)) - \int\limits_{\mu^{-1}(z)}^{\mu^{-1}(\theta)} B_0(z,\mu^{-1}(\theta),\tau)d\tau.$$

Ядро уравнения (32) при $z = \theta$ равно $H(\theta,\mu^{-1}(\theta))$. Из определения функции $H(z,t)$ следует, что $Q(\theta,\theta) < 0$ при $\theta \in [\mu(T_0),\mu(T_1)]$. Из определения функции $H(z,t)$ и $B_0(z,t,\tau)$ следует, что при $\mu(T_0) \leqslant z \leqslant \theta \leqslant \mu(T_1)$ существует непрерывная частная производная $Q_\theta(z,\theta)$. Тогда, дифференцируя уравнение (32), получим однородное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции $\alpha(z)$. Следовательно, $\alpha(z) = 0$ для $z \in [\mu(T_0),\mu(T_1)]$ и $\alpha(z) = 0$ для $z \in [0,\mu(T_1)]$.

Рассмотрим число $T_2 \in (T_1,T]$, являющееся корнем уравнения $g(t) = \mu(T_1)$ при $g(T) > \mu(T_1)$ или равное T при $g(T) \leqslant \mu(T_1)$. Тогда аналогично предыдущему получим, что $\alpha(z) = 0$ для $z \in [\mu(T_1),\mu(T_2)]$ и $\alpha(z) = 0$ для $z \in [0,\mu(T_2)]$. В результате, повторив конечное число раз подобные рассуждения, получим, что $\alpha(z) = 0$ для $z \in [0,\mu(T)]$. Следовательно, $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$ для $\xi \in [0,\mu(T)]$, из (28) и (26) имеем $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ в Q_{lT}. Теорема 5.4.4 доказана.

З а м е ч а н и е. Обратная задача (1)–(5) представляет собой задачу определения зависящего от решения коэффициента гиперболического уравнения. Действительно, если $u(x,t)$, $a(x,t)$ — решения задачи (1)–(4), то функция $u(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&u_{xt} + \varphi'(u)u_t + u_x = 0, && 0 \leqslant x \leqslant l,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&u(0,t) = \mu(t), && 0 \leqslant t \leqslant T,\\
&u(x,0) = 0, && 0 \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned}$$

Таким образом, обратная задача состоит в определении коэффициента $\varphi'(u)$ по дополнительной информации $u(l,t) = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Задача (1)–(4) представляет собой достаточно простую модель процесса сорбции. Обратные задачи для более сложных моделей рассмотрены в [27, 28].

Наряду с обратными задачами, возникающими при анализе сорбционных процессов, важный класс обратных задач, в которых неизвестный коэффициент зависит от решения, образуют задачи, связанные с исследованием тепловых процессов. Зависимость теплофизических коэффициентов от температуры, как правило, необходимо учитывать при достаточно высоких температурах. Примером уравнения, описывающего процессы такого типа, является квазилинейное уравнение теплопроводности

$$c(u(x,t))u_t = (k(u(x,t))u_x)_x + f(u(x,t)) \tag{33}$$

с коэффициентами, зависящими от решения.

Для этого уравнения можно ставить обратные задачи, состоящие в определении коэффициентов уравнения по дополнительной информации о решении некоторой краевой задачи для уравнения (33). Исследованию задач такого типа посвящены работы [17, 34, 36, 60, 100] и ряд других. Достаточно подробный обзор этих обратных задач имеется, например, в [2].

Глава VI

ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ИНТЕГРАЛОВ

В предыдущих главах были рассмотрены обратные задачи для дифференциальных уравнений. Эта глава посвящена обратным задачам другого типа. В них требуется восстановить функцию одной или нескольких переменных по семейству интегралов от этой функции.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЕ ИНТЕГРАЛОВ. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

При анализе различных прикладных проблем, а также в ряде теоретических исследований возникает задача определения функции $f(x)$ по значениям ее интегралов

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная система функций.

В том случае, когда система функций $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной системой в пространстве $L_2[a, b]$, задача определения $f(x)$ из равенств (1) представляет собой задачу восстановления функции по ее коэффициентам Фурье μ_n. Из общей теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве [37] следует, что для любой последовательности $\{\mu_n\} \in l_2$ существует единственная функция $f(x) \in L_2[a, b]$, такая, что равенства (1) выполнены при всех натуральных n и имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2[a,b]} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2.$$

Таким образом, если поставленную задачу сформулировать как задачу решения операторного уравнения $Af = \{\mu_n\}$, где оператор A, определяемый равенствами (1), действует из пространства $L_2[a, b]$ в l_2, то задача решения этого уравнения является корректной. Действительно, решение уравнения существует и единственно для любой правой части $\{\mu_n\} \in l_2$, а непрерывная зависимость $f(x)$ от $\{\mu_n\}$ следует из равенства Парсеваля.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор A предполагается действующим из пространства $C[a,b]$ в l_2, т.е. ищется непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая равенствам (1). Эта задача является некорректной. Действительно, задача имеет решение не для любой последовательности чисел $\{\mu_n\} \in l_2$. Для того чтобы доказать это, достаточно взять функцию $\bar{f}(x) \in L_2[a,b]$, но не являющуюся непрерывной на отрезке $[a,b]$. Соответствующая ей последовательность коэффициентов Фурье $\{\bar{\mu}_n\} \in l_2$. Из единственности решения задачи определения функции по ее коэффициентам Фурье следует, что для последовательности $\{\bar{\mu}_n\} \in l_2$ не существует непрерывной на $[a,b]$ функции $\bar{f}(x)$, такой, что последовательность $\{\bar{\mu}_n\}$ является ее коэффициентами Фурье. Таким образом, корректность задачи восстановления функции $f(x)$ по значениям ее интегралов (1) существенно зависит от того, в каком пространстве ищется неизвестная функция $f(x)$. Методы определения непрерывных функций по их коэффициентам Фурье, заданным приближенно, достаточно подробно изложены в [81].

Рассмотрим теперь задачу определения функции $f(x)$ по значениям ее интегралов в более общей постановке, а именно без предположения о том, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной. Задача построения функции $f(x)$, такой, что для нее выполнены равенства (1), где $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная последовательность функций, а μ_n — заданная последовательность чисел, называется проблемой моментов. Можно рассматривать два варианта проблемы моментов — конечномерную и бесконечномерную. В первом случае число функций $\varphi_n(x)$ и чисел μ_n в равенствах (1) конечно, а во втором — бесконечно. Рассмотрим эти задачи в предположении, что функции $\varphi_n(x) \in L_2[a,b]$ и искомая функция $f(x)$ также ищутся в этом пространстве. Сформулированные задачи удобнее исследовать в более общей, чем интегральная, постановке. Будем предполагать, что в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана последовательность элементов φ_n, а также задана последовательность чисел μ_n. Требуется определить элемент $f \in H$, такой, что $(f,\varphi_n) = \mu_n$, $n = 1,2,\ldots,N$ (конечномерная проблема моментов), или $(f,\varphi_n) = \mu_n$, $n = 1,2,\ldots$ (бесконечномерная проблема моментов). Если в постановку задачи включается условие того, что искомый элемент f должен быть таков, что $\|f\| \leqslant l$, где l — некоторое заданное число, то соответствующая задача называется конечномерной (бесконечномерной) l-проблемой моментов.

