Бицадзе А.В.
“Дополнительные главы уравнений в частных производных”

Гл. I

Моделирование некоторых физических явлений в терминах уравнений в частных производных.

§ I. Понятие уравнения в частных производных.

Пусть $\mathfrak{D}$ - область n -мерного евклидова пространства точек x с координатами $x_1, \dots x_n$, $n \geq 2$, а $F(x, \dots, p_{i_1 \dots i_n} \dots)$ - действительная функция, заданная для всех $x \in \mathfrak{D}$ и для всевозможных значений действительных переменных $p_{i_1 \dots i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \dots i_n$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \dots, m$, $m \geq 1$

В предположении, что при $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$ по крайней мере одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}}$ отлична от нуля, равенство вида

$$F\left(x, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots\right) = 0 \qquad (I)$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных или просто уравнением в частных производных порядка m относительно неизвестной функции $u(x) = u(x_1, \dots x_n)$, а левая часть этого равенства - дифференциальным оператором в частных производных порядка m .

Определенная в области $\mathfrak{D}$ задания уравнения (I) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращ его в тождество, называется

Уравнение (I) называется линейным, если F - линейно зависит от всех $p_{i_1,\dots i_n}$. Когда функция F линейна относительно $p_{i_1,\dots i_n}$ лишь при $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$, уравнение (I) называется квазилинейным.

Линейное уравнение в частных производных порядка m всегда можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1,\dots i_n} A^{k}_{i_1\dots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$$

$$k = \sum_{j=1}^{n} i_j, \quad i_j \geq 0 \qquad (2)$$

где $A^{k}_{i_1\dots i_n}(x)$ и $f(x)$ - заданные в области $\mathcal{D}$ функции. Для линейного уравнения второго порядка вместо (2) удобнее пользоваться записью

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = f(x) \qquad (3)$$

Линейные уравнения (2) и (3) называются однородными или неоднородными в зависимости от того, функция $f(x)$ равна нулю в $\mathcal{D}$ всюду или она отлична от тождественного нуля.

В точках $x \in \mathcal{D}$, в которых коэффициенты A_{ij} все равны нулю, (3) перестает быть уравнением второго порядка, т.е. в указанных точках порядок уравнения (3) вырождается.

Когда F представляет собой N -мерный вектор $F=(F_1,\dots F_N)$ с компонентами $F_i(x,\dots p_{i_1\dots i_n},\dots)$ $i=1,\dots N$, зависящими от $x \in \mathcal{D}$ и от N_1 -мерных векторов

$$p_{i_1,\dots i_n} = (p^{1}_{i_1\dots i_n}, \dots p^{N_1}_{i_1\dots i_n})$$

векторное равенство (I), в котором $u=(u_1,\dots u_{N_1})$ - N_1 -мерный вектор, называется системой уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $u_1,\dots u_{N_1}$ или относительно неизвестного вектора $u=(u_1,\dots u_{N_1})$.

Максимальный порядок производных от искомых функций, входящих в данное уравнение системы, называется порядком этого уравнения.

В системе уравнений вовсе нет необходимости, чтобы число уравнений N и число неизвестных функйий N_1 были равны или чтобы порядок всех уравнений данной системы был один и тот же.

Уравнение (I), когда входящие в его левую часть величины являются комплексными и под $\frac{\partial}{\partial x_k}$ при $x_k = y_k + iz_k$ понимается $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_k} - i\frac{\partial}{\partial z_k}\right)$, очевидно, равносильно системе уравнений.

§ 2. Уравнения в частных производных как уравнения Эйлера-Лагранжа для вариационных задач.

Явления, протекающие в сплошных средах и полях и изучаемые в физике, естествознании и технике, как правило, математически моделируются в терминах уравнений в частных производных. Эти уравнения представляют собой дифференциальную запись законов сохранения, присущих изучаемым явлениям.

Пусть M и M^* – гладкие многообразия с метрическими квадратичными формами $ds = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$ и $ds^* = \sum_{\alpha,\beta} g^*_{\alpha\beta}\, dy^\alpha dy^\beta$ соотвественно, а u – гладкое отображение M на M^*. Обозначим через g^{ij} отношение алгебраического дополнения элемента g_{ij} матрицы $\| g_{ij} \|$ к $\det \| g_{ij} \| = g$.

Когда выражение

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^*_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u_\beta}{\partial x^j} g^{ij}$$

выступает в роли лагранжиана, при предположении, что M компактно, функционал

$$E(u) = \int_M \mathcal{L}(u)\, dm$$

где dm – элемент объёма M, принято называть <u>интегралом энергий</u>.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для $E(u)$ записываются в виде

$$\Delta u_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \sum_{i,j} \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^j} g^{ij} = 0 \qquad (4)$$

где
$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

дифференциальный оператор Бельтрами, а $\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ - символ Кристоффеля на M^*.

Когда $g^{ij}=0$, $i\neq j$, $g^{ii}=1$ оператор Бельтрами совпадает с оператором Лапласа, которого в декартовых ортогональных координатах очевидно можно записать ещё в виде $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}$.

Остановимся подробно на некоторых примерах моделирования изучаемых явлений с помощью уравнений в частных производных.

§ 3. Колебания мембраны.

Мембраной называется упругая материальная поверхность, которая в положении покоя имеет форму плоской области G и потенциальная энергия которой в процессе колебания пропорциональна приращению её площади. Упругость мембраны выражается в том, что когда мгновенно прекращается внешнее воздействие, выводящее её из положения покоя, она в течение определенного времени совершает колебательное движение.

