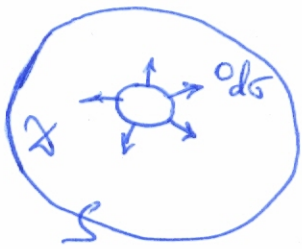


① Некоторые математические модели, описывающие уравнения в частных производных.

1. Вибро уравнение колебания мембраны.



ρ - плотность мембраны
 k - коэффициент натяжения
 T_k - кинетическая энергия
 T_p - потенциальная энергия.

u - отклонение мембраны, $u = u(x, y, t)$

$$T_k = \int_{\Sigma} \rho \frac{u_t^2}{2} d\sigma, \quad T_p = \left(\int_{\Sigma} k \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} d\sigma - \int_{\Sigma} k d\sigma \right) \approx$$

$$\approx \left(\int_{\Sigma} k \left(1 + \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} u_y^2 \right) d\sigma - \int_{\Sigma} k d\sigma \right)$$

↑
 Введем огибающую, т.е. $u_x^2, u_y^2 \ll 1$, т.е. пропорционально не велики

$$\Rightarrow T_p = \int_{\Sigma} \frac{k}{2} (u_x^2 + u_y^2) d\sigma$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \left\{ \rho u_t^2 - k(u_x^2 + u_y^2) \right\} d\sigma dt \leftarrow \text{лагранжиан}$$

ищем минимумы \Rightarrow уравнение Эйлера - Лагранжа \Rightarrow

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = \delta(y) \quad y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1 \Rightarrow F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$\int_{\Sigma} F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) d\sigma = \delta \int_{\Sigma} F d\sigma \Rightarrow F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_f = 0 \int$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) = 0$$

↑
 при предположении, что u имеет форму преобразования в плоскости

$$\rho \text{ и } k = \text{const} \Rightarrow \rho u_{tt} = k(u_{xx} + u_{yy}) \Rightarrow \boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u}$$

$$\text{где } a^2 = k/\rho$$

Край закреплен $\Rightarrow u|_{\Sigma} = 0$

Начальные условия $\Rightarrow u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y)$

Имеется также и трехмерная задача: $u_{tt} = \Delta u$ для $x = \mathbb{R}^3$

2. Вывод уравнения распространения тепла.



$$d\Omega x = 3$$

c - удельная теплоемкость

ρ - плотность

k - коэффициент теплопроводности.

$u(x, t)$ - температура

$$\text{Баланс тепла: } \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_V c \rho u_t dV$$

$$\Rightarrow \text{по формуле Гаусса-Остроградского} \Rightarrow \int_V d\Omega(k \operatorname{grad} u) dV = \int_V c \rho u_t dV$$

$$\Rightarrow d\Omega(k \operatorname{grad} u) = c \rho u_t$$

$$\text{Если } k = \text{const} \Rightarrow \boxed{u_t = a^2 \Delta u}, \text{ где } a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

Начальные условия и граничные условия: $u|_s = f(x)$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}|_s = \psi(x)$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u|_s = h(x, t)$$

② Волновое уравнение, формула Кирхгофа

$\Delta u - u_{tt} = 0 \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3, t \in E^1; u(x, 0) = \varphi(x); \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$

↑
волновое уравнение

рассмотрим $n = 3$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

↑
интегрированное уравнение в E^{n+1}

Лемма: $u(x, t) = \int_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|y-x|} dy$, где $|y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$

S - сфера с центром в x и радиусом t , $S = \{ |x-y|^2 = t^2 \}$

$\mu(y_1, y_2, y_3) \in C^2$ на S по y_1, y_2, y_3 . $u(x, t)$ - регулярное решение в E^4

Док-во: Сделаем замену переменных: $y_i = x_i + t \xi_i \quad i=1, 2, 3$

$\Rightarrow |\xi| = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$

$|y-x|^2 = t^2$, $dy = t^2 d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности $|\xi|=1$

$\Rightarrow u(x, t) = t \int_\sigma \mu(x + t\xi) d\sigma_\xi$

$\Rightarrow \Delta u = t \int_\sigma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [t \int_\sigma \mu(x + t\xi) d\sigma_\xi] = \int_\sigma \mu(x + t\xi) d\sigma_\xi + t \int_\sigma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \xi_i d\sigma_\xi =$

$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I$, где $I = \int_\sigma [\frac{\partial \mu}{\partial y_1} \partial_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} \partial_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3} \partial_3] d\sigma_\xi$, $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ - внешние нормали к сфере

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} (\frac{u}{t} + \frac{1}{t} I) - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial I}{\partial t} =$

$= \frac{1}{t} \frac{\partial I}{\partial t}$

По ф. и Гаусса - Остроградского $I = \int_{|x-y| \leq t} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} dy = \int_\Omega \Delta \mu dy$

Перейдем к сферическим координатам y_1, y_2, y_3 к сферическим ρ, φ, θ

$y_1 = x_1 + \rho \cos \varphi \sin \theta$; $\theta \in [0, \pi]$

$y_2 = x_2 + \rho \sin \varphi \sin \theta$; $\varphi \in [0, 2\pi]$

$y_3 = x_3 + \rho \cos \theta$

$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$

$\Rightarrow dy = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$

$\Rightarrow I = \int_0^t \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \Delta \mu d\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int_\sigma \Delta \mu d\sigma_\xi$, так $\sin \theta d\theta d\varphi = d\sigma_\xi \Rightarrow \frac{1}{t} \frac{\partial I}{\partial t} = t \int_\sigma \Delta \mu d\sigma_\xi = \Delta u$ и т.д.

$$\pm M(\mu) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\sigma} \mu(y) d\sigma_y \Rightarrow M(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \mu(y) d\sigma_y$$

$$\Rightarrow M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\Sigma} \mu(y) ds_y$$

$\pm M(\psi)$ - регуляризованное решение

$\frac{\partial}{\partial t} [\pm M(\psi)]$ - регуляризованное решение, где уравнение имеет неограниченные коэффициенты

если $\psi(x) \in C^3$, $\chi(x) \in C^2$

$$\Rightarrow u(x,t) = \pm M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t} [\pm M(\psi)] \leftarrow \text{регуляризованное решение}$$

\uparrow
р-е по Кирхгофу

$$u(x,0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \psi(x) d\sigma_x = \psi(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \chi(x) d\sigma_x = \chi(x)$$

⑤ Формула Пуассона, метод сущеса.

$$\Delta u = u_{tt} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad t \in E^1; u|_{t=0} = \varphi(x) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

Рассмотрим $n=2$. Решение имеет вид по формуле из ф-лы Кирхгофа методом сущеса.

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|^2=t^2} \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2) dy + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|y|^2=t^2} \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2) dy \right]$$

При введении сферических координат для проекции верхней и нижней полушаров на круг.

$$dy_1 dy_2 = \cos(\vec{z}, \vec{r}) = \frac{y_3}{|r|} dS_y$$

$$\Rightarrow dS_y = \frac{t dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

где $\alpha = \text{круг} : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$

↑
ф-ла Пуассона

10) Эллиптические уравнения, эллиптические функции, конформность, принцип экстремума

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \quad A_{ij} = A_{ji}$$

L удовлетворяет усл. равен эллиптическому.

$$a_{ij} = \frac{\text{элементарное произведение } \alpha_i - \alpha_j}{\det \|A_{ij}\| = A}$$

Введем ϕ -ю $\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (x_i - y_i)(x_j - y_j)$

Введем ψ -ю функцию:
$$\psi(x,y) = \begin{cases} \frac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{2}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\omega_n}, & n > 2, \text{ где } \omega_n \text{ — площадь сф. слоя в } E_n \\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}} \ln \sigma, & n = 2 \end{cases}$$

Когда $A_{ij} = 0, i \neq j, A_{ii} = 1, i=1-n \Rightarrow \sigma(x,y) = |x-y|^2, A(y) = 1$

$\Rightarrow \omega_n \psi(x,y)$ — элементарное решение. ур-ние Лапласа в n -р. E_n

$$\omega_n \psi(x,y) = E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} |x-y|^{2-n}, & n > 2 \\ -\ln|x-y|, & n = 2 \end{cases}$$

ψ -я $u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_D E(x,y) \mu(y) dT_y$ — потенциал равномерно распределенной массы, распределенной по области D с плотностью μ .