Рассмотрим бесконечномерную проблему моментов. Единственность решения этой задачи определяется полнотой системы элементов φ_n. Действительно, если система элементов φ_n полна, то из равенств $(\varphi_n, u) = 0$, $n = 1,2,\ldots$, следует, что $u = 0$, а значит, решение бесконечномерной проблемы моментов единственно. Решение конечномерной проблемы моментов всегда неединственно. Действительно, пусть $\bar{f}$ — решение конечномерной проблемы моментов $(\bar{f}, \varphi_n) = \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим через H_1 подпространство, ортогональное к конечномерному подпространству, порождаемому элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Тогда решением данной проблемы моментов наряду с $\bar{f}$ будет являться элемент $\bar{f} + \psi$, где ψ — произвольный элемент из H_1. Отметим, что решение конечномерной l-проблемы моментов при определенных условиях может быть единственным. Действительно, пусть φ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в H. Рассмотрим конечномерную l-проблему моментов: $(f, \varphi_n) = \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $\|f\| \leqslant l$. Разложим искомый элемент f в ряд по элементам φ_n

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{N} \mu_n\varphi_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n.$$

Записывая для f равенство Парсеваля, имеем

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2.$$

Из этого равенства следует, что если $M = \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 < l^2$, то решение конечномерной l-проблемы моментов существует и неединственно, если $M = l^2$, то решение существует и единственно, и, наконец, если $M > l^2$, то решение не существует.

Рассмотрим вопрос о разрешимости проблемы моментов. Очевидно, что, за исключением тривиальных случаев, исследование разрешимости бесконечномерной проблемы моментов более сложно, чем конечномерной. Однако вопрос о разрешимости бесконечномерной l-проблемы моментов может быть сведен к исследованию разрешимости конечномерных проблем моментов. Пусть дана система элементов φ_n и последовательность чисел μ_n, требуется найти элемент f, такой, что $(f, \varphi_n) = \mu_n$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $\|f\| \leqslant l$.

Теорема 6.1.1. *Для разрешимости бесконечномерной l-проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы при любом натуральном N существовало решение конечномерной l-проблемы моментов для тех же φ_n и μ_n.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна, так как если элемент f является решением бесконечномерной l-проблемы моментов, то он будет являться решением конечномерной l-проблемы моментов для любого натурального N.

Докажем теперь достаточность. Обозначим через f_N решение конечномерной l-проблемы моментов

$$(f_N, \varphi_n) = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad \|f_N\| \leqslant l.$$

Для любого элемента последовательности f_N, $N = 1, 2, \ldots$, выполнено условие $\|f_N\| \leqslant l$. Следовательно, из последовательности f_N можно выделить подпоследовательность f_{N_k}, слабо сходящуюся к элементу f. Из слабой сходимости f_{N_k} к f и ограниченности норм $\|f_{N_k}\| \leqslant l$ следует, что $\|f\| \leqslant l$. Так как $(f_{N_k}, \varphi_n) = \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots, N_k$, то, переходя в этих равенствах к пределу при $N_k \to \infty$ и учитывая слабую сходимость f_{N_k} к f, получим, что

$$(f, \varphi_n) = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, элемент f является решением бесконечномерной l-проблемы моментов и теорема доказана.

Покажем, что в случае линейно независимой системы элементов φ_n конечномерная проблема моментов разрешима всегда. Пусть задана линейно независимая система элементов φ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, и числа μ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим ортонормированную систему элементов ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, полученную из φ_n в результате процесса ортогонализации $\psi_j = \omega_j/\|\omega_j\|$, $\omega_j = \varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1}(\varphi_j, \psi_k)\psi_k$. Тогда $\varphi_n = \sum_{j=1}^{n}(\varphi_n, \psi_j)\psi_j$, $(\varphi_n, \psi_n) \neq 0$ для $n = 1, 2, \ldots, N$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}(\varphi_n, \psi_j)c_j = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

относительно неизвестных c_j, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Это система с треугольной матрицей, на диагонали которой стоят элементы (φ_n, ψ_n), отличные от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение $\bar{c}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Покажем, что элемент

$$\bar{f}_N = \sum_{j=1}^{N}\bar{c}_j\psi_j$$

является решением конечномерной проблемы моментов. Действительно, так как $(\varphi_n, \psi_j) = 0$ при $j > n$, то для всех $n = 1, 2, \ldots, N$

$$(\bar{f}_N, \varphi_n) = \left(\sum_{j=1}^{N}\bar{c}_j\psi_j, \varphi_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j(\psi_j, \varphi_n) = \mu_n.$$

Таким образом, в случае линейно независимой системы элементов φ_n конечномерная проблема моментов имеет решение при любых числах μ_n. При каких условиях будет существовать решение конечномерной l-проблемы моментов? Пусть $\bar{f}_N$ — построенное выше решение конечномерной проблемы моментов. Обозначим через B_N линейный оператор, действующий из R^N в R^N и определяемый матрицей с элементами $b_{ij} = (\varphi_i, \psi_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Так как эта матрица треугольная и на ее диагонали расположены не нулевые элементы, то при всех натуральных N оператор B_N имеет ограниченный обратный B_N^{-1}. Тогда

$$\|\bar{f}_N\|_H^2 = \sum_{n=1}^{N} (\bar{f}_N, \psi_j)^2 \leqslant \|B_N^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2.$$

Следовательно, элемент $\bar{f}_N$ будет являться также и решением конечномерной l-проблемы моментов, если

$$\|B_N^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \leqslant l^2.$$

Предположим, что выполнены следующие условия. Система линейно независимых элементов φ_n такова, что $\|B_N^{-1}\| \leqslant B$ для всех натуральных N. Последовательность чисел μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что элемент $\{\mu_n\} \in l_2$ и $\|\{\mu_n\}\|_{l_2} = \mu$. Тогда, если $B\mu \leqslant l$, то существует решение бесконечномерной l-проблемы моментов. Действительно, при этих предположениях для любого натурального N существует решение $\bar{f}_N$ конечномерной проблемы моментов для набора чисел μ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\|\bar{f}_N\|_H \leqslant \|B_N^{-1}\| \left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \right)^{1/2} \leqslant B \|\{\mu_n\}\|_{l_2} = B\mu.$$

Следовательно, если $B\mu \leqslant l$, то конечномерная l-проблема моментов имеет решение для любого натурального N и из теоремы 6.1.1 следует, что существует решение бесконечномерной l-проблемы моментов.

Изложенные результаты непосредственно применимы для исследования исходной задачи (1) в случае, когда решение $f(x)$ ищется в пространстве $L_2[a, b]$. Они представляют собой анализ достаточно простого варианта проблемы моментов. Другие постановки проблемы моментов связаны с ее решением в более общих функциональных пространствах, а также исследованием этой задачи для конкретных систем функций $\varphi_n(x)$. Отметим в связи с этим, что существуют термины степенная проблема моментов ($\varphi_n(x) = x^n$) или тригонометрическая проблема моментов. Ознакомиться с этими и другими вопросами, связанными с проблемой моментов и ее приложениями, можно по книгам [5, 12, 38, 39] и имеющейся в них литературе.