За систему отсчёта примем систему декартовых ортогональных координат x, y, t и соответствующее ей евклидово пространство обозначим через E_3. Предположим, что область G лежит в плоскости переменных x, y, и прогиб мембраны $u(x,y,t)$, т.е. вертикальное смещение точки $(x,y)\in G$, - достаточно гладкая функция. Колебания мембраны будем считать малыми в том смысле, что при вычислениях можно пренебречь степенями величин u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ выше второй.

Поскольку в момент времени t площадь σ мембраны, выведенной из положения покоя, даётся формулой

$$\sigma = \int_G \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy \approx \int_G \left(1+\tfrac{1}{2}u_x^2+\tfrac{1}{2}u_y^2\right)dx\,dy$$

а в положении покоя её площадь

$$|G| = \int_G dx\,dy,$$

то для потенциальной энергии E_p имеем

$$E_p = \frac{1}{2}\mu\int_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$$

где коэффициент пропорциональности μ носит название натяжения мембраны.

Кинетическая энергия колеблющейся мембраны даётся формулой

$$E_K = \frac{1}{2}\int_G \rho\,u_t^2\,dx\,dy$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а u_t – скорость её смещения.

В силу принципа Гамильтона колебания мембраны происходит так, что функция $u(x,y,t)$ даёт стационарное значение интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2}(E_K-E_p)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}dt\int_G\left[\rho u_t^2-\mu(u_x^2+u_y^2)\right]dx\,dy \qquad (5)$$

где (t_1, t_2) – промежуток времени наблюдения.

В рассматриваемом примере в роли лагранжиана $\mathcal{L}(u)$ выступает

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\left[\rho u_t^2-\mu(u_x^2+u_y^2)\right]$$

в роли интеграла энергии $E(u)$ – выражение (5), а уравнение Эйлера-Лагранжа (4) для функционала (5) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t)-\frac{\partial}{\partial x}(\mu u_x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(\mu u_y^2) = 0 \qquad (6)$$

Равенство (6) относительно $u(x,y,t)$ представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка. При постоянных ρ и μ из (6) получаем

$u_{tt} = a^2 \Delta u$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (7)$$

где $a^2 = \frac{\mu}{\rho}$. Постоянная a носит название скорости распространения звука. Без ограничения общности её можно считать равной единице.

Считая, что u не зависит от t, т.е. полагая, что в положении изгиба, описанном уравнением $u = u(x,y)$, мембрана находится в равновесии, из (7) получаем уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

представляющее собой уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала

$$\mathcal{D}(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

носящего название интеграла Дирихле.

При соответствующем подборе масштаба интеграл Дирихле $\mathcal{D}(u)$ выражает потенциальную энергию мембраны в положении равновесия с прогибом $u(x,y)$.

§ 4. Распространение тепла.

Процесс распространения тепла в среде, заполненной массой с плотностью ρ при удельной теплоёмкости c и коэффициенте теплопроводности k, математически можно моделировать следующим образом. Пусть $u(x,t)$ – температура среды в точке x в момент времени t и $\mathcal{D}$ – произвольная область среды, содержащая точку x. Обозначим через S границу $\mathcal{D}$.

Если ds и ν – элемент площади S и внешняя нормаль к S, то при требовании достаточной гладкости функции $u(x,t)$ количество тепла Q, поступающее в D через S за промежуток времени (t_1,t_2) в силу закона Фурье, даётся формулой

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

Так как в результате поступления тепла Q приращение температуры равно $u(x,t+dt)-u(x,t)=u_t dt$, то

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho\, u_t\, d\tau$$

где $d\tau$ – элемент объёма.

Следовательно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D c\rho\, u_t\, d\tau \quad (8)$$

При предположении, что величины k, c, ρ постоянны, равенство (8) можно переписать в виде

$$k\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = c\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \int_D u_t\, dt \quad (9)$$

Поскольку в силу формулы Гаусса-Остроградского

$$\int_S F\nu\, ds = \int_D \operatorname{div} F\, d\tau$$

имеет место тождество

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_S \operatorname{grad} u \cdot \nu\, ds = \int_D \operatorname{div}\operatorname{grad} u\, d\tau$$

из (9) получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_D (c\rho u_t - k\Delta u)\, d\tau = 0$$

где векторный дифференциальный оператор grad и скалярные дифференциальные операторы div и $\operatorname{div}\operatorname{grad}=\Delta$ берутся по пространственным переменным x_1, x_2, x_3.

Отсюда в виду того, что промежуток времени (t_1, t_2) и область $\mathcal{D}$ произвольны, заключаем, что

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (10)$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$

Без ограничения общности, очевидно, и на этот раз можно считать, что $a = 1$ и записать уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (11)$$

Уравнение (11) носит название уравнения теплопроводности.

§ 5. Уравнения линейной теории упругости.

При изучении сплошной среды различают два вида сил, действующих в среде, - объёмные и поверхностные. Выделим мысленно в сплошной среде произвольный объём τ с границей σ. Объёмные силы действуют в каждой точке τ (например, сила тяжести), а поверхностные силы - в каждой точке σ (например, давление). Эти последние представляют собой силы взаимодействия между частями среды, лежащими соответственно внутри и вне σ. При наличии поверхностных сил, независимо от того, пребывает ли среда в состоянии покоя или движения, говорят, что она находится в напряженном состоянии. Поэтому эти силы носят название напряжений или усилий.

Объёмная сила Φ, приложенная в точке $\mathcal{P}(x,y,z) \in \tau$ представляет собой вектор, и он известен, если известны его три составляющие (проекции на координатных осях, в нашем случае декартовых ортогональных) X, Y, Z.