Рассеи $n=2 \Rightarrow Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^2 B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

Будем искать $u(x)$ в виде: $u(x) = \omega(x) + \frac{1}{2\pi} \int_D \ln|x-y| \mu(y) dT_y$

$\Rightarrow \mu(x) + \int_D K(x,y) \mu(y) dT_y = f(x)$, где $f(x) = Lu(x) - f(x)$, а

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^2 B_i(x) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} + C(x) \ln|x-y| \right]$$

Это интегральное ур-ние Фредергольма 2-го рода, ядро которого имеет особенность при $x=y$.

Принцип экстремума: если в области D введя $C(x) < 0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-ния $Lu = 0$ не в одно время $x \in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Док-во: $\exists u(x) < 0$ в $x \in D$ достигается отрицательного минимума,

тогда $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, i=1-n; \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot 1_i \cdot 1_j \geq 0$ где $1_i = 1_n = \forall$ — всех. параметр

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} 1_i 1_j = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g_{ki} \right)^2 \Rightarrow A_{ij} = \sum_{s=1}^n g_{si} g_{sj} \quad i,j=1-n$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si} g_{sj} \geq 0$$

$$\Rightarrow \{ u(x) < 0 \} \Rightarrow Lu > 0 \nexists u = 0 \text{ на } \partial D$$

1) Гиперболические уравнения общего вида, сепаратные операторы, функции Римана.

канонический вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = F(x,y)$

$\xi = x+y, \eta = x-y \Rightarrow Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F$, где

$4a = A+B, 4b = A-B, 4c = C, 4F = F_1$

$u(\xi, \eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$

характеристиками уравнения являются $\xi = const, \eta = const$

В предположении сепаратности операторов a и b

можно ввести оператор: $L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv = 0$, где

L^* - сопряженный к L

Опр: решение $v(\xi, \eta)$ сопряженного уравнения:

$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}(av) - \frac{\partial}{\partial \eta}(bv) + cv = 0$, удовлетворяющее на

характеристиках $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ условиям:

$v(\xi_1, \eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2) d\eta_2}, v(\xi, \eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1) d\xi_2}$,

где (ξ_1, η_1) - произвольно фиксированная точка области D заданного уравнения $Lu = F$, на д. функции Римана.

При выполнении предположений непрерывности $\frac{\partial a}{\partial \xi}, \frac{\partial b}{\partial \eta}$ и c д-я Римана существует.

Принципиальное сопряженное уравнение:

$$\begin{aligned} & v(\xi, \eta) + v(\xi, \eta_1) - v(\xi, \eta_1) - v(\xi_1, \eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta) v(\xi_2, \eta) d\xi_2 - \\ & - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi, \eta_2) v(\xi, \eta_2) d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2, \eta_2) v(\xi_2, \eta_2) d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1) v(\xi_2, \eta_1) d\xi_2 \\ & + \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2) v(\xi_1, \eta_2) d\eta_2 = 0 \end{aligned}$$

Из определения следует: $v(\xi, \eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2, \eta_1) v(\xi_2, \eta_1) d\xi_2 = 1$,

$v(\xi_1, \eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1, \eta_2) v(\xi_1, \eta_2) d\eta_2 = 1, v(\xi_1, \eta_1) = 1$

\$\Rightarrow\$ полученное равенство можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно \$v(z, y)\$

$$v(z, y) - \int_{z_1}^z b(z_2, y) v(z_2, y) dz_2 - \int_{y_1}^y a(z, y_2) v(z, y_2) dy_2 + \int_{z_1}^z \int_{y_1}^y k(z_2, y_2) v(z_2, y_2) dy_2 dz_2 = 1$$

Такое уравнение имеет единственное решение

\$v = R(z, y; z_1, y_1)\$: Из определения \$\Rightarrow\$

$$\frac{\partial R(z_1, y; z_1, y_1)}{\partial y} - a(z_1, y) R(z_1, y; z_1, y_1) = 0$$

$$R(z_1, y; z_1, y_1) = 1$$

$$\frac{\partial R(z, y_1; z_1, y_1)}{\partial z} - b(z, y_1) R(z, y_1; z_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial R(z, y; z, y_1)}{\partial z_1} + a(z, y_1) R(z, y; z, y_1) = 0$$

$$R(z, y; z, y) = 1$$

$$\frac{\partial R(z, y; z_1, y)}{\partial z_1} + b(z_1, y) R(z, y; z_1, y) = 0$$

Возьмем, что \$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial y_1} [u(z_1, y_1) R(z_1, y_1; z, y) - R(z_1, y_1; z, y) \langle u(z_1, y_1) \rangle] =

$$= \frac{\partial}{\partial z_1} [u \left(\frac{\partial R}{\partial y_1} - a R \right)] + \frac{\partial}{\partial y_1} [u \left(\frac{\partial R}{\partial z_1} - b R \right)] \leftarrow \text{интегрируем по } z_1 \text{ и } y_1 \text{ в промежутках } z_0 \leq z_1 \leq z, y_0 \leq y_1 \leq y$$

$$\Rightarrow u(z, y) = u(z_0, y_0) R(z_0, y_0; z, y) + \int_{z_0}^z R(z_1, y_0; z, y) \left[\frac{\partial u(z_1, y_0)}{\partial z_1} + b(z_1, y_0) u(z_1, y_0) \right] dz_1 + \int_{y_0}^y R(z_0, y_1; z, y) \left[\frac{\partial u(z_0, y_1)}{\partial y_1} + a(z_0, y_1) u(z_0, y_1) \right] dy_1$$

При \$u(z, y) = R(z_0, y_0; z, y) \Rightarrow \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y R(z_1, y_1; z, y) \langle R(z_0, y_0; z_1, y_1) \rangle dz_1 dy_1 = 0\$

\$\Rightarrow\$ т.е. функция \$R(z, y; z_1, y_1)\$ относительно переменных \$z_1, y_1\$ является решением однородного уравнения \$\langle R(z, y; z_1, y_1) \rangle = 0\$.

Аналогично при непрерывном изменении точек \$F(z, y)\$

уравнение \$Lu = F\$ имеет у его решений решение 4-го

$$u_0(z, y) = \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y R(z_1, y_1; z, y) F(z_1, y_1) dz_1 dy_1$$

② Гиперболические уравнения общего вида, задача Коши.