Остановимся на проблеме единственности восстановления функции $f(x) \in L_2[a, b]$ по ее интегралам μ_n, определяемым равенствами (1), где $\{\varphi_n(x)\}$ — заданная система функций. Формальный ответ на этот вопрос достаточно прост. Задача определения $f(x)$ из равенств (1) имеет единственное решение, если система функций $\{\varphi_n(x)\}$ полна в пространстве $L_2[a,b]$. Однако главная проблема, как правило, состоит в том, чтобы выяснить, является ли полной данная конкретная система функций $\{\varphi_n(x)\}$. Одним из наиболее известных классов полных систем в пространстве $L_2[a,b]$ являются системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (см. теорему 3.3.3 и более подробно [54]). Очевидно, что существуют полные системы функций, не являющиеся собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля. Хорошо известный пример такой системы — система степенных функций $\{x^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, полнота которой следует из теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке алгебраическими многочленами. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть система функций $\varphi_n(x) = x^{a_n}$, где a_n — некоторая последовательность положительных чисел. Справедлива следующая теорема [35].

Теорема 6.1.2. *Если $f(x) \in L_2[0,1]$, положительные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таковы, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ и $\int\limits_0^1 f(x)x^{a_n}dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f(x) = 0$.*

Отметим, что к исследованию полноты системы функций может быть сведена задача исследования единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Действительно, если ядро $K(t,x)$ уравнения

$$\int\limits_a^b K(t,x)f(x)dx = g(t), \quad c \leqslant t \leqslant d, \tag{2}$$

таково, что на отрезке $[c,d]$ существует последовательность точек t_n, такая, что система функций $\varphi_n(x) = K(t_n,x)$ полна в пространстве $L_2[a,b]$, то решение уравнения (2) единственно в $L_2[a,b]$.

Приведем в заключение пример сведения обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром к проблеме моментов. В гл. 3, §3 была рассмотрена задача определения коэффициента $\alpha(x)$ дифференциального уравнения

$$y'(x,\lambda) + \lambda\alpha(x)y(x,\lambda) = 1$$

по функции $\varphi(\lambda) = \bar{y}(1,\lambda)$, где $\bar{y}(x,\lambda)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\bar{y}(0,\lambda) = 0$. Эта задача сводится к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^1 \exp\left\{-\lambda\int\limits_\xi^1 \alpha(\theta)d\theta\right\}d\xi = \varphi(\lambda)$$

относительно неизвестной функции $\alpha(x)$. Обозначив через

$$\beta(\xi) = \int\limits_{\xi}^{1} \alpha(\theta) d\theta,$$

получим уравнение

$$\int\limits_{0}^{1} \exp\{-\lambda\beta(\xi)\} d\xi = \varphi(\lambda)$$

для функции $\beta(\xi)$. Дифференцируя это равенство n раз и полагая $\lambda = \theta$, получим

$$\int\limits_{0}^{1} (\beta(\xi))^n (-1)^n d\xi = \varphi^{(n)}(0).$$

Следовательно, обратная задача сводится к задаче определения функции $\beta(\xi)$ по значениям ее интегралов

$$\int\limits_{0}^{1} (\beta(\xi))^n d\xi = \nu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $\nu_n = (-1)^n \varphi^n(0)$ — заданные числа. Предположим, что $\beta(\xi) \in C^1[0,1]$, $\beta'(\xi) < 0$ при $\xi \in [0,1]$ и известно значение $\beta(0)$. Пусть для определенности $\beta(0) = 1$. Сделав в равенствах (3) замену переменных $x = \beta(\xi)$, получим

$$\int\limits_{0}^{1} f(x) x^n dx = -\nu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $f(x) = 1/\beta'(\beta^{-1}(x))$, а $\beta^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\beta(\xi)$. Так как

$$\int\limits_{0}^{1} f(x) dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{d}{dx}(\beta^{-1}(x)) dx = \beta^{-1}(1) - \beta^{-1}(0) = -1,$$

то с учетом (4) рассматриваемая обратная задача сводится к степенной проблеме моментов, состоящей в определении функции $f(x)$ по ее интегралам

$$\int\limits_{0}^{1} f(x) x^n dx = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где μ_n — заданные числа. Единственность решения этой задачи в пространстве $L_2[0,1]$ следует из полноты системы степенных функций $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в этом пространстве. Отметим, что проведенная редукция нелинейной задачи определения функции $\beta(\xi)$ по семейству ее интегралов ν_n, задаваемых равенствами (3), к линейной задаче возможна и для более общего случая. Пусть требуется определить функцию $\beta(\xi) \in C^1[0,1]$, $\beta(0) = 1$, $\beta(1) = 0$, $\beta'(\xi) < 0$ для $\xi \in [0,1]$, если известны значения интегралов

$$\int_0^1 K(n, \beta(\xi))d\xi = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $K(n,\beta)$ — заданная функция. Сделав в этих интегралах замену переменных $x = \beta(\xi)$, $f(x) = 1/\beta'(\beta^{-1}(x))$, имеем

$$\int_0^1 K(n,x)f(x)dx = -\mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, мы получили задачу, близкую к линейной задаче (1), сформулированной в начале параграфа, с системой функций $\varphi_n(x) = K(n,x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

§2. ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Компьютерная томография стала широко известна в связи с созданием и интенсивным применением медицинских томографов. В настоящее время томографические методы активно используются не только в медицине, но и при решении различных технических задач, например в неразрушающем контроле качества изделий, и в целом ряде научных исследований.

Рассмотрим схему томографического эксперимента в рентгенодиагностике. Тонкий (линейный) пучок рентгеновских лучей просвечивает плоское сечение тела. Изменение интенсивности излучения в результате прохождения через тело фиксируется детектором. Подобные измерения проводятся для всевозможных направлений просвечивающего пучка. В результате обработки на компьютере данных этого эксперимента получается двухмерное (в плоскости сечения тела) изображение.

Пусть функция $f(x,y)$ представляет собой коэффициент поглощения рентгеновских лучей в точке (x,y), рассматриваемого плоского сечения. Тогда относительное уменьшение интенсивности излучения на малом отрезке Δl в точке (x,y) равно $f(x,y)\Delta l$.

Обозначив через J_0 начальную интенсивность пучка, а через J_1 его интенсивность после прохождения через тело, получим

$$\frac{J_1}{J_0} = \exp\left\{-\int\limits_L f(x,y)dl\right\},$$

где L — прямая в плоскости сечения, совпадающая с направлением пучка. Так как величина J_1/J_0 измеряется для всевозможных прямых, лежащих в плоскости сечения, то в результате рассматриваемая проблема сводится к задаче определения функции $f(x,y)$ по ее интегралам

$$\int\limits_L f(x,y)dl,$$

взятым по каждой из прямых L, лежащих в плоскости сечения.

Задача восстановления функции двух переменных, заданной на плоскости, по значениям ее интегралов вдоль прямых была поставлена и решена Радоном в 1917 году [103]. Интенсивное развитие работ по томографии и их применение в медицине началось примерно через полвека после работы Радона.