Сила напряжения Ψ в каждой точке $\mathcal{P}(x, y, z) \in \sigma$ зависит не только от точки $\mathcal{P}$, но и от ориентации элемента площади поверхности σ, отнесенной к этой точке, и она будет нам известна, если будем знать: а) ориентации трех пространственных элементов $d\sigma_{\nu_1}, d\sigma_{\nu_2}, d\sigma_{\nu_3}$ в точке $\mathcal{P}$, нормали которых ν_1, ν_2, ν_3 не компланарны, и б) напряжения, действующие на каждом из этих элементов. В качестве ν_1, ν_2, ν_3 примем орты осей координат x, y, z с поверхностными элементами $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$. Каждое из напряжений, действующих на $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$ имеет по три компоненты, которые принято обозначать соответственно через $(X_x\ X_y, X_z), (Y_x\ Y_y, Y_z), (Z_x\ Z_y\ Z_z)$. Знание этих девяти величин полностью определяет напряжение Ψ действующее в точке $\mathcal{P} \in \sigma$. Доказывается, что они составляют компоненты тензора второго ранга, носящего название тензора напряжения.

Напряженное состояние в сплошной среде возникает в результате внешнего воздействия, изменяющего расстояния между ее точками, т.е., когда среда подвержена деформации. Среда, которая оказывает сопротивление внешнему воздействию, деформируется в процессе этого воздействия, но после его постепенного прекращения она постепенно возвращается к первоначальному состоянию, называется твердым упругим телом. В результате мгновенного прекращения внешнего воздействия твердое упругое тело (например, мембрана, струна и т.д.) в течение определенного промежутка времени будет продолжать колебательные движения.

Если точка $\mathcal{P}$ упругого тела $\mathcal{D}$ после деформации занимает положение Q , то вектор $\mathcal{PQ} = u(u_1, u_2, u_3)$ называется вектором смещения, а скалярные величины u_1, u_2, u_3 – компонентами смещения.

Величины $e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zx}, e_{zy}, e_{zz}$ определенные формулами

$$e_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y},$$
$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \tag{12}$$
$$e_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

называются компонентами деформации.

Для того, чтобы было возможно определить функции u_1, u_2 u_3 из системы (12) компоненты деформации должны быть связаны между собой шестью равенствами, носящими название условий совместимости Сен-Венана.

Упругое тело называется изотропным, если его свойства по всем направлениям одинаковы. Ниже речь будет идти только об изотропных упругих телах.

Считая деформации малыми, т.е. пренебрегая степенями величин u, u_x, u_y, u_z выше второго, и игнорируя жёсткое смещение упругого тела $\mathcal{D}$ как единого целого, за энергию деформации E_d в линейной теории упругости с определенной приемлемой точностью можно принять выражение

$$E_d = G \iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{m-1}{m+2} (\operatorname{div} u)^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{rot} u)^2\right] dx\, dy\, dz \tag{13}$$

где дифференциальные операторы div и rot берутся по пространственным переменным x, y, z , а G и m – вполне определённые постоянные, характерные для данной упругой среды, причём $G > 0$, $m > 2$.

Обозначим соответственно через E_k и A кинетическую энергию упругого тела $\mathcal{D}$ и работу, выполненную объёмной силой Φ в процессе деформации

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dy\,dz \tag{I4}$$

$$A = \int_{\mathcal{D}} \Phi u \quad dx\,dy\,dz \tag{I5}$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2$, $\Phi \cdot u = X u_1 + Y u_2 + Z u_3$

В силу принципа Гамильтона вектор смещения V точек упругого тела $\mathcal{D}$, находящегося в напряженном состоянии, даёт стационарное значение интегралу

$$E(u) = \int_{t_1}^{t_2} (E_d - E_K - A)\, dt \tag{I6}$$

На основании (I3), (I4), (I5) легко видеть, что уравнениям Эйлера-Лагранжа для функционала (I6) можно придать вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G\left(\Delta u + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} u\right) - \Phi = 0 \tag{I7}$$

Векторное равенство (I7) представляет собой систему уравнений в частных производных линейной теории упругости, записанную в компонентах смещения

В обозначениях

$$\lambda = \frac{2G}{m-2}, \quad \mu = G$$

систему (I7) обычно записывают в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Phi = 0 \tag{I8}$$

Когда упругое тело находится в статическом (в равновесном) напряженном состоянии. т.е. когда вектор смещения u является функцией только пространственных переменных x, y, z вместо (I8 при отсутствии объёмных сил будет иметь

$$\mu \Delta u + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u = 0. \qquad (19)$$

Представленные формулой (19) равенства называются системой уравнений статической линейной теории упругости в компонентах смещения u_1, u_2, u_3.

По заданным компонентам смещения u_1, u_2, u_3 формулы (12) позволяют определить компоненты деформации.

Статическая теория упругости имеет своим предметом изучение статического напряженного состояния упругих тел, когда известен закон зависимости между компонентами напряжения и компонентами деформации. В линейной теории упругости таким законом является так называемый обобщенный закон Гука, по которому компоненты напряжения в каждой точке упругого тела являются линейными однородными функциями (линейными формами) компонентов деформации и обратно. Когда коэффициенты этой линейной зависимости постоянны, упругое тело называется однородным.