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + a \frac{\partial u}{\partial z} + b \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + cu = F; \quad L^* \bar{v} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} (a\bar{z}) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} (b\bar{z}) + c\bar{v}$$



σ - разомкнутая дуга Жордана с невр. кривизной, касательная в точке касания с характеристиками Q' и Q - точки пересечения характеристик с кривой

\forall функции двурядеренных в области G функций $u(z_1, y_1)$ и $\bar{v}(z_2, y_2)$

верно справедливо: $2(\bar{v}Lu - uL^*\bar{v}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \bar{v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z_1} u + 2b\bar{v}u \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \bar{v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} u + 2a\bar{v}u \right)$

Принтегрируем по области G справедливо и применим формулу Грина:

$$\int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial G} (P dx + Q dy)$$

$$\Rightarrow 2 \int_G (\bar{v}Lu - uL^*\bar{v}) dz dy = \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \bar{v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y_1} u + 2a\bar{v}u \right) dy_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \bar{v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z_1} u + 2b\bar{v}u \right) dz_1$$

$\int u(z_1, y_1) = u(P')$ - решение уравнения $Lu = F$

$\bar{v}(z_1, y_1) = \bar{v}(P') = K(z_1, y_1; z_1, y_1) = K(P', P)$

$$\Rightarrow u(P) = \frac{1}{2} u(Q) K(Q, P) + \frac{1}{2} u(Q') K(Q', P) + \int_G F(P') K(P', P) dz_1 dy_1 - \frac{1}{2} \int_{Q'Q} \left[\frac{\partial u(P')}{\partial \bar{w}} K(P', P) - u(P') \frac{\partial K(P', P)}{\partial \bar{w}} \right] d\bar{w}_{P'}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial z_1}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial y_1}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial y_1}$, \bar{v} - внешняя нормаль дуги σ в точке P'

Если в правую часть будем ставить 0, то u и $\frac{\partial u}{\partial \bar{w}}$ - произвольны заданные на σ достаточно указать \bar{v} -ую, то $u(P)$ - решение $Lu = F$

Если искомое решение $u(P)$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial \bar{w}}$, где \bar{w} - заданный на σ вектор, который никак не связан с касательным к σ , известен на σ ,

$u(P) = \varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial \bar{w}} = \psi(P)$, $P \in \sigma$,

где φ и ψ - сов. функции и если раз невр. дуга-линия, $\frac{\partial u}{\partial \bar{w}}$ всегда можно определить однозначно.

\Rightarrow непрерывная \bar{w} -ая дает решение задачи Коши $Lu = F$ и $u(P) = \varphi(P)$ $P \in \sigma$
 Избранный произвольный \bar{w} -вектор \Rightarrow решение единственно и хорошо $\frac{\partial u(P)}{\partial \bar{w}} = \psi(P)$

13) Гиперболическое уравнение с двумя переменными, задача Гурса

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial z} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F$$

$$u(z, \eta) = u(z_0, \eta_0) R(z_0, \eta_0; z, \eta) + \int_{z_0}^z R(z_1, \eta_0; z, \eta) \left[\frac{\partial u(z_1, \eta_0)}{\partial z_1} + b(z_1, \eta_0) u(z_1, \eta_0) \right] dz_1 +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} R(z_0, \eta_1; z, \eta) \left[\frac{\partial u(z_0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(z_0, \eta_1) u(z_0, \eta_1) \right] d\eta_1 +$$

$$+ \int_{z_0}^z \int_{\eta_0}^{\eta} R(z_1, \eta_1; z, \eta) \mathcal{L}u(z_1, \eta_1) dz_1 d\eta_1 \leftarrow u(z, \eta) - \text{решение } \mathcal{L}u = F$$

продолженное по расходу

$$\Rightarrow u(z, \eta) = R(z, \eta_0; z, \eta) u(z, \eta_0) + R(z_0, \eta; z, \eta) u(z_0, \eta) -$$

$$- R(z_0, \eta_0; z, \eta) u(z_0, \eta_0) + \int_{z_0}^z [b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; z, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; z, \eta)] u(t, \eta_0) dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} [a(z_0, \tau) R(z_0, \tau; z, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} R(z_0, \tau; z, \eta)] u(z_0, \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{z_0}^z \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; z, \eta) F(t, \tau) dt d\tau \leftarrow \text{если в правой части заменить}$$

$u(z, \eta_0)$ и $u(z_0, \eta)$ на произвольные непрерывные функции φ -им, а $u(z_0, \eta_0)$ на const, то получим решение $u(z, \eta)$ - функция-решение $\mathcal{L}u = F$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}u = F \\ u(z, \eta_0) = \varphi(z) \\ u(z_0, \eta) = \psi(\eta) \end{cases}$$

← задача Гурса

где $\varphi(z)$ и $\psi(\eta)$ - непрерывные функции: $\varphi(z_0) = \psi(\eta_0)$

→ такая задача имеет единственное решение $u(z, \eta)$:

$$u(z, \eta) = R(z, \eta_0; z, \eta) \varphi(z) + R(z_0, \eta; z, \eta) \psi(\eta) + R(z_0, \eta_0; z, \eta) \varphi(z_0) +$$

$$+ \int_{z_0}^z [b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; z, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; z, \eta)] \varphi(t) dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta} [a(z_0, \tau) R(z_0, \tau; z, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} R(z_0, \tau; z, \eta)] \psi(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{z_0}^z \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; z, \eta) F(t, \tau) dt d\tau$$

14) Классические решения, метод разделения переменных, собственные ф-ии и собственные значения

Классическими наз регулярные решения уравнения в заданных пределах, удовлетворяющие соотв. краевые, начальные, граничные и т.д. условиям рассматриваемой задачи в данном смысле, т.е. в каждой точке области заданных

Метод разделения переменных:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = \alpha(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u$$

Будем искать решение в виде: $u(x,t) = v(x)w(t)$

$$\Rightarrow w(t) \left[\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)v \right] = v(x) \left[\alpha(t) \frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t) \frac{dw}{dt} + \gamma(t)w \right]$$

Для того, чтобы равенство выполнялось для всех x и t в области заданных уравнениям надо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x) + \lambda]v = 0$$

$$\alpha(t) \frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t) \frac{dw}{dt} + [\gamma(t) + \lambda]w = 0 \quad \text{где } \lambda = \text{const}$$

\Rightarrow получим ОДУ и уравнение в заданных пределах, в котором разделим переменные на единичные множители

Пример: колебания упругой мембраны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad u(x,y,0) = \psi(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \varphi(x,y) \quad \text{в } G$$

$$u(x,y,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x,y) \in S = \partial G$$

\Rightarrow метод разделения переменных \Rightarrow

$$\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 \quad \text{и} \quad w''(t) + \lambda w(t) = 0 \quad \lambda = \text{const}$$

$$v(x,y) = 0 \quad (x,y) \in S$$

значим λ , для которого задача имеет нетривиальные решения, как собственные значения, а $v(x,y)$ - соответствующее λ собственное ф.-ей.

Имеем место тождество: $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda v^2$

\Rightarrow интегрируем и применим т-ту Остр. Гаусса \Rightarrow

$$\int_G (\lambda x^2 + \lambda y^2) dx dy = \int_S v \frac{\partial v}{\partial n} ds + \lambda \int_G v^2 dx dy = \lambda \int_G v^2 dx dy \Rightarrow \lambda > 0, \text{ тк } v(x,y) \neq 0 \text{ и } \text{рассчитываем}$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu^2, \text{ где } \mu = \text{const} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \vec{w}(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$, где $c_1, c_2 = \text{const}$
Допустимо значение $\mu > 0$.

$\Rightarrow u_n(x, y, t) = \delta_n(x, y) (a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$ $n = 1, 2, \dots$

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(x, y) (a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$$

$$\text{и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n(x, y) = \varphi(x, y); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n \delta_n(x, y) = \psi(x, y) \quad (x, y) \in G$$

$\{\delta_n\}$ - МЗ и $\int_G \delta_n \delta_m dx dy = 0$ при $n \neq m$

\Rightarrow будем считать, что $\{\delta_n\}$ - ортонормированна

$$\Rightarrow a_n = \int_G \varphi(x, y) \delta_n(x, y) dx dy, \quad b_n = \left[\int_G \psi(x, y) \delta_n(x, y) dx dy \right] \frac{1}{\mu_n}$$

15) Вариационные методы. Метод Рунца.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются уравнения в частных производных. Эти методы применимы к задачам для уравнений в частных производных при помощи какого-либо вариационного или вариационного метода.