Рассмотрим более формализованную постановку задачи. Уравнение прямой на плоскости можно задать следующим образом:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p. \tag{1}$$

Здесь $|p|$ — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ — угол между осью x и перпендикуляром. Таким образом, семейство прямых на плоскости представляет собой двухпараметрическое семейство $L(p,\varphi)$, в котором параметр p принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а φ — от 0 до 2π. Из уравнения (1) следует, что пары (p,φ) и $(-p,\varphi+\pi)$ задают одну и ту же прямую.

Преобразованием Радона называется отображение функции $f(x,y)$, заданной на плоскости, во множество ее интегралов по всем прямым, лежащим в этой плоскости. Так как интеграл от функции $f(x,y)$ по прямой $L(p,\varphi)$ зависит от параметров p и φ, то преобразование Радона можно записать в виде

$$u(p,\varphi) = \int\limits_{L(p,\varphi)} f(x,y)dl. \tag{2}$$

Перейдем от уравнения (1) к параметрическому представлению прямой

$$x = p\cos\varphi - t\sin\varphi, \quad y = p\sin\varphi + t\cos\varphi,$$

где $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда формулу (2) можно записать следующим образом:

$$u(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)dt. \tag{3}$$

Отметим, что преобразование Радона существует не для всякой функции $f(x,y)$, определенной на плоскости. Из формулы (3) следует, что оно не определено, например, для $f(x,y) = \text{const} \neq 0$.

Задача восстановления функции $f(x,y)$ по семейству интегралов от этой функции $u(p,\varphi)$ представляет собой задачу обращения преобразования Радона. Рассмотрим сначала эту задачу для радиально-симметричной функции $f(x,y)$, обращающейся в ноль вне круга радиуса R с центром в начале координат.

Итак, пусть $f(x,y) = f_0(\sqrt{x^2+y^2})$ для $x^2+y^2 \leqslant R^2$, где $f_0(z)$ непрерывна на отрезке $[0,R]$ и $f(x,y) = 0$ при $x^2+y^2 > R^2$. Вычислим преобразование Радона от этой функции. Очевидно, что $u(p,\varphi) = 0$ при $|p| > R$. Пусть $|p| < R$, тогда

$$u(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)dt = \int_{-\sqrt{R^2-p^2}}^{\sqrt{R^2-p^2}} f_0(\sqrt{p^2+t^2})dt,$$

или

$$u(p,\varphi) = 2\int_{0}^{\sqrt{R^2-p^2}} f_0(\sqrt{p^2+t^2})dt, |p| < R. \tag{4}$$

Из этого представления для преобразования Радона следует, что в рассматриваемом случае оно не зависит от переменной φ и четно по переменной p. Учитывая это, в дальнейшем будем обозначать преобразование Радона через $u(p)$, где $p \in [0,R]$. Сделав в (4) замену переменных $\theta = \sqrt{p^2+t^2}$, получим

$$\int_{p}^{R} \frac{2f_0(\theta)\theta d\theta}{\sqrt{\theta^2-p^2}} = u(p), \quad 0 \leqslant p \leqslant R. \tag{5}$$

Таким образом, задача обращения преобразования Радона в случае радиально-симметричной функции $f(x,y)$ сводится к задаче решения интегрального уравнения (5) с известной функцией $u(p)$ и неизвестной $f_0(\theta)$, которую требуется определить.

Интегральное уравнение (5) представляет собой интегральное уравнение 1-го рода с переменным пределом интегрирования. Своеобразие уравнения (5) состоит в том, что его ядро

$$G(p,\theta) = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta - p}\sqrt{\theta + p}}, \quad 0 \leqslant p \leqslant \theta \leqslant R,$$

имеет интегрируемую особенность. Исследование подобных уравнений было начато Абелем, поэтому их обычно называют уравнениями типа Абеля. Отметим, что интеграл, стоящий в левой части уравнения (5), определен для любой функции $f_0(\theta) \in C[0, R]$.

Получим явную формулу для решения уравнения (5). Умножим (5) на $p(p^2 - s^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по p от s до R

$$\int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} \int_p^R \frac{2f_0(\theta)\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} dp = \int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} u(p)\, dp. \qquad (6)$$

Обозначим левую часть этого равенства через $J(f_0)$ и преобразуем ее. Меняя порядок интегрирования, получим, что

$$J(f_0) = \int_s^R 2f_0(\theta)\theta \left(\int_s^\theta \frac{p\, dp}{[(p^2 - s^2)(\theta^2 - p^2)]^{1/2}} \right) d\theta.$$

Вычислим внутренний интеграл. Введем новую переменную $z = (2p^2 - \theta^2 - s^2)/(\theta^2 - s^2)$. Тогда $p^2 = (\theta^2 - s^2)z/2 + (\theta^2 + s^2)/2$ и

$$\int_s^\theta \frac{p\, dp}{[(p^2 - s^2)(\theta^2 - p^2)]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{(\theta^2 - s^2)dz}{[(\theta^2 - s^2)z/2 + (\theta^2 - s^2)/2]^{1/2}[(\theta^2 - s^2)/2 - (\theta^2 - s^2)z/2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dz}{(1 - z^2)^{1/2}} = \frac{1}{2} \arcsin(z)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$J(f_0) = \pi \int_s^R f_0(\theta)\theta\, d\theta$$

и (6) можно записать в виде

$$\pi \int_s^R f_0(\theta)\theta\, d\theta = \int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} u(p)\, dp.$$

Дифференцируя это равенство по s, получим формулу для решения уравнения (5)

$$f_0(s) = -\frac{1}{\pi s}\frac{d}{ds}\int_s^R p(p^2 - s^2)^{-1/2} u(p)\, dp. \tag{7}$$

Из этого представления следует, что решение уравнения (5) единственно в пространстве непрерывных функций, а значит, радиально-симметричная функция $f(x, y) = f_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ однозначно определяется своим преобразованием Радона.

Рассмотрим вопрос о корректности задачи решения уравнения (5) в случае, когда интегральный оператор $K f_0$, стоящий в левой части уравнения (5), рассматривается действующим из пространства $C[0, R]$ в $C_R[0, R]$ — пространство непрерывных на $[0, R]$ функций, обращающихся в нуль в точке R. Из уравнения (5) следует, что условие $u(R) = 0$ есть необходимое условие разрешимости этого уравнения в классе непрерывных функций. Формула (7) дает некоторые основания надеяться на то, что для данной пары пространств задача решения уравнения (5) корректна. Покажем, что это так.