Говорят, что упругое тело подвержено плоской деформации, параллельной плоскости переменных x, y если из трех компонент смещения u_1, u_2, u_3 третья u_3 равна нулю, а две первые компоненты $u_1 = u$ и $u_2 = v$ являются функциями только x, y. В этом случае для определения u и v в силу (19) будем иметь систему уравнений

$$\mu \Delta u + (\lambda+\mu)(u_{xx} + v_{xy}) = 0, \quad \mu \Delta v + (\lambda+\mu)(u_{xy} + v_{yy}) = 0. \qquad (20)$$

Для однородных упругих тел в случае плоской деформации обобщенный закон Гука гласит, что

$$\begin{gathered} X_x = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu u_x, \quad Y_y = \lambda(u_x + v_y) + 2\mu v_y \\ X_y = Y_x = \mu(v_x + u_y), \quad Z_z = \lambda(u_x + v_y), \\ X_z = Z_x = Y_z = Z_y = 0. \end{gathered} \qquad (21)$$

Исключая u и v из (2I), на основании (20) находим

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

Когда сплошная среда находится в статическом напряженном состоянии, главный вектор и главный момент всех действующих в ней сил должны быть равны нулю. Выполнение первого из этих требований даёт три уравнения равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X = 0,$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z = 0, \tag{23}$$

а выполнение второго показывает, что $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$, $Y_z = Z_y$. Последние равенства означают, что тензор напряжения симметричен

В случае плоской деформации, при отсутствии объёмных сил из системы (23) получается система (22). Следовательно, для определения пяти величин $X_x, X_y = Y_x, Y_y, u, v$, характеризующих плоское напряженное состояние упругого тела, имеем систему пяти уравнений (2I),(22).

§ 6. Основные уравнения гидромеханики

На каждой мысленно выделенной поверхности σ в объёме жидкости, действует давление. Когда давление направлено вдоль нормали к элементу $d\sigma$ площади σ, говорят, что имеет место закон изотропности давления.

Этот закон всегда верен, если жидкость находится в равновесном состоянии. Когда указанный закон верен и для движущейся жидкости, то такая жидкость называется идеальной.

В жидкости выделим произвольно малый объём τ - "частицу жидкости". Заполняющей объём жидкости τ приписывается определённая , средняя скорость, предел которой при стягивании

τ в точку $\mathcal{P}$ называется скоростью q жидкости в точке $\mathcal{P}$. Она очевидно является вектором. Обозначим через x_1, x_2, x_3 декартовы ортогональные координаты точки $\mathcal{P}$, а через q_1, q_2, q_3 компоненты вектора q в точке $\mathcal{P}$. Движение или равновесное состояние жидкости определено, если нам известны в каждой точке $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ давление p, плотность распределения масс ϱ и вектор скорости q.

Линия в занятом жидкостью объёме, касательная которой в каждой точке $\mathcal{P}$ параллельна вектору скорости q в этой точке, называется линией тока. Её уравнением служит равенство

$$\frac{dx}{dt} = q,$$

где x – радиус-вектор точки $\mathcal{P}$.

Когда плотность ϱ постоянна во всем объёме, занятом жидкостью, такая жидкость называется несжимаемой.

При наличии трения (внутреннего, между частицами жидкости, или внешнего, между частицами жидкости и твердым телом, находящимся с ними в контакте) закон изотропности давления в движущейся жидкости может не иметь места. В таком случае жидкость называется реальной.

Внутреннее трение является причиной появления позади движущегося в реальной жидкости твёрдого тела вихрей, сопротивления и подъёмной силы. Они сразу исчезают при наступлении равновесного состояния. Этот факт находится в тесной связи с тем, что внутреннее трение может проявляться в сопротивлении изменению формы жидкости. Когда при изучении движения жидкости нельзя игнорировать внутреннее трение, жидкость называется вязкой.

Если скорость q в каждой точке движущейся жидкости не зависит от времени, то движение называется стационарным.

В гидромеханике в самом общем случае при предположении, что объёмные силы и термальные явления отсутствуют, для определения величин q, p и ρ имеется система уравнений, состоящая из векторного уравнения Навье-Стокса

$$\rho \frac{Dq}{Dt} + \operatorname{grad} p = \mu \Delta q \qquad (24)$$

и скалярного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho q = 0, \qquad (25)$$

где дифференциальные операторы grad, div, $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ берутся по пространственным переменным x_1, x_2, x_3, $\frac{D}{Dt}$ — так называемая субстанциональная производная по времени

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \operatorname{grad}, \quad q \cdot \operatorname{grad} = q_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + q_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad (26)$$

а μ - коэффициент вязкости.

К системе (24), (25) четырёх уравнений добавляется пятое, конечное уравнение состояния

$$p = p(\rho). \qquad (27)$$

В случае так называемой баротропной жидкости зависимость (27) монотонна.

Если через $q^2 = q \cdot q$ обозначим скалярное произведение вектора q на себя, а через $\Omega \times q$ - векторное произведение векторов $\Omega = \operatorname{rot} q$ и q, то в силу (26) уравнению (24) можно придать вид

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho \left[\frac{1}{2} \operatorname{grad} q^2 + \Omega \times q \right] + \operatorname{grad} p = \mu \Delta q. \qquad (28)$$

Вектор Ω называется вихрем скорости q. Движение жидкости называется вихревым или безвихревым в зависимости от того $\Omega \neq 0$ или $\Omega = 0$ всюду в объёме, занятом жидкостью.