Метод Рунца: минимизация ϕ -ая $\Phi(u)$

$\{ \Gamma_n \}$ $n=1,2, \dots$ — полная система функций ϕ -ая
 Составим координатные функции $\{ u_n = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \}$ $n=1,2, \dots$ $C_k = const$
 Определим коэффициенты $C_k, k=1, \dots, n$ так, чтобы вращение $u_n = \Phi(u_n)$ как ϕ -ая $C_1 \dots C_n$ было минимальным

Пример: $I(u) = \frac{\Delta u}{H(u)}$, где $\Delta(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$

где $G = \{ 0 < x < \delta, 0 < y < \delta \}$ и $H(u) = \int_G u^2(x,y) dx dy$
 граничные: $u(x,y) = 0$ в $S = \partial G$ и центр. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ — центр краев ∂G .
 В канале помещены стержни $\{ \delta m_k x \times \delta m_l y \}$ $k, l = 1, 2, \dots$

$\{ u_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n C_{kl} \delta m_k x \times \delta m_l y \}$ $n, m = 1, 2, \dots$

u_{mn} является функциями для ϕ -ая $I(u)$. и

$d_{mn} = \Delta(u_{mn}) = \frac{\delta^2}{4} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n C_{kl}^2 (k^2 + l^2)$

$H(u_{mn}) = \frac{\delta^2}{4} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n C_{kl}^2 = 1$

- \Rightarrow какова наименьшая d_{mn} при условии, что $\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n C_{kl}^2 = \frac{4}{\delta^2}$
- \Rightarrow получаем задачу на условный экстремум
- \Rightarrow решая, получаем, что $\forall m, n$ $C_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $l \neq 1$ соответственно

$C_{11} = \frac{2}{\pi} ; d_{mn} = 2$

$\Rightarrow \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} u_{mn} = u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sin x \sin y$, $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} d_{mn} = \Delta(u) = 2 = 1$

\Rightarrow мы получили решение задачи о соответствующих значениях

$\Delta u + \lambda u = 0$ в G
 $u(x,y) = 0$ в $S = \partial G$

⇒ за решение задачи Минимизации λ_n при $K(u_n) = 1$

можно писать f в виде $u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n C_k \phi_k(x, y)$

где C_k $k=1, 2, \dots$ — коэффициенты из задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_n (a - C_k) = D(u_n) = u_n \\ h_n (a - C_k) = K(u_n) = 1 \end{array} \right.$$

$$h_n (a - C_k) = K(u_n) = 1$$

⇒ u_n — приближенное решение задачи f при

$\lambda_n = D(u_n)$ — приближенное оптимальное значение

16) Метод Бундева - Галеркина

Задача о собственных значениях $\Delta u + \lambda u = 0$ в G

$$u(x, y) = 0 \text{ в } \Gamma = \partial G$$

\Rightarrow минимизируем J -интеграл $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$

$$D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad H(u) = \int_G u^2(x, y) dx dy, \quad H(u) = 1$$

\Rightarrow $\delta_n \{ n=1, 2, \dots \}$ - полная система функций δ -интеграла

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k \delta_k \quad \{ n=1, 2, \dots \} \quad c_k = \text{const}$$

Которыми c_k определяются из равенств:

$$H(\Delta u_n + \lambda u_n, \delta_m) = 0 \quad m = \overline{1, n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n H(\Delta \delta_k + \lambda \delta_k, \delta_m) c_k = 0 \quad m = \overline{1, n}$$

\Rightarrow получили однородную СЛАУ, в которой много неизвестных равно нулю ур-циям.

Такая система имеет ненулевые решения \Leftrightarrow

$$\det \begin{bmatrix} H(\Delta \delta_1 + \lambda \delta_1, \delta_1) - \lambda & \dots & H(\Delta \delta_n + \lambda \delta_n, \delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H(\Delta \delta_1 + \lambda \delta_1, \delta_n) & \dots & H(\Delta \delta_n + \lambda \delta_n, \delta_n) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

\Rightarrow отсюда находим λ .

$c_k, k = \overline{1, n}$ - ненулевые решения системы

$$\Rightarrow u_n = \sum_{k=1}^n c_k \delta_k$$

17) Обобщенные граничные задачи для уравнения эллиптического типа.

$$Lu = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}) + \sum_{i=1}^n l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x) \quad x \in G$$

где $B \subset E_n$ - отр и $S = \partial G$ - $(n-1)$ -мерная поверхность

$u(x) = f(x)$, $x \in S$, $f(x)$ - грав. крив. φ -я.

Рассмотрим граничные задачи Дирихле типа обобщенно для обобщенно краевое условие $u(x) = 0$, $x \in S$.

Дип: В предположении, что A_{jk}, l_i, c - обратимые функции-матрицы и $f \in L_2(G)$, для обобщенных граничных задач $Lu = f$, $u(x) = 0$ на S ищем φ -я $u(x) \in W_2^1$, для которых имеет место соотношение:

$$\int_G \left(- \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n l_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + cu\varphi - f\varphi \right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_2^1$$

имеем по $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ интегрируемость по частям (интегрируем по частям) первого порядка

Говорят, что φ -я $\varphi(x)$ является обобщенным краевым условием порядка m к-ти $u(x)$, если имеет место соотношение:

$$\int_G u D^m \varphi dx = (-1)^m \int_G \varphi \psi dx$$

\forall функции φ с компактными носителями в G

Если обобщенное решение $u(x) \in C^{2,0}(G)$ и φ -ти A_{jk} постоянны

какие, то соотношение из определения можно переписать: $\int_G (Lu - f)\varphi dx = 0$. Отсюда, следуя из $Lu = f \Rightarrow$, что $u(x)$ - вл. классическим решением задачи.

$$\exists \exists L^* \neq L^* w = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial w}{\partial x_k}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (l_i w) + cw.$$

Дип: обобщенные решения сопряженной уравне $L^* w = 0$, удовлетв $w(x) = 0$, $x \in S$, на φ -я $w(x) \in W_2^1$.

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) v + c u v \right) dx = 0 \quad \forall v \in W_2^1$$

Задача $L^* u = 0$, $u(x) = 0$ $x \in \Gamma$, как сопряженная к задаче $Lu = f$, $u(x) = 0$ $x \in \Gamma$.

Аналогично: одностороннее решение $u(x)$ из $C^{2,p}(G)$ является классическим решением.

Утверждения: ① Гомогенная задача Дирихле для эллиптического уравнения $Lu = 0$ и сопряженная к ней задача имеют одинаковое, не более чем конечное число ЛЗ решений.

② Для разрешимости задачи $Lu = f$, $u(x) = 0$ $x \in \Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы для $f(x)$ выполнялось условие

$$\int_G f v_i dx = 0, \text{ где } v_i, i=1, \dots, l - \text{ все ЛЗ решения сопряженной задачи}$$

③ В области достаточно малом меро эллиптическая задача $Lu = 0$, $u(x) = 0$, $x \in \Gamma$, имеет только тривиальное решение.

\Rightarrow Теорема: Задача $Lu = f$ в G , $u(x) = 0$ в Γ $\forall f$ разрешима и имеет единственно \Leftrightarrow эквив. к эллиптической задаче $Lu = 0$ в G , $u(x) = 0$ в Γ не имеет нетривиальных решений.

Из Т. и ⑤ \Rightarrow в области достаточно малом меро $\exists!$ решение

Пример: $u(x, 0) = 0$, $x \in G$; $Au = -f(x)$, $f \in L_2$

$$\int_G f v dx = F(v) = \int_G \nabla u \nabla v dx \quad \forall v$$

$\Rightarrow \exists$ одностороннее решение $u(x)$: $\int_G (\nabla u \nabla v - f v) dx = 0$

Если $f(x) \equiv 0 \Rightarrow u_0$ -одностороннее решение: $\int_G (\nabla u_0)^2 dx = 0$

$\Rightarrow u_0(x) \stackrel{n.v.}{\equiv} 0$ в $G \Rightarrow$ имеет место единственность.