Рассмотрим на отрезке $[0, R]$ последовательность неотрицательных непрерывных функций $f_n(\theta)$, таких, что $f_n(\theta) = 0$ при $\theta \in [0, a] \cup [a_n, R]$, где $a_n = a + 1/n$ и $\|f_n\|_{C[0,R]} = n^{1/4}$. Тогда функции $u_n(p) = K f_n$ неотрицательны на отрезке $[0, R]$ и равны нулю при $p \in [a_n, R]$. При $p \in [a, a_n]$

$$u_n(p) \leqslant n^{1/4} \int_p^{a_n} \frac{2\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} = n^{1/4} 2\sqrt{\theta^2 - p^2}\Big|_p^{a_n} =$$
$$= n^{1/4} 2\sqrt{a_n^2 - p^2} \leqslant \text{const}\, n^{-1/4},$$

а при $p \in [0, a]$

$$u_n(p) \leqslant n^{1/4} \int_a^{a_n} \frac{2\theta\, d\theta}{\sqrt{\theta^2 - p^2}} = n^{1/4} 2\sqrt{\theta^2 - p^2}\Big|_a^{a_n} =$$
$$= n^{1/4} 2(\sqrt{a_n^2 - p^2} - \sqrt{a^2 - p^2}) \leqslant \text{const}\, n^{-1/4}.$$

Следовательно, $\|u_n\|_{C_R[0,R]} \leqslant \text{const}\, n^{-1/4}$. Таким образом, при $n \to \infty$ $\|f_n\|_{C[0,R]} \to \infty$, а $\|u_n\|_{C_R[0,R]} \to 0$ и рассматриваемая задача неустойчива.

Перейдем теперь к исследованию задачи восстановления функции $f(x,y)$ по ее преобразованию Радона $u(p,\varphi)$ в общей постановке (без предположения о радиальной симметрии $f(x,y)$). В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(x,y)$ принадлежит множеству бесконечно дифференцируемых на плоскости функций, таких, что

$$\sup_{(x,y)\in R^2} \left| x^k y^l \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q} \right| < \infty \tag{8}$$

для всех неотрицательных целых чисел k, l, n, p, q $(n = p + q)$.

Покажем, что для функций $f(x,y)$, обладающих указанными свойствами, преобразование Радона $u(p,\varphi)$ существует и для него при $p \in (-\infty, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполняется оценка

$$|u(p,\varphi)| \leqslant \frac{C}{(1+p^2)^{3/2}}, \tag{9}$$

где C — положительная постоянная.

Из условия (8) следует, что существует положительная постоянная C_1, такая, что для всех $(x,y) \in R^2$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{C_1}{((1+x^2)(1+y^2))^2}.$$

Из этой оценки и формулы (3) для преобразования Радона следует, что

$$|u(p,\varphi)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + (p\cos\varphi - t\sin\varphi)^2)^{-2} (1 + (p\sin\varphi + t\cos\varphi)^2)^{-2}\, dt.$$

Так как

$$(1 + (p\cos\varphi - t\sin\varphi)^2)(1 + (p\sin\varphi + t\cos\varphi)^2) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + (p\cos\varphi - t\sin\varphi)^2 + (p\sin\varphi + t\cos\varphi)^2 = 1 + p^2 + t^2,$$

то

$$|u(p,\varphi)| \leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+p^2+t^2)^2}.$$

Тогда, учитывая то, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{const},$$

имеем

$$|u(p,\varphi)| \leqslant \frac{C}{(1+p^2)^{3/2}}$$

и оценка (9) доказана.

Замечание. Из условия (8) можно доказать более высокую скорость стремления к нулю $|u(p,\varphi)|$ при $|p| \to \infty$, чем в оценке (9).

Установим связь между преобразованиями Фурье функции $f(x,y)$ и ее преобразованием Радона $u(p,\varphi)$. Из оценки (8) следует, что для функции $f(x,y)$ существует двухмерное преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_1 x - i\omega_2 y) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Из оценки (9) следует, что для любого φ существует одномерное преобразование Фурье функции $u(p,\varphi)$ по переменной p

$$\hat{u}(\omega,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p) u(p,\varphi)\,dp.$$

Покажем, что преобразования Фурье $\hat{f}(\omega_1,\omega_2)$ и $\hat{u}(\omega,\varphi)$ связаны между собой следующим образом:

$$\boxed{\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{u}(\omega,\varphi).} \tag{10}$$

Рассмотрим

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\big) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных $x = p\cos\varphi - t\sin\varphi$, $y = p\sin\varphi + t\cos\varphi$. Так как

$$\frac{D(x,y)}{D(p,t)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1,$$

а

$$-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi) =$$
$$= -i\omega(p\cos^2\varphi - t\sin\varphi\cos\varphi + p\sin^2\varphi + t\sin\varphi\cos\varphi) = -i\omega p,$$

то

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\varphi - t\sin\varphi, p\sin\varphi + t\cos\varphi)dt\,dp.$$

Из формулы (3) для преобразования Радона следует, что

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega p)u(p,\varphi)dp.$$

Учитывая определение одномерного преобразования Фурье, имеем

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{u}(\omega,\varphi),$$

и формула (10) доказана.

Из формулы (10) следует, что функция $f(x,y)$ однозначно определяется преобразованием Радона. Действительно, пусть функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ таковы, что $u_1(p,\varphi) = u_2(p,\varphi)$ для $p \in (-\infty,\infty)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$. Тогда их разность $f_0(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$ будет иметь преобразование Радона $u_0(p,\varphi) = 0$ для $p \in (-\infty,\infty)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$. Следовательно, преобразование Фурье от $u_0(p,\varphi)$ по первому аргументу $\hat{u}_0(\omega,\varphi) = 0$ для всех $\omega \in (-\infty,\infty)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$. Тогда из формулы (10) получим, что преобразование Фурье функции $f_0(x,y)$ — функция $\hat{f}_0(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = 0$ для всех $\omega \in (-\infty,\infty)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$. Из этого равенства следует, что для всех $(\omega_1,\omega_2) \in R^2$ преобразование Фурье $\hat{f}_0(\omega_1,\omega_2) = 0$, поскольку для любых $(\omega_1,\omega_2) \in R^2$ система уравнений $\omega\cos\varphi = \omega_1$, $\omega\sin\varphi = \omega_2$ относительно ω и φ имеет решение $\omega \in (-\infty,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Таким образом, преобразование Фурье $\hat{f}_0(\omega_1,\omega_2)$ тождественно равно нулю при $(\omega_1,\omega_2) \in R^2$, а значит, и $f_0(x,y) = 0$ для $(x,y) \in R^2$. Следовательно, $f_1(x,y) = f_2(x,y)$ для $(x,y) \in R^2$.

Формула (10), называемая часто проекционной теоремой, является основой для одного из алгоритмов восстановления функции $f(x,y)$ по ее преобразованию Радона $u(p,\varphi)$. Алгоритм следует непосредственно из формулы (10). По заданной функции $u(p,\varphi)$ вычисляется преобразование Фурье $\hat{u}(\omega,\varphi)$, затем из формулы (10) вычисляется двухмерное преобразование Фурье $\hat{f}(\omega_1,\omega_2)$ и окончательно по $\hat{f}(\omega_1,\omega_2)$ вычисляется $f(x,y)$. При реализации этого алгоритма на практике необходимо учитывать проблемы, связанные с вычислением прямых и обратных преобразований Фурье от функций, заданных приближенно. Другой особенностью алгоритма является то, что при его реализации необходимо пересчитывать значения функции $\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$, заданной в полярной системе, в значения $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ в декартовой системе координат (ω_1, ω_2).

Рассмотрим теперь формулу обращения преобразования Радона, т.е. формулу вычисления $f(x, y)$ по $u(p, \varphi)$, полученную Радоном. Так как при вычислении значений искомой функции в некоторой точке можно считать, что начало координат находится в этой точке, ограничимся формулой для определения значения $f(0,0)$.