В случае стационарного движения жидкости уравнения (28) и (25) переходят соответственно в уравнения

$$\rho\left[\frac{1}{2}\operatorname{grad} q^2 + \Omega \times q\right] + \operatorname{grad} p = \mu \Delta q, \qquad (29)$$

$$\operatorname{div} \rho q = 0. \qquad (30)$$

Для безвихревого движения характерным является отсутствие слагаемого $\rho\Omega \times q$ в уравнении (28). При отсутствии вихря и вязкости вместо (29) будем иметь

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} q^2 + \rho \operatorname{grad} p = 0.$$

Система уравнений (29),(30) нелинейна. Когда величина $\operatorname{grad} q^2 + 2\Omega \times q$ пренебрежимо мала, и $\rho = Const$, вместо (29),(30) при изучении стационарного движения жидкости можно ограничиться рассмотрением линейной системы

$$\Delta q - \frac{1}{\mu}\operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} q = 0.$$

Заметим, что уравнение неразрывности (25) представляет собой дифференциальную запись допущения, что в движущейся жидкост нет источников и стоков, т.е. в объёме, занятом жидкостью, не происходит ни потери, ни возникновения ее массы. Что же касаетс уравнения (28), его проще всего вывести из принципа Даламбера, по которому в каждый момент движения любой сплошной среды все приложенные к ней силы - объёмные, поверхностные, включая и силы инерции,взаимно уравновешиваются.

Если существует семейство параллельных плоскостей, в которых при пересечении с объёмом, занятым движущейся жидкостью, гидромеханическая картина одинакова, то такое движение называется плоскопараллельным. Поскольку в этом случае вектор скорости q параллелен плоскости движения, при подходящем подборе системы координат его можно считать двухкомпанентным.

§ 7. Уравнения общей теории относительности

Изучение универсального свойства взаимодействия масс, носящего название тяготения или гравитации, является одной из центральных проблем современной физики, проблемой общенаучного, мировоззренческого значения.

В ньютоновской теории гравитации в качестве параметров, определяющих положение материальной точки, берутся координаты трёхмерного евклидова пространства, причём геометрическое пространство и время существуют независимо друг от друга. По этой теории массы, распределенные с плотностью ρ по некоторому объёму, воздействуют на точку с массой m силой f, представляющей собой трёхкомпонентный вектор, определенный формулой

$$f = m \operatorname{grad} \varphi,$$

где скалярная функция φ - ньютонов потенциал - представляет собой решение уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi \gamma \rho, \tag{31}$$

в котором Δ - оператор Лапласа по пространственным переменным, а γ - гравитационная постоянная.

Ньютоновская теория гравитации хотя и играет существенную роль в физике, естествознании и технике, но она не в состоянии объяснить ряд реально наблюдаемых явлений, таких, например, как смещение перигелия меркурия, искривление луча света вблизи солнца, красное смещение и т.д. Это стало причиной возникновения новой теории гравитации - общей теории относительности.

По общей теории относительности параметры x_1, x_2, x_3, x_4, характеризующие движение масс, являются координатами точек четырёхмерного риманова пространства R_4 - так называемого мирового пространства - с метрической квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta ,$$

коэффициенты которой $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu} , \quad \mu,\nu = 1,2,3,4, \tag{32}$$

где $R_{\mu\nu}$ - сокращенный тензор кривизны

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \tag{33}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} , \tag{34}$$

R - инвариант тензора $R_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ - тензор материи, а $\varkappa$ - коэффициент пропорциональности .

Повторение индекса в формулах (33),(34) означает, что берётся сумма по этому индексу от единицы до четырёх. Так же как и в §2, каждый элемент матрицы $\| g^{\alpha\beta} \|$ равен отношению алгебраического дополнения соответствующего элемента матрицы $\| g_{\alpha\beta} \|$ на определитель $g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$. Величины $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ принято называть соответственно ковариантными и контравариантными компонентами фундаментального тензора.

В общей теории относительности значительная трудность возникает при отыскании выражения для тензора материи $T_{\mu\nu}$. Естественно, что в той части мирового пространства, где материя отсутствует, все компоненты $T_{\mu\nu}$ равны нулю. Поскольку в мировом пространстве материя распределена неравномерно и, более того, она сконцентрирована в виде движущихся тел, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между этими телами, во многих случаях в теории гравитации оправдано пользоваться вариантом уравнения (32), в котором все компоненты тензора материи равны нулю, т.е.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 . \tag{35}$$

Из обозначений (33),(34) следует, что (35) представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных относительно $g_{\alpha\beta}$. Знание функций $g_{\alpha\beta}$ позволяет установить метрические свойства мирового пространства, причём, что особенно важно, движение материальной точки определяется как распростран ние особенностей этих функций.

§ 8. Модельные уравнения в частных производных

Уравнение в частных производных, полученное при исследовании конкретно взятого явления, может пригодиться для моделирования и некоторых других явлений. В этом легко убедиться на простейших, так называемых модельных уравнениях, таких, например, как волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 , \tag{36}$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{37}$$

и уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \qquad (38)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - оператор Лапласа.

Как уже было показано в §3, уравнение (36) при $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ описывает колебания упругой, закрепленной по краям мембраны. Уравнение (36) при $n=1$, $x_1 = x$ совпадает с уравнением колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (39)$$

Как известно, уравнение (39) применяется также при исследовании электрических колебаний в проводах.