18) Обобщенные граничные условия задачи для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x, t), \text{ где } Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [A_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}] + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u$$

L - равномерно эллиптический в $\Omega \subset E_n$

$G \subset E_n$ - вып. обл., $Q = \{G \times (0, T)\} \subset \Omega$

$S = \{\partial G \times (0, T)\}$, $T = \text{const} > 0$.

$u(x, 0) = \tau(x)$, $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \nu(x)$, $u|_S = 0$.

Дипр: обобщенные граничные условия задачи в пространстве $W_2^1(Q)$ как для $u(x, t) \in W_2^1$, удовлетворяющая как условиям и граничным.

$$\int_Q \left(- \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta - c u \delta \right) dx dt =$$

$$= \int_G \nu(x) \delta(x, 0) dx + \int_Q f \delta dx dt \quad \forall \delta(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q) \text{ и } \delta(x, T) = 0$$

под условием или, иначе, достаточно потребовать, чтобы

A_{ij}, b_i, c - ограничены и непрерывны, а $f \in L_2(Q), \nu \in L_2(G)$

При $\tau(x) \equiv 0$ намиagnиваются фн. условия относительно начальных значений, а-им $\nu(x)$ и граничных обл. Q . для классического решения задачи

используя одно фн. представление:

$\{ f_k(x, t) \}_{k=1,2, \dots}$ - вып. кол-во, $f_k(x, t) \in L_2(Q)$.

$f_k(x, t) \rightarrow f(x, t)$ \forall фиксированное $t \in (0, T)$

Если $\forall k$ задача при $f = f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x, t) \in C_2(Q)$, и для $u(x, t)$ - предел $\{ u_k(x, t) \} \in L_2(Q)$ при \forall фикс. $t \in (0, T)$, то эту f -ю как обобщенное решение задачи.

рассея. пример:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) \text{ в } Q$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \quad x \in G, \quad u|_S = 0.$$

Будем использовать определение энергии через интегралы по области.

$$E_k^2(t) = \frac{1}{2} \int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u_k)^2 \right] dx = \int_0^t dt_1 \int_G \frac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1} f_k(x, t_1) dx$$

Ищем решение в виде $u_k(x, t) = u_{k+}(x, t) = 0 \quad x \in G, \quad u_k|_S = 0$

$$\frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u_k(x, t) = f_k(x, t) \text{ в } Q \quad | \quad x \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t_1} \text{ и м.н. по } Q \Rightarrow$$

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x, t_1) \frac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1} dx = \int_0^t dt_1 \int_G \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1} \right)^2 + \nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dx$$

Применим теорему Гаусса и учтем, что $\nabla \cdot \text{grad} u_k = \Delta u_k$

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x, t_1) \frac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1} dx = \frac{1}{2} \int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1} \right)^2 + (\nabla u_k)^2 \right]_{t_1=0}^{t_1=t} dx - \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial n} dS$$

где ∂G - граница области G в момент времени t_1 .

$$u_k|_S = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial t_1} = 0, \quad \nabla u_k = 0, \quad x \in G. \quad u$$

$$\int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial n} dS = \int_0^t \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow \text{где } \left\{ \right.$$

$$\frac{d}{dt} [E_k^2(t)] = 2 E_k(t) \frac{d}{dt} E_k(t) = \int_G \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} f_k(x, t) dx$$

$$\Rightarrow 2 E_k \frac{d}{dt} E_k(t) \leq \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \|f_k\| \quad \left. \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{2} E_k(t) \\ \Rightarrow \frac{d E_k(t)}{dt} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f_k\| \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow E_k(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f_k(t_1)\| dt_1 \Rightarrow \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \leq \int_0^t \|f_k(t_1)\| dt_1$$

$$2 \|u_k\| \frac{d}{dt} \|u_k\| = 2 \int_G u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dx \leq 2 \|u_k\| \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|u_k\| \leq \int_0^t \|f_k(t_1)\| dt_1 \Rightarrow \|u_k\| \leq \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \|f_k(t_2)\| dt_2 = \int_0^t (t-t_1) \|f_k(t_2)\| dt_2$$

\Rightarrow из условия $f_k \in L_2(G) \forall t \in [0, T]$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists N > 0: \|f_{N+p} - f_N\| < \epsilon \quad \forall p > 0$$

$$\Rightarrow \|u_{N+p}(x, t) - u_N(x, t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} t^2 \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \{u_k\} - \text{фунг} \Rightarrow \exists u \in L_2(G) \Rightarrow \{u_k\} \rightarrow u \in L_2(G).$$

\Rightarrow $\exists!$ обобщенное решение

ⓐ Обобщенные граничные условия классических задач для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x, t)$$

L - параболический оператор в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - ось ax , $Q = \{G \times (0 < t < T)\} \subset \Omega$

$S = \{G \times (0 \leq t \leq T)\}$, $T = \text{const} > 0$

$u(x, 0) = \varphi(x) \in G$, $u(x_0, t) = \psi(t)$, $(x_0, t) \in S'$

Доп: на обобщенные граничные задачи при $\varphi(t) \equiv 0$ в W_2^1 в предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, выполняется $\varphi \rightarrow u(x, t) \in W_2^1 \circ$

$$\int_Q \left(-u \frac{\partial \delta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \delta}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta - c u \delta \right) dx dt =$$

$$= \int_G \varphi \delta(x, 0) dx + \int_Q f \delta dx dt \quad \forall \delta(x, t) \in W_2^1 \text{ и } \delta(x, T) = 0$$

Классические граничные задачи $u(x, t)$ при $\varphi(t) \equiv 0$ также характеризуются тем же свойством.

Аналогично широтамежному типу обобщенные граничные условия вводят при последовательности

Пример: $\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x, t)$ $(x, t) \in Q$

$u_k(x, 0) = 0, x \in G$; $u_k|_S = 0$

∃! макс. решение u_k .

Справедлива оценка $|u_k(x, t)| \leq T M_k$, если $\max_{(x,t) \in Q \cup \partial Q} |f_k(x, t)| \leq M_k$

Докажем оценку: ∃ $(x_0, t_0): u_k(x_0, t_0) > T M_k$

$\Rightarrow \delta(x, t) = u_k(x, t) + M_k(T-t)$ примет макс. в $Q \cup \partial Q$ в c

т.е. $\Delta \delta - \frac{\partial \delta}{\partial t} = -f_k(x, t) + M_k > 0$

Если $u_k(x, t) < -T M_k$ ✗.

∃ f_k - функция Липшица $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0: |f_{N+p} - f_N| < \varepsilon \forall p > 0$

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t - \Delta)(u_{N+p} - u_N) &= f_{N+p} - f_N \\ u_{N+p}(x, 0) - u_N(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |u_{N+p} - u_N| \leq T \varepsilon$$

\Rightarrow $\{u_k\}$ -функция $\Rightarrow \exists u(x,t): \{u_k\} \xrightarrow{\text{полн}} u(x,t)$.

$u(x,t)$ - непрерывное поле.

20) Вариационные методы, первая вариационная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in G$$

$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in S = \partial G, \varphi(x, y)$ - кепр в S .

$\Delta(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$ - интеграл Дирихле

Дир. ф-ии, кепр в $G \cup S$ и имеющие крив-кепр краевойне первого порядка в G , такие что для них существует интеграл Дирихле и они удовлетворяют краевойму условию, наз. допустимые ф-ии.

Дир. первая вариационная задача - задача отыскания среди допустимых функций той ф-ии, для которой интеграл Дирихле минимален.

Теорема: ^{принцип Дирихле} Если задана на S ф-я $\varphi(x, y)$ такая, что класс допустимых ф-ий не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

Справедливость это утверждения будет доказана при дополнительных предположениях.