Обозначим через D_q область, представляющую собой внешность окружности радиуса q с центром в нуле. Рассмотрим двойной интеграл

$$J = \iint\limits_{D_q} \frac{f(x, y)dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - q^2}}. \tag{11}$$

С помощью замены переменных $x = q\cos\varphi - t\sin\varphi$, $y = q\sin\varphi + t\cos\varphi$ этот интеграл приводится к виду

$$J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)dt,$$

или

$$J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{0} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)dt.$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(q\cos\varphi - t\sin\varphi, q\sin\varphi + t\cos\varphi)dt$$

и с учетом (3)

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} u(q, \varphi)d\varphi. \tag{12}$$

С другой стороны, сделав в интеграле (11) замену переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим

$$J = \int\limits_q^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(r\cos\varphi, r\sin(\varphi))r\,d\varphi\,dr}{\sqrt{r^2 - q^2}}.$$

Обозначив через

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi, \tag{13}$$

имеем

$$\bar{J} = 2\pi\int\limits_q^{\infty}\frac{\bar{f}(r)r\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}.$$

Приравняв это выражение к величине, полученной в (12), получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\bar{f}(r)$

$$2\int\limits_q^{\infty}\frac{\bar{f}(r)r\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}} = \bar{u}(q), \quad 0 < q < \infty, \tag{14}$$

где

$$\bar{u}(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(q,\varphi)d\varphi.$$

Уравнение (14) совпадает с уравнением (5), за исключением обозначений, а также того, что в уравнении (5) верхний предел конечен, а в (14) он бесконечен. Это различие произошло только в силу того, что при выводе уравнения (5) предполагалось, что $f_0(\sqrt{x^2+y^2})$ равна нулю при $x^2+y^2 > R^2$.

Вычислим интеграл

$$J(\bar{u}) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\bar{u}(q)}{q} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{u}'(q)dq}{q} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\bar{u}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{u}(q)dq}{q^2}\right).$$

Используя (14), имеем

$$J(\bar{u}) = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(r)r\,dr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\int\limits_q^{\infty}\frac{\bar{f}(r)r\,dr\,dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\right).$$

Меняя порядок интегрирования во втором интеграле, получим

$$J(\bar{u}) = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(r)r\,dr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\bar{f}(r)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{r\,dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}dr\right).$$

Так как неопределенный интеграл

$$\int \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-q^2}}{r^2 q} + \text{const},$$

то

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{r\,dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-q^2}}{rq}\Bigg|_{\varepsilon}^{r} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$J(\bar{u}) = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r}\right)\bar{f}(r)dr =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(r)dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(0)dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} + \varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(r)-\bar{f}(0)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}dr\right).$$

Вычислим первый интеграл. Так как

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) + \text{const}, \tag{15}$$

то

$$\varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(0)\,dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} = \frac{\pi}{2}\bar{f}(0).$$

Докажем, что второе слагаемое, которое обозначим через J_2, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\omega(h)$ модуль непрерывности функции $\bar{f}(r)$ на отрезке $[0,1]$. Тогда для $\varepsilon < 1$

$$|J_2| \leqslant \varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{|\bar{f}(r)-\bar{f}(0)|}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}dr + \varepsilon\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{|\bar{f}(r)-\bar{f}(0)|}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}dr \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\omega(\sqrt{\varepsilon})\int\limits_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} + 2\varepsilon C\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}},$$

где постоянная C такова, что $|\bar{f}(r)| \leqslant C$ для $r \geqslant 0$. Из (15) следует, что

$$|J_2| \leqslant \omega(\sqrt{\varepsilon}) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) + 2C\left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\right)$$

и $J_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом,

$$J(\bar{u}) = \bar{f}(0)$$

и формула, полученная Радоном, имеет вид

$$\boxed{f(0,0) = \bar{f}(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\bar{u}(q)}{q}.}$$

Отметим в заключение одну из наиболее важных проблем в задачах компьютерной томографии, связанную с тем, что на практике, как правило, не удается экспериментально определить функцию $u(p,\varphi)$ — преобразование Радона для всех значений p и φ. Недостаток в информации может порождать неединственность при восстановлении функции $f(x,y)$. Одним из возможных способов решения этой проблемы является сужение класса функций $f(x,y)$. Более подробно задачи такого типа, а также другие задачи компьютерной томографии и методы их исследования изложены в [62, 82].

§3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ ПО СЕМЕЙСТВУ ОКРУЖНОСТЕЙ. ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим задачу определения функции двух переменных $f(x,y)$ по интегралам от этой функции, вычисленным по семейству окружностей, произвольного радиуса, центр которых лежит на фиксированной прямой. Эта задача в более общей постановке, состоящей в определении функции n переменных по всем сферам в n-мерном пространстве, центры которых принадлежат фиксированной плоскости, изучена в [41, 49].

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна для всех $(x,y) \in R^2$. Рассмотрим семейство окружностей произвольного радиуса с центром, лежащим на фиксированной прямой, в качестве которой, для определенности, возьмем координатную ось $y = 0$. Окружность $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, принадлежащую этому семейству, обозначим через $L(a,r)$. Исследуемая задача состоит в определении функции $f(x,y)$ по функции $g(x,r)$, представляющей собой интеграл от $f(x,y)$ по окружности $L(x,r)$

$$g(x,r) = \int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)dl, \tag{1}$$

заданной для всех $x \in (-\infty,\infty)$ и $r > 0$.

Поставленная задача в классе непрерывных функций имеет неединственное решение. Покажем, что для любой непрерывной функции $f(x,y)$, такой, что $f(x,y) = -f(x,-y)$, интегралы

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)dl$$

равны нулю при всех $x \in (-\infty,\infty)$ и $r > 0$. Сделав замену переменных $\xi = x + r\cos\varphi$, $\tau = r\sin\varphi$, получим

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)dl = \int\limits_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} f(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi. \tag{2}$$

Последний интеграл с помощью замены переменной $\bar{\varphi} = 2\pi - \varphi$ и условия $f(x,y) = -f(x,-y)$ можно преобразовать так

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} f(x + r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi = \int\limits_{\pi}^{0} f(x + r\cos\bar{\varphi}, -r\sin\bar{\varphi})r\,d\bar{\varphi} =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} f(x + r\cos\bar{\varphi}, r\sin\bar{\varphi})r\,d\bar{\varphi}.$$

Подставив это выражение в (2), получим, что

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)dl = 0$$

для $x \in (-\infty,\infty)$, $r > 0$. Таким образом, все интегралы от $f(x,y)$ по окружностям $L(x,r)$ равны нулю, если $f(x,y)$ является нечетной по y. Так как любая функция $f(x,y)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной по y функций

$$f(x,y)=\frac{f(x,y)+f(x,-y)}{2}+\frac{f(x,y)-f(x,-y)}{2},$$

то очевидно, что вопрос об однозначном определении $f(x,y)$ по семейству интегралов $g(x,r)$, определяемых формулой (1), можно ставить только для четной по y функции $f(x,y)$.