Покажем, что уравнение (36) при $n=3$ моделирует процесс распространения звука в газе. Действительно, поскольку для этого процесса характерным является то, что газ совершает колебательные движения, мы вправе пользоваться уравнениями гидромеханики (25),(27) и (28). Будем считать, что: 1)уравнение состояния (27) имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 0,$$

где p_0 и ρ_0 - значения давления p и плотности ρ распределения масс газа в начальный момент времени, а c_p и c_v теплоёмкости при постоянном давлении и постоянном объёме; 2) вязкость отсутствует и 3) скорость q, её производные первого порядка, изменение $1 - \frac{\rho}{\rho_0}$ плотности ρ и её производные настолько малы, что можно пренебречь величинами

$$\operatorname{grad} q^2, \quad \Omega \times q, \quad (\rho - \rho_0)\operatorname{div} q,$$

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \operatorname{grad} p, \quad k \geq 1, \quad \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \quad k > 1.$$

Ввиду того, что

$$\operatorname{div} \rho q = \operatorname{grad} \rho \cdot q + \rho \operatorname{grad} q,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^\gamma,$$

на основании принятых выше допущений I), 2), 3) уравнения (25), (28) и (40) можно заменить соответственно уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} q, \qquad (4I)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p \qquad (42)$$

и

$$p = p_0(1 - \gamma) + \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho. \qquad (43)$$

В силу (43) уравнение (42) принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0^2} \operatorname{grad} \rho \qquad (44)$$

Дифференцируя уравнение (4I) по t и подвергая уравнение (44) операции div будем иметь

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \, div \frac{\partial q}{\partial t}, \quad div \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\gamma P_0}{\rho_0^2} \Delta \rho .$$

Отсюда приходим к заключению, что ρ является решением уравнения (7) в котором $a^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ и тем самым справедливость сформулированного утверждения доказана.

В указанных выше совершенно разных физических явлениях сплошная среда совершает колебательные движения. Поэтому естественно, что эти явления с определенной приемлемой точностью математически моделируются в терминах волнового уравнения (36).

Уравнение (37), наряду с тем, что оно моделирует распространение тепла (см.§ 4), может служить для описания и других, так называемых явлений переноса. Например, выравнивание концентрации вещества при его неравномерном распределении, именуемое диффузией, при определенных допущениях описывается уравнением

$$c \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{D} \Delta u = 0, \qquad (45)$$

где c - коэффициент пористости, $\mathcal{D}$ - коэффициент диффузии, а $u(x,t)$ - концентрация вещества в точке x среды в момент времени t. При постоянных c и $\mathcal{D}$ (они обе положительны) уравнение (45) очевидно редуцируется к уравнению (37).

Уравнение Лапласа (38) при $n=2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, как уже было отмечено в конце § 3, описывает равновесное состояние мембраны с прогибом $u = u(x,y)$. Из формулы (3I) следует, что ньютонов потенциал масс является решением уравнения Лапласа в тех областях поля тяготения, где массы отсутствуют.

Уравнение (38) при $n=2$ и $n=3$ играет важную роль при изучении электрического поля. Действительно, ограничимся рассмотрением плоского электростатического поля, т.е. плоской среды, в каждой точке $\mathcal{P}(x,y)$ которой определен двухкомпанентный вектор $E=(E_x, E_y)$ – сила поля. Пусть $\mathcal{D}$ – произвольная область поля с гладкой границей $S=\partial\mathcal{D}$. Выражен

$$N=\int_S E\nu\, ds, \quad A=\int_S E s\, ds,$$

где ν и s – единичные векторы внешней нормали и положительно направленной касательной к S в точке интегрирования, называется потоком через контур и циркуляцией вдоль S вектора E.

В силу формулы Гаусса-Остроградского имеем

$$N=\int_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx\,dy, \quad A=\int_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Стягивая область $\mathcal{D}$ в точку $\mathcal{P}$, в пределе получаем

$$\lim_{\mathcal{D}\to\mathcal{P}}\frac{N}{|\mathcal{D}|}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=\operatorname{div} E,$$
$$\lim_{\mathcal{D}\to\mathcal{P}}\frac{A}{|\mathcal{D}|}=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\operatorname{rot} E.$$

Поскольку $N=4\pi e$, $\lim\limits_{\mathcal{D}\to\mathcal{P}}\frac{N}{|\mathcal{D}|}=4\pi\rho$, где e – суммарный заряд, лежащий в $\mathcal{D}$, а ρ – поверхностная плотность заряда в точке $\mathcal{P}$, мы можем написать

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=4\pi\rho. \tag{46}$$

Так как A представляет собой работу силы E на пути S и поле статическое, в силу закона сохранения энергии $A=0$, т.е.

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \qquad (47)$$

Выполнение равенства (47) означает, что выражение $-E_x dx - E_y dy = \ldots$ является полным дифференциалом. В виду того, что $\frac{\partial v}{\partial x} = -E_x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -E_y$ для функции $v(x,y)$, носящей название потенциала поля, из (46) получаем уравнение

$$\Delta v = -4\pi\rho. \qquad (48)$$

Наличие функции v позволяет полностью описать электрическое поле. Из (48) следует, что потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, где нет зарядов.

В тех случаях, когда явления сугубо нелинейны, нелинейными являются и моделирующие их уравнения в частных производных. Игнорирование этих нелинейностей без раскрытия их природы, как правило бесполезно и ненужно. Поэтому приходится заменить сложные нелинейные модели более простыми, но все же нелинейными моделями. В последние десятилетия специалисты ведут интенсивные исследования таких важных для приложения нелинейных моделей уравнений в частных производных, как, например, уравнение синус Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \sin u, \quad m = const,$$

уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0,$$

уравнение Хопфа-Коуля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad \nu = const,$$

уравнение Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

и др.

Глава II

Основные типы уравнений в частных производных и задачи, корректно поставленные для них

§ I. Понятие характеристической формы и деление по типам уравнений в частных производных

Как уже было отмечено в конце § I гл.I без ограничения общности можно считать, что величины, входящие в уравнение

$$F\left(x,\dots,\frac{\partial^{k} u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}},\dots\right)=0 \qquad (I)$$

все действительны.