Дей-во: $\Leftrightarrow u(x, y)$ - решение 1^{ой} вариационной задачи \Rightarrow

класс допустимых ф-ий: $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$, где $\varepsilon = \text{const}$,

$h(x, y)$ - допустимая ф-я: $h(x, y) = 0 (x, y) \in S$.

$$\Delta(u + \varepsilon h) = \Delta(u) + \varepsilon \Delta(u, h) + \varepsilon^2 \Delta(h) = \psi(\varepsilon), \text{ где } \Delta(u, h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y) dx dy$$

\Rightarrow необходимое условие экстремума $\Rightarrow \psi' = 2 \int_G \Delta(u, h) + 2\varepsilon \Delta(h)$

$$\psi'|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \Delta(u, h) = 0.$$

Если $u(x, y)$ и $h(x, y)$ и S являются некоторыми функциями, то

$$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h \Delta u$$

$$\int_G ((u_x h)_x + (u_y h)_y) dx dy = \int_G \Delta u h dx dy + \int_G (u_x h_x + u_y h_y) dx dy$$

$$\int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds, \text{ где } \nu - \text{внешняя нормаль к } S \quad \begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$0 \parallel \text{ т.е. } h|_S = 0$$

$$\Rightarrow \int_G h \Delta u \, dx \, dy = 0$$

\Rightarrow при преобразованием, $\forall \epsilon \Delta u - \text{const} + \epsilon \in G$, в силу
произвольности $h \Rightarrow \Delta u(x, y) = 0$.

\Leftarrow $u(x, y)$ - решение задачи Дирихле
 $u(x, y) + \epsilon h(x, y)$ - малое возмущение ϵ -ис

$$u \mathcal{D}(u, h) = \int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds - \int_G h \Delta u \, dx \, dy = 0$$

$$\mathcal{D}(u) \leq \mathcal{D}(u + \epsilon h) = \mathcal{D}(u) + \epsilon^2 \mathcal{D}(h)$$

$\Rightarrow u$ - минимальное решение Дирихле $\frac{257}{257}$

21) Вариационные методы, вторая вариационная задача

$$\Delta u + \lambda u = 0, (x, y) \in G, \lambda = \text{const}$$

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in S$$

Задача на собственные значения: Найти λ , при которых имеются непрерывные решения.

$$I(u) = \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)}, \text{ где } \mathcal{D}(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

$$H(u) = \int_G u^2(x, y) dx dy$$

Опр: Допустимыми для λ -а для $I(u)$ λ -ами будем считать такие λ из множества \mathbb{R} , удовлетворяющие краевому условию, непрерывности в $G \cup S$ функ. λ -и с кусочно-непр. в G производными первого порядка, для которых интеграл Дирихле существует.

Опр: Вторая вариационная задача - задача нахождения в классе допустимых λ -и минимума λ -а для $I(u)$ и построения соотв. минимизирующей λ -и.

Жв: При определенных доп. предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x, y)$ - минимизирующая λ -я, то $\lambda = I(u)$ является наименьшим соотв. значением задачи на собственные значения, а $u(x, y)$ - соотв. λ соотв. λ -ей.

Дан-во: $u(x, y)$ - мин. λ -я; $\lambda = I(u) = \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)}$

классе допустимых λ -и $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$, $\varepsilon = \text{const}$, $h(x, y)$ - функционал λ -я

$$F(\varepsilon) = \frac{\mathcal{D}(u + \varepsilon h)}{H(u + \varepsilon h)} = \frac{\mathcal{D}(u) + 2\varepsilon \mathcal{D}(u, h) + \varepsilon^2 \mathcal{D}(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u, h) + \varepsilon^2 H(h)}$$

где $\mathcal{D}(u, h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y) dx dy$, $H(u, h) = \int_G u h dx dy$

\Rightarrow поиск уже определена $\Rightarrow F'(0) = 0$, т.е.

$$F'(0) = 2 \frac{H(u) \mathcal{D}(u, h) - \mathcal{D}(u) H(u, h)}{H^2(u)} = 0 \Rightarrow H(u) \mathcal{D}(u, h) - \mathcal{D}(u) H(u, h) = 0$$

$$\Rightarrow H(u) [\Delta(u, h) - \lambda K(u, h)] = 0 \Rightarrow \Delta(u, h) - \lambda K(u, h) = 0$$

$$\Delta(u, h) = - \int_G \Delta u h dx dy$$

$$\int_G ((u_x h)_x + (u_y h)_y) dx dy = \int_G \Delta u h dx dy + \int_G (u_x h_x + u_y h_y) dx dy$$

$$\int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds, \text{ где } \nu - \text{нормаль к } S$$

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \text{ так } h|_S = 0$$

при граничных условиях уединенных паров на Γ -м $u(x, y)$, $h(x, y)$ и контур S области G

$$\Rightarrow \int_G [\lambda u h + \lambda u h] dx dy = 0 \Rightarrow \text{при граничных условиях непрерывности } \Delta u \Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0.$$

λ^* - наименьшее $\lambda > 0$ есть значение, u^* - соответствующее λ^* есть Γ -я

$$\Rightarrow H(\lambda u^* + \lambda^* u^*, u^*) = -\Delta(u^*) + \lambda^* K(u^*) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{\Delta(u^*)}{K(u^*)} \Rightarrow \frac{\Delta(u)}{K(u)} = \lambda$$

$\Rightarrow \lambda$ наименьшее. \square

λ_1 - наименьшее, u_1 - есть Γ -я: есть Γ -я $\Rightarrow u_1(x, y)$ - есть Γ -я

\Rightarrow без ограничения общности можно считать, что $K(u_1) = 1, \Delta(u_1) = \lambda_1$

$\Rightarrow \lambda_2$ можно найти из $\int_G (u_1)^2 = \int_G (u_2)^2 = \lambda_2, K(u, u_1) = 0$

аналогично для $\eta \Rightarrow \Delta(u_2, \zeta) - \lambda_2 K(u_2, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta : K(\zeta, u_1) = 0$

это же верно $\forall \eta : \zeta(x, y) = \eta(x, y) - K(\eta, u_1) u_1$

$$\Rightarrow \Delta(u_2, \zeta) - \lambda_2 K(u_2, \zeta) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(u_2, \eta) - \lambda K(u_2, \eta) = 0$$

аналогично

$$\Rightarrow H(\Delta u_2 + \lambda_2 u_2, h) = 0 \Rightarrow \Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0 \quad \square$$

Аналогично $\forall n : \lambda_n = \int_G (u_n)^2 = \min \int_G (u)^2$

$$K(u) = 1, K(u, u_i) = 0 \quad i=1, \dots, n-1$$

22) Разрывное решение в уравнениях газовой динамики, законы сохранения на разрыве

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \leftarrow \text{уравнение неразрывности} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \leftarrow \text{уравнение движения} \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \leftarrow \text{уравнение энергии газа} \end{cases}$$

ϵ - внутренняя энергия ед. объема

(1) + (2) $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

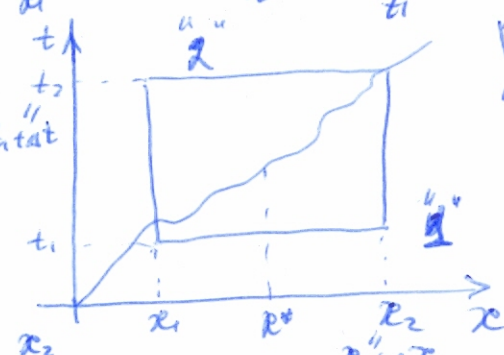
(1) + $\left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right)$ + (3) $\Rightarrow \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) \rho \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) \rho v + p v \right) = 0$

Применяем теорему Грина к x_1 до x_2 , от t_1 до t_2

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho v \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0 ; \int_{x_1}^{x_2} \rho v \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v^2 + p) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v \left(\epsilon + \frac{v^2}{2}\right) + p v) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$



Вопрос: какие уравнения должны удовлетворять ф-ии слева и справа от разрыва?