Теорема 6.3.1. *Непрерывная при всех $(x,y)\in R^2$ функция $f(x,y)$, четная по переменной y, однозначно определяется функцией $g(x,r)$, заданной при $x\in(-\infty,\infty)$, $r>0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(x,r)=\int_0^r g(x,\rho)d\rho=\int_0^r\int_{L(x,\rho)} f(\xi,\tau)dl\,d\rho=\iint_{D(x,r)} f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau,$$

где область $D(x,r)$ — множество точек (ξ,τ), таких, что $(\xi-x)^2+\tau^2\leqslant r^2$.

Найдем частную производную функции $G(x,r)$ по x. Так как

$$\iint_{D(x,r)} f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau=\int_{-r}^{r}\left[\int_{x-\sqrt{r^2-\tau^2}}^{x+\sqrt{r^2-\tau^2}} f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau,$$

то

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,r)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-r}^{r}\left[\int_{x-\sqrt{r^2-\tau^2}}^{x+\sqrt{r^2-\tau^2}} f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau=$$

$$=\int_{-r}^{r}\left[f(x+\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)-f(x-\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)\right]d\tau. \qquad (3)$$

Покажем, что

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,r)=\frac{1}{r}\int_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)\xi\,dl. \qquad (4)$$

Введя параметрическое представление кривой $L(0,r)$ с параметром τ, получим

$$\frac{1}{r}\int\limits_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)\xi\,dl=\frac{1}{r}\Bigg[\int\limits_{-r}^{r} f(x+\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)\sqrt{1+\frac{\tau^2}{r^2-\tau^2}}\sqrt{r^2-\tau^2}d\tau+$$

$$+\int\limits_{-r}^{r} f(x-\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)\sqrt{1+\frac{\tau^2}{r^2-\tau^2}}\left(-\sqrt{r^2-\tau^2}\right)d\tau\Bigg]=$$

$$=\int\limits_{-r}^{r}\left[f(x+\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)-f(x-\sqrt{r^2-\tau^2},\tau)\right]d\tau.$$

Из этого представления и формулы (3) следует формула (4). Рассмотрим

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)\xi\,dl=\int\limits_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)(x+\xi)dl=$$

$$=x\int\limits_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)dl+\int\limits_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)\xi\,dl.$$

Учитывая формулу (4), а также то, что

$$g(x,r)=\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)dl=\int\limits_{L(0,r)} f(x+\xi,\tau)dl,$$

имеем

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)\xi\,dl=xg(x,r)+r\frac{\partial G}{\partial x}(x,r).$$

Таким образом, если известна функция $g(x,r)$, то известны интегралы от функции $f(x,y)x$ по семейству окружностей $L(x,r)$. Следовательно, мы получили задачу, аналогичную исходной, но для функции $f(x,y)x$. Повторяя преобразования, аналогичные предыдущим, получим, что если известна $g(x,r)$, то известны

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)\xi^2\,dl$$

для всех $x\in(-\infty,\infty)$ и $r>0$. Продолжив этот процесс, будем иметь, что интегралы

$$\int\limits_{L(x,r)} f(\xi,\tau)\xi^n\,dl,\quad n=0,1,\ldots,$$

известны для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$.

Предположим, что есть две функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, четные по y, такие, что соответствующие им $g_1(x,r)$ и $g_2(x,r)$ равны для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$. Покажем, что $f_1(x,y) = f_2(x,y)$ для $(x,y) \in R^2$. Функции $\bar{f}(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$ соответствует $\bar{g}(x,r) = 0$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $r > 0$. Следовательно, учитывая предыдущее, имеем

$$\int\limits_{L(x,r)} \bar{f}(\xi,\tau)\xi^n\,dl = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{5}$$

для всех $x \in (-\infty, \infty)$, $r > 0$. Переходя к параметрическому представлению кривой, имеем

$$\int\limits_{L(x,r)} \bar{f}(\xi,\tau)\xi^n\,dl = \int\limits_{x-r}^{x+r} \bar{f}(\xi, \sqrt{r^2 - (\xi - x)^2})\sqrt{1 + \frac{(\xi - x)^2}{r^2 - (\xi - x)^2}}\xi^n\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x-r}^{x+r} \bar{f}(\xi, -\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2})\sqrt{1 + \frac{(\xi - x)^2}{r^2 - (\xi - x)^2}}\xi^n\,d\xi.$$

Таким образом, из четности $\bar{f}(x,y)$ по y следует, что равенства (5) могут быть записаны в виде

$$\int\limits_{x-r}^{x+r} \bar{f}(\xi, \sqrt{r^2 - (\xi - x)^2})\frac{\xi^n\,d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

для всех $x \in (-\infty, \infty)$, $r > 0$.

Покажем, что из равенств (6) следует равенство нулю функции $\bar{f}(x,y)$ при всех $(x,y) \in R^2$. Пусть (x_1, y_1) — произвольная точка плоскости. Проведем через нее окружность $L(x_0, r_0)$ с центром в точке $(x_0, 0)$ и радиусом $r_0 > 0$. Докажем, что $\bar{f}(x,y) = 0$ на окружности $L(x_0, r_0)$. Записав равенства (6) для $x = x_0$ и $r = r_0$, получим

$$\int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \bar{f}(\xi, \sqrt{r_0^2 - (\xi - x_0)^2})\frac{\xi^n\,d\xi}{\sqrt{r_0^2 - (\xi - x_0)^2}} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Обозначив через

$$\varphi(\xi) = \frac{\bar{f}(\xi, \sqrt{r_0^2 - (\xi - x_0)^2})}{\sqrt{r_0^2 - (\xi - x_0)^2}},$$

имеем

$$\int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \varphi(\xi)\xi^n\, d\xi = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

или

$$\int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \varphi(\xi)(\xi - (x_0 - r_0))^n\, d\xi = 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Функция $\varphi(\xi)$ имеет интегрируемую особенность в точках x_0-r_0 и x_0+r_0. Вводя функцию

$$\psi(\xi) = \int\limits_{\xi}^{x_0+r_0} \varphi(\theta) d\theta,$$

записываем равенства (7) для $n = 1, 2, \ldots$ следующим образом:

$$\int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \varphi(\xi)(\xi - (x_0 - r_0))^n\, d\xi =$$

$$= -\psi(\xi)(\xi - (x_0 - r_0))^n \Big|_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} + n \int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \psi(\xi)(\xi - (x_0 - r_0))^{n-1}\, d\xi = 0.$$

В итоге имеем

$$\int\limits_{x_0-r_0}^{x_0+r_0} \psi(\xi)(\xi - (x_0 - r_0))^n\, d\xi = 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{8}$$

Так как функция $\psi(\xi)$ непрерывна на отрезке $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$, а система функций $(\xi - (x_0 - r_0))^n$ полна на этом отрезке, то из равенств (8) имеем $\psi(\xi) = 0$ для $\xi \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$. Следовательно, $\varphi(\xi) = 0$ для $\xi \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]$. Таким образом, $\bar{f}(x, y) = 0$ на окружности $L(x_0, r_0)$ и, в частности, $\bar{f}(x_1, y_1) = 0$. Так как точка (x_1, y_1) была выбрана произвольно, то $\bar{f}(x, y) = 0$ для $(x, y) \in R^2$. Теорема доказана.