Предположим, что в векторном равенстве (I) число уравнений N и число неизвестных функций N_1 равны $N=N_1$ и, что порядок каждого из этих уравнений равен m, причём $m>1$ при $N=1$.

Когда частные производные функций $F_1,\dots F_N$ по всем $p_{i_1\dots i_n}$ при $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$ непрерывны, линейные части приращений этих функций

$$\sum_{i_1\dots i_n}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial p^{j}_{i_1\dots i_n}}\,dp^{j}_{i_1\dots i_n},\qquad i=1,\dots N$$

являются главными. Поэтому естественно, что они играют важную роль в теории уравнений в частных производных вида (I).

С помощью квадратных матриц

$$\left\|\frac{\partial F_i}{\partial p^{j}_{i_1\dots i_n}}\right\|,\quad i,j=1,\dots N,\quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m$$

составим форму порядка Nm относительно действительных параметров $\lambda_1,\dots\lambda_n$

$$K(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \det \sum_{i_1 \dots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \dots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_n^{i_n}, \quad (2)$$

где сумма берётся по всевозможным неотрицательным целым значениям индексов $i_1, \dots i_n$, удовлетворяющим условию $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Выражение (2), в котором

$$p^j_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad j = 1, \dots N,$$

называется <u>характеристической формой (характеристическим детерминантом) уравнения (I)</u>. Когда уравнение (I) линейно, коэффициенты формы (2) зависят только от точки x, в общем же случае они являются функциями также искомого решения $u(x)$ и его производных.

По характеру формы (2) уравнения в частных производных вида (I) делятся по типам.

Сначала будем считать, что уравнение (I) линейно. Если для фиксированной точки x области $\mathcal{D}$ задания уравнения (I) можно найти такое неособое аффинное преобразование переменных

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \dots, \mu_n) \quad i = 1, \dots n,$$

в результате которого полученная из (2) форма содержит лишь ℓ, $0 < \ell < n$ переменных μ_i, то говорят, что уравнение (I) в точке x <u>параболически вырождается.</u>

Если в пространстве переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ коническое многообразие

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \qquad (3)$$

не имеет (решения μ) действительных точек, кроме $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, уравнение (I) в точке x называется эллиптическим. При отсутствии параболического выражения говорят, что уравнение (I) в точке x гиперболично, если в пространстве переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ существует такая прямая, что если принять её за координатную ось в новых переменных $\mu_1, \dots, \mu_n$, полученных неособым аффинным преобразованием $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное уравнение (3) имеет ровно Nm действительных корней (простых или кратных) при любом выборе значений остальных координат μ.

Аналогичным образом происходит деление по типам уравнения (I) в нелинейном случае по характеру формы (2), в которой $p_{i_1 \dots i_n}$ заменены через $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \dots, m$.

Поскольку на этот раз коэффициенты формы (2) зависят наряду с точкой x от искомого решения и от его производных, классификация по типам в рассматриваемом случае имеет смысл лишь для этого решения.

§ 2. Классификация по типам линейных уравнений в частных производных второго порядка

Без ограничения общности будем считать, что линейное уравнение в частных производных второго порядка записано в виде (ср.с § I гл. I)

$$\equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x). \tag{4}$$

В случае, когда (4) представляет собой систему уравнений, предполагается, что A_{ij}, B_i и C являются квадратными $N\times N$ матрицами, а f и u – N-мерными векторами. Причём, если $G = \| G_{ik} \|$ – квадратная $N\times N$ матрица и $v=(v_1,\dots,v_N)^{T}$ – вектор с N компонентами, под произведением Gv понимается N-мерный вектор с компонентами

$$(Gv)_\ell = \sum_{k=1}^{N} G_{\ell k} v_k, \quad \ell = 1,\dots N.$$

При $N=1$ характеристическая форма (2), соответствующая уравнению (4), является квадратичной

$$K(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j. \tag{5}$$

В настоящем параграфе ниже и в следующем параграфе под (4) будем понимать одно скалярное уравнение.

По данному в предыдущем параграфе определению уравнение (4) в точке $x\in\mathcal{D}$ (предполагается, что вырождение порядка уравнения исключается) будет эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того форма (5) определена (положительно или отрицательно), знакопеременна или вырождена.

В каждой точке $x\in\mathcal{D}$ квадратная форма Q при помощи неособого аффинного преобразования $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1,\dots,\mu_n), i=1,\dots,n$

может быть приведена к каноническому виду $Q=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i^2$, где коэффициенты α_i, $i=1,\dots,n$, принимают значения $1, -1, 0$, причём число отрицательных коэффициентов (индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами.

Когда все $\alpha_i=1$ или все $\alpha_i=-1$, $i=1,\dots,n$, т.е. когда форма Q соответственно положительно или отрицательно определена (дефинитна), уравнение (4) является эллиптическим в точке $x\in\mathcal{D}$. Если один из коэффициентов α_i отрицателен, а все остальные положительны (или наоборот), то уравнение (4) в точке x гиперболично. В случае, когда ℓ, $1<\ell<n-1$, коэффициентов α_i положительны, а остальные $n-\ell$ отрицательны уравнение называется ультрагиперболическим. Если же хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю (все α_i не могут равняться нулю, ибо вырождение порядка уравнения исключается), то уравнение (4) в точке x параболично. $Lu=f$

Говорят, что в области $\mathcal{D}$ своего задания (4) является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа, если оно соответственно эллиптично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области.

Эллиптическое в области $\mathcal{D}$ уравнение (4) называется равномерно эллиптическим, если существуют отличные от нуля действительные числа k_0 и k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

для всех $x\in\mathcal{D}$.