При $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ контур сжимается в точку \Rightarrow

\Rightarrow интегрирование уравнений выполняется:

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho]_{t_2} - [\rho]_{t_1} dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)]_{x_2} - [(\rho v)]_{x_1} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\rho \right]_{x=x^*} = - \left[\rho v \right]_{t=t^*} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\rho_2 - \rho_1) v = -(\rho v)_2 + (\rho v)_1 \Rightarrow$ переходим в естественную координату,

связанную с разрывом: $u_1 = U - v_1$, $u_2 = U - v_2 \Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$

Аналогично из двух других уравнений $\Rightarrow \boxed{\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2}$

$$\rho_1 u_1 \left(\epsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 u_2 \left(\epsilon_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

23) Условие Гаусса.

Закон сохранения на разрыве:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}, \text{ где } w = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$$

↑
исчерпанная
↑
высвободившееся тепло из объема

Уравнение: $\frac{\partial(\rho\delta)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho + \rho\delta^2)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\delta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho\delta^2}{2} + \rho\varepsilon \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho\delta \left(\frac{\delta^2}{2} + w \right) \right]$$

Приняв уравнение энергии \Rightarrow нет потерь тепла

$$dQ = d\varepsilon + p dZ \Rightarrow d\varepsilon = -p dZ = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho = w d\rho$$

$$p = \rho R T, \quad \varepsilon = c_v T$$

$$w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} R T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \Rightarrow w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 + (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma-1)\rho_2 + (\gamma+1)\rho_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}$$

↑ Коэффициент Пуассона воздуха = 7/5

Если малый взрыв: $p_2 \gg p_1$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 \frac{\gamma+1 + (\gamma-1)\frac{p_1}{p_2}}{\gamma-1 + (\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \sqrt{p_1^6}$$

↑
уплотнение

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{p_2}{\rho_1}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2 p_1}{2(\gamma+1) \rho_2}}$$

↑
не образовалось ударной волны,
их можно только
почувствовать.

Если малый удар $\Rightarrow \delta_1 = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{p_1}{\rho_1}}$

25) Вывод уравнения КДВ. (уравнение мелкого воя и бусемена)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f$$

$div \bar{v} = 0$ ← уравнение неразрывности

$$\bar{v}(z, t)|_{t=0} = \bar{v}_0(z) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial z}{\partial z} \dot{z}$$

$$\bar{v} \cdot \bar{n}|_S = 0, \quad \bar{v}_n|_S = 0 \quad \leftarrow \text{условия непротекания}$$

На поверхности $p|_{S^+} = p|_{S^-}$

Уравнение джоржа: $\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f, \quad div \bar{v} = 0$

$$f = -\frac{1}{\rho} \nabla U \text{ — консервативная сила}$$

Умножив уравнение джоржа на $\rho \bar{v}$ и проинтегрируем:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 \right) + \bar{v} \nabla p + \bar{v} \nabla U = 0$$

Скалярно, но поле скалярно, $\nabla \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 + U \right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Энергия $\epsilon = \frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 + U \Rightarrow \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \bar{v} \nabla |\bar{v}|^2 + \bar{v} \nabla p + \bar{v} \nabla U = 0$

$$\int \bar{a} \nabla \psi = d\bar{v}(\bar{a} \psi) - \psi d\bar{v} \bar{a}$$

$\bar{\Pi} = \bar{v} \left(p + \frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 + U \right)$ ← вектор Уэйла-Растуна

$$\Rightarrow \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = d\bar{v} \bar{\Pi} \quad \text{Закон сохранения энергии: } \frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV + \int_S \bar{\Pi} \bar{n} dS = 0$$

Пусть движение ирротационно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 + U + p \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho |\bar{v}|^2 + U + p = const \quad \leftarrow \text{интеграл Бернулли}$$

Пусть движение потенциально: $\bar{v} = \nabla \Phi$, Φ — потенциал скорости

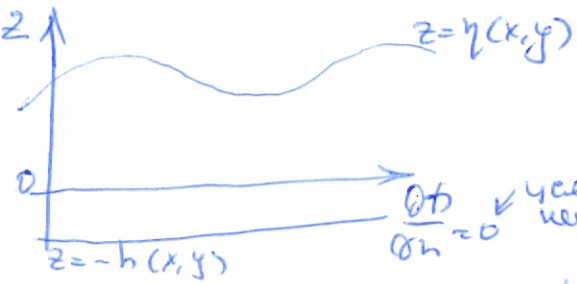
Подставим в уравнение джоржа: $\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + (\nabla \Phi \nabla) \nabla \Phi = f, \quad f = -\frac{1}{\rho} \nabla U$

$$(\nabla \Phi \nabla) \nabla \Phi = \nabla \left(\frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) \Rightarrow \nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} = C(t) \text{ — интеграл Бернулли — Коши}$$

Уравнение неразрывности $div \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \Delta \Phi = 0$

$$\Delta \Phi = 0, \quad \text{интеграл Бернулли } \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz + p = 0$$



$$\zeta = \eta(x, y, t) - z$$

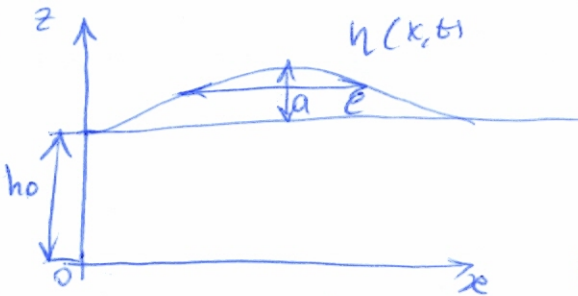
$$\Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y - \Phi_z \zeta = \eta(x, y, t) = 0$$

Интеграл Бернулли — Коши:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g \zeta(x, y, z) \Big|_{z=\eta(x, y, t)} = -p_0(x, y, t)$$

Исходные условия: $\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y, z), \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(x, y)$

Теория мелкого воя: переходим к двумерному по поверхности движению.



Вводится безразмерные параметры:
 $\alpha = \frac{a}{h_0}$ (в дальнейшем $\alpha \ll 1$); $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$
 a - характерная величина волны
 l - длина волны
 Безразмерные величины: $\frac{x}{l}, \frac{z}{h_0}, \frac{t}{l}, \frac{(h-h_0)\sqrt{gh_0}}{a}, \frac{\eta}{h_0}$
 Об: x, z, t, η, ϕ .

Введем уравнение Лапласа: $\beta \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0$ $0 < z < l + \alpha \eta$; $\phi_z|_{z=0} = 0$ условие непротекания

При $z = l + \alpha \eta$: $\eta_t + \alpha \phi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \phi_z = 0$; $\phi_t + \eta + \frac{1}{2} \alpha \phi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \phi_z^2 = 0$

$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x,t)$

$\Rightarrow \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(l + \alpha \eta) f_x] - \frac{1}{6} (l + \alpha \eta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f + \frac{1}{2} \alpha (l + \alpha \eta)^2 \eta_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f \{1 + O(\beta^2)\} = 0$

(*) $\eta_t + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (l + \alpha \eta)^2 \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} + \alpha f_x \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \alpha f_{xx} \right\} \beta + O(\beta^2) = 0$

Считаем, что $0 < \beta \ll 1$ (волна сильно размазана). Асимптотически разложим по порядку: $\eta_t + [l + \alpha \eta] f_x = 0$
 $\eta_t + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 = 0$

Об. $u = f_x + \phi_x$, в пропорциональные z е уравнение по x и возвращаемся к безразмерным параметрам: $\eta_t + [(h_0 + \eta) u]_x = 0$
 $u_t + u u_x + \beta u_x = 0$ } уравнение мелкого воя

Пусть $\alpha \ll 1$, т.е. амплитуда мала $\Rightarrow \eta_t + u_x = 0$
 $u_t + \eta_x = 0$ $f_x = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx}$, где $c_0^2 = gh_0$ получаем обычные волны.