Рассмотренную задачу и исследованную в предыдущем параграфе задачу обращения преобразования Радона можно объединить в следующей общей постановке. На плоскости задано двухпараметрическое семейство кривых $C(p, q)$. Требуется определить функцию двух переменных $f(x, y)$, если известны значения ее интегралов по кривым $C(p, q)$

$$g(p, q) = \int\limits_{G(p,q)} f(x, y) dl$$

для параметров p и q, принимающих значения из некоторого заданного множества. Эта задача, в свою очередь, естественно обобщается на многомерный случай. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ — достаточно гладкая функция, определенная в n-мерном пространстве R^n, а $P(\lambda)$ — семейство гладких многообразий в пространстве R^n, зависящих от параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Требуется определить функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, если известны интегралы

$$\int\limits_{P(\lambda)} u(x) d\sigma,$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры на $P(\lambda)$.

Задачи такого типа называются задачами интегральной геометрии [18, 49]. Исследованию задач интегральной геометрии и их связи с обратными задачами для дифференциальных уравнений посвящено большое число работ (см., например, [49] и имеющуюся там литературу).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев А.С.* Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 11. С. 1514–1531.

2. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А, Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.

3. *Аниконов Ю.Е.* Об одной обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 2. С. 163–166.

4. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978.

5. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.

6. *Бабиков В.В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука. 1976.

7. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

8. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

9. *Басович И.Б.* Определение переменной проницаемости пласта в случае радиальной симметрии по опытным откачкам из центральной скважины // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, № 3. С. 514–522.

10. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.

11. *Благовещенский А.С.* О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.

12. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.

13. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.

14. *Вайникко Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.

15. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

16. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы. Киев: Наукова думка, 1986.

17. *Волков В.М.* Обратная задача для квазилинейного уравнения параболического типа // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1984. С. 227–228.

18. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер. Обобщенные функции, вып. 5. М.: Физматгиз, 1962.

19. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 4. С. 309–360.

20. *Гласко В.Б.* Обратные задачи математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

21. *Гласко В.Б., Мудрецова Е.А., Страхов В.Н.* Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии // Некорректные задачи естествознания. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 89–102.

22. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2. М.: ОНТИ, 1934.

23. *Денисов А.М.* О приближенном решении уравнения Вольтерра 1-го рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 4. С. 1053–1056.

24. *Денисов А.М.* Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 4. С. 858–864.

25. *Денисов А.М.* Метод решения уравнений 1-го рода в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 3. С. 528–530.

26. *Денисов А.М.* Обратные задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 5. С. 1040–1042.

27. *Денисов А.М.* Единственность решения задачи определения нелинейного кинетического коэффициента // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 4. С. 668–673.

28. *Денисов А.М., Туйкина С.Р.* О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 1. С. 100–102.

29. *Иванов В.К.* Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 793–818.

30. *Иванов В.К.* О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.

31. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.

32. *Иванов В.К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 6. С. 1089–1093.

33. *Иванов В.К, Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

34. *Искендеров А.Д.* Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 5. С. 890–898.

35. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

36. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 5. С. 83–94.

37. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

38. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

39. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

40. *Крейн С.Г.* О классах корректности для некоторых граничных задач // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1162–1165.

41. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

42. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

43. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.

44. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

45. *Лаврентьев М.М.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1973.

46. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г.* Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208, № 3. С. 531–533.

47. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.

48. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1969.

49. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

50. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.

51. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 1. С. 21–85.
52. *Латтес Р., Лионс Ж.Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
53. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
54. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
55. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
56. *Марченко В.А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 5. С. 695–698.
57. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
58. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1987.
59. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
60. *Музылев Н.В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 388–400.
61. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
62. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
63. *Новиков П.С.* О единственности обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 3. С. 165–168.
64. *Погорелов А.Г.* Обратные задачи нестационарной химической кинетики. М.: Наука, 1988.
65. *Прилепко А.И.* О единственности определения формы тела по значениям внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 1. С. 40–43.
66. *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала // Мат. заметки. 1973. Т. 15, № 5. С. 755–765.
67. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.
68. *Робинсон Э.А.* Спектральный подход к решению обратной задачи в геофизике на основе преобразования Лоренца, Фурье и Радона // Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. М.: Мир, 1982. Т. 70, № 9. С. 153–171.
69. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
70. *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
71. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
72. *Сергеев В.О.* Регуляризация уравнения Вольтерра I рода // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 3. С. 531–534.
73. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
74. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1986.
75. *Сретенский Л.Н.* О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99, № 1. С. 21–22.
76. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
77. *Тихонов А.Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
78. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.

79. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

80. *Тихонов А.Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023–1026.

81. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

82. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.

83. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

84. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В.* и др. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.

85. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

86. *Фаддеев Л.Д.* Свойства *S*-матрицы одномерного уравнения Шредингера // Труды мат. ин-та АН СССР. 1964. № 73. С. 313–336.

87. *Федотов А.М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.

88. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

89. *Чудов Л.А.* Обратная задача Штурма–Лиувилля // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 451–454.

90. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.

91. *Ambarzumijan V.A.* Uber eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschr. fur Phisik. 1929. Bd.53. S. 690–695.

92. *Aronszain N.* A unique continuation theorem for solution of elliptic partial differential equations or inequalities of second order // J. Math. pures et appl. 1957. V. 9, N 36. P. 235–249.

93. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. Bd. 78, N 1. S. 1–96.

94. *Hadamard J.* Sur les problems aux derivees partielles et leur signification phisique // Bull. Univ. Princeton. 1902.

95. *Hadamard J.* Le problem de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineares hyperboliques. Paris: Herman, 1932.

96. *John F.* Continuous dependence on date for solutions of partial differential equations with a prescribed bound // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. N 4. P. 551–585.

97. *Kulik P.P., Riaby V.A., Rozanov E.K.* The electrical and thermal conductivities of highly non ideal alkali metal Plasmas // Transport properties of dense plasmas. Berlin: Academic-Verlag, 1983. P. 33–53.

98. *Levinson N.* The inverse Sturm–Liouville problem // Math. Tidsskr. Ser. B. 1949. P. 25–30.

99. *Levinson N.* On the uniqueness of the potential in a Schrodinger equation for a given asymtotic phase // Kgl. Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 1949. V. 25, N 9. P. 1–25.

100. *Lorenzi A.* An inverse problem for a quasilinear parabolic equation // Ann. di Mat. pura ed appl. 1985. V. 142. P. 145–169.

101. *Mizohata S.* Unicite du prolongement des solutions pourquelques operateurs differentiels paraboliquers // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser A. 1958. N 31. P. 115–130.

102. *Pucci C.* Sui problemi Canchy non 'ben posti' // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur. 1955. V. 18, N 5. P. 473–477.

103. *Radon J.* Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrawerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften. Leipzig. Math.-Phys. Kl. N 69. S. 262–267. [Имеется перевод в кн.: Хелгасон. С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.]

Учебное издание

ДЕНИСОВ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Зав. редакцией *Л.А. Николова*
Редактор *И.М. Рогова*
Художественный редактор *Ю.М. Добрянская*
Технический редактор *Н.И. Матюшина*
Оператор ПЭВМ *К.Е. Панкратьев*
Корректоры *В.П. Кададинская,*
Т.С. Милякова,