Пусть $\alpha = O(\beta)$. $u_3(x)$ получим:
 $\eta_t + [(l + \alpha \eta) u]_x - \frac{1}{6} \beta u_{xxx} = 0$ уравнение Буссинески
 $u_t + 2u u_x + \eta_x - \frac{1}{2} \beta u_{xxt} = 0$
↑ пренебрегаем удерживающей волной

Для смешанных волн малой амплитуды на мелком воя. Если β не мала, то уравнение только вправо, но получим уравнение КДВ.

Ищем решение в виде: $u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta A_2(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2)$,
 $a \eta$ в виде $\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow$ ищем решение в уравнении

$\eta_t + [A_0]_x + \alpha [(A_0)_x + (A_1)_x] + \beta [(A_2)_x + \frac{1}{6} (A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$
 $[A_0]_t + \eta_x + \alpha [(A_1)_t + A_0 (A_0)_x] + \beta [(A_2)_t - \frac{1}{2} (A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$
 $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta) \Rightarrow$ все уравнения по t можно заменить на производные по x с помощью замены u $A_0(\eta) = \eta$.

$\eta_t + \eta_x + \alpha [(A_1)_x + 2\eta \eta_x] + \beta [(A_2)_x + \frac{1}{6} \eta_{xxx}] = 0$
 $\eta_t + \eta_x + \alpha [(A_1)_t + \eta \eta_x] + \beta [(A_2)_t - \frac{1}{2} \eta_{xxt}] = 0$

$A_1 = \eta^2 \beta \Rightarrow A_2 = \beta \eta_{xx} \Rightarrow \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x + \frac{1}{6} \beta \eta_{xxx} = 0$
 $\eta_t + c_0 (1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}) \eta_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$

В каноническом виде: $u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0$ ← уравнение КДВ.

27) Абсолютные решения нелинейных уравнений.

$u_t = (k(u)u_x)_x$. При каких k будет неограниченное возрастание температуры. Будем искать решение типа дуги Лавренте

$u(x,t) = f(x-\lambda t) = f(\xi) \leftarrow$ абсолютное решение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} (k(f) \frac{df}{d\xi}) = -\lambda \frac{df}{d\xi}$$

$$\Rightarrow k(f) \frac{df}{d\xi} + \lambda f = C, \text{ Пусть } f \text{ не ограничено } C=0, \int \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$$

$$\Rightarrow \frac{k(f)}{f} \frac{df}{d\xi} = -\lambda \text{ добавим условие функции решения } \int \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$$

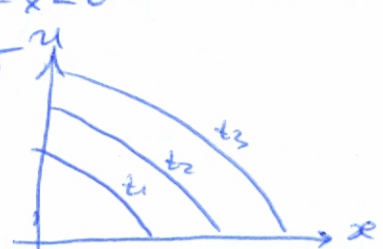
$$\text{Будем } \Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta, \quad u \geq 0, \quad \Phi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{f(\xi)} \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = -\lambda(\xi - \xi_0) \Rightarrow \Phi(f(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0) \Rightarrow f(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi)$$

$$\Rightarrow u_A(t, x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)] \quad (0.5^* : \begin{matrix} \Phi \neq 0 & \lambda t - x > 0 \\ \Phi = 0 & \lambda t - x < 0 \end{matrix})$$

Пусть $k(u) = k_0 u^\sigma, \sigma = \text{const} \Rightarrow \Phi^{-1}(u) = (k_0 u)^{1/\sigma}$

$$\Rightarrow u_A(t, x) = [k_0 \lambda (\lambda t - x)]^{1/\sigma}$$



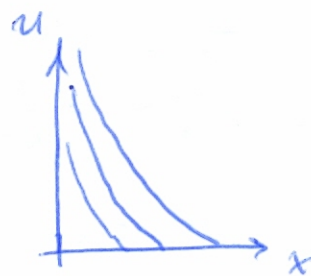
Пусть $k(u) = |\ln u|^{-1}, x \in (0, 1/2), k(u) > 0, k(0) = 0$

$$\int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \text{расх-ст}$$

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^u \frac{d\eta}{|\ln \eta| \eta} = \int_0^u \frac{d\eta}{|\ln \eta| \eta}$$

Пусть $k(u) = u \exp(-u), u > 0$.

$$u_A(t, x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)] & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0, & x > \lambda t \end{cases}$$



Рассм. $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u), t > 0, x \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx = E_0, \quad u(t, x) = t^\alpha \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^\beta} \leftarrow \text{абсолютное решение}$$

$$\text{Подставим } \Rightarrow \alpha t^{\alpha-1} \theta - \beta t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \xi_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} \nabla_\xi (\theta^\sigma \nabla_\xi \theta)$$

Можно сравнить, если $\alpha-1 = \alpha(\sigma+1)-2\beta$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha \theta(\xi) dx = t^{\alpha+N\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\xi) d\xi \Rightarrow \alpha + N\beta = 0, \text{ тогда энергия сохраняется}$$

$$\Rightarrow \eta^{N-1} \theta^\sigma \theta' + N\beta+2 \theta \eta^N = 0, \eta > 0, \theta^\sigma \theta'(0) = 0$$

получается абсолютное решение.

Рассм. $u_t = (u^\sigma u)_x, \sigma = \text{const}, t > 0, x > 0, u(0, x) = u_0, x > 0$

$$u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad u(t, 0) = u_1(t), \quad t > 0$$

Возьмем специальное частное решение: $u_1(t) = (1+t)^m$ $t > 0$ $m = \text{const}$

Будем искать абелезовские решения в виде: $u_A(t, x) = (1+t)^m \theta_A(\xi)$

где $\xi = \frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$. Сделаем замену $t \rightarrow \frac{t}{\alpha}$, $x \rightarrow \frac{x}{\alpha^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$, $u \rightarrow \alpha^m u$

\Rightarrow абелезовские уравнения: $(\theta_A^\sigma \theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2} \theta_A' \xi - m \theta_A = 0$

$$\theta_A(0) = 1, \theta_A(\infty) = 0 \quad \text{Oxy.}$$

Возьмем эквивалентное частное решение: $u_2(t) = e^t$ $t > 0$

$u_A(t, x) = e^t f_A(\eta)$, $\eta = \frac{x}{\exp(\frac{\sigma t}{2})} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f_A^\sigma f_A')' + \frac{\sigma}{2} f_A' \eta - f_A = 0 \quad \eta > 0; f_A(0) = 1, f_A(\infty) = 0$$

Рассмотрим задачу в вращающейся системе: $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\lambda$

$t > 0, x \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \lambda > 1$

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{\frac{-1}{\lambda-1}} \theta_A(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(T_0 - t)^m} \in \mathbb{R} \quad \theta_A(\xi) \geq 0$$

Возьмем $m = [\lambda - (\sigma + 1)] / [2(\lambda - 1)]$.

Будем искать канонические условия решения: $u_0(-x) = u_0(x)$ $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \theta(t, \xi) = (T_0 - t)^{1/(\lambda-1)} u(t, \xi (T_0 - t)^m) \quad t \in [0, T_0]$$

$$- (\theta_A^\sigma \theta_A')' - m \theta_A' \xi - \frac{1}{\lambda-1} \theta_A = 0.$$

Это уже не абелезовские уравнения, но можно использовать условия