Пример уравнения

$$x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (6)$$

(1) показывает, что эллиптическое в обл-ти своего задания ур-ие необязано быть равномерно эллиптическим. Ур-ие (6) эллиптично в каждой точке полупр-ва $x_n>0$, не будучи в нём равномерно эллиптическим.

Когда в разных частях обл-ти D ур-ие (4) принадлежит к различным типам, то говорят, что оно является ур-м смешанного типа в этой обл-ти. Ур-ие (6) даёт пример ур-ия смешанного типа в $\forall$ обл-ти D пр-ва E_n, пересечение которой с гиперплоскостью $x_n=0$ не является пустым.

В дальнейшем под определенностью квадратичной формы б. подразумевать её положительную определенность, ибо отрицательно определенная квадратичная форма умноженная на (-1) становится положительно определенной.

Предполагая, без ограничения общности, что форма Q симметрична, т.е. $A_{ij}=A_{ji}$, $i,j=1,\dots,n$, и используя критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм, мы можем, не приводя квадратичную форму Q в каждой т. $x\in D$ к каноническому виду, утверждать, что для эллиптичности ур-ия в обл-ти D необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы $A=\|A_{ij}\|$ были положительны во всех точках этой обл-ти.

В каждой фиксированной точке $x\in D$ всегда можно найти неособое преобразование (замену) $y=y(x)$ независимых переменных $y_i=y_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=1,\dots,n$, в результате которого ур-ие (4) в этой точке приводится к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}+\beta_i\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)+\gamma v=\delta, \qquad (7)$$

где постоянные α_i, $i=1,\dots,n$, принимают значение $1,-1,0$,

$$v(y)=u[x(y)],\quad \delta(y)=f[x(y)],$$

а функции β_i,γ выражаются через коэффициенты ур-ия (4).

Действительно, в качестве такого преобразования примем аффинное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ki} x_k, \quad i=1,\ldots,n,$$

где $\|g_{ik}\|$ - матрица неособого аффинного преобразования $\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}\mu_k$, $i=1,\ldots,n$, приводящего квадратичную форму (5) к каноническому виду $Q=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\mu_s^2$, т.е.

$$Q=\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\mu_k\mu_l, \quad a_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} g_{ik} g_{jl},$$

$$a_{kl}=\begin{cases}\alpha_s, & k=l=s\\ 0, & k\neq l\end{cases}$$

Отсюда, учитывая то обстоятельство, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n} g_{ik}g_{jl}\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_l}$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\sum_{k,l=1}^{n} g_{ik}g_{jl}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k\partial y_l}=\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k\partial y_l}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n} B_i\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\frac{\partial v}{\partial y_k}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\frac{\partial v}{\partial y_k},$$

$$\beta_k=\sum_{i=1}^{n} B_i g_{ik}, \quad k=1,\ldots,n.$$

сразу приходим к ур-ю (7).

Следует отметить, что не всегда можно найти преобразование независимых переменных, позволяющее привести ур-е (4) к каноническому виду (7) не только во всей области задания этого ур-я, но даже вблизи данной т. области. В этом отношении исключение представляет случай двух независимых переменных.

Ур-е (4) в случае $n=2$ в обозначениях

$$x_1=x, \quad x_2=y,$$

$$A_{11}=a(x,y), \quad A_{12}=A_{21}=b(x,y), \quad A_{22}=c(x,y)$$

$$B_1=\alpha(x,y), \quad B_2=e(x,y), \quad C=g(x,y), \quad f=f(x,y).$$

запишем в виде

$$a u_{xx}+2b u_{xy}+c u_{yy}+\alpha u_x+e u_y+g u=f. \quad (8)$$

Кривая $\varphi(x,y)=const$, где $\varphi(x,y)$ решение ур-ия

$$a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0 \qquad (9)$$

называется характеристической кривой ур-ия (8), а направление (dx,dy), определенное из равенства

$$a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0 \qquad (10)$$

- характеристическим направлением.

Равенство (10) представляет собой обыкновенное дифференциальное ур-ие характеристических кривых.

По приведенному выше определению ур-ие (8) эллиптично, гиперболично или параболично в зависимости от того, будет ли квадратичная форма $a\,dy^2+2b\,dx\,dy+c\,dx^2$ определена (положительно или отрицательно), знакопеременна или полуопределена (вырождена). В соответствии с этим ур-е (8) является эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того, будет ли дискриминант $ac-b^2$ квадратичной формы $a\,dy^2+2b\,dx\,dy+c\,dx^2$ больше нуля, меньше нуля или равен нулю соответственно. Следовательно, записывая дифференциальное ур-ие характеристических кривых (10) в виде

$$a\,dy=(b\pm\sqrt{b^2-ac})\,dx,$$

приходим к заключению, что в обл-ти эллиптичности ур-ие (8) действительных характеристических направлений не имеет, в то время как в каждой т. гиперболичности $\exists$ по два различных действительных характеристических направления, а в каждой т. параболичности имеется одно действительное характеристическое направление. Кроме того очевидно, что в обл-ти эллиптичности ур-ие (8) действительных характеристических кривых не имеет, а при достаточной гладкости коэффициентов a, b, c обл-ть гиперболичности ур-ие (8) покрыта сетью двух семейств характеристических кривых, а область параболичности – одним семейством характеристических кривых.

В случае уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (11)$$

где m – нечётное натуральное число, равенство (10) имеет вид

$$y^m dy^2 + dx^2 = 0, \qquad (12)$$

откуда следует, что это ур-ие в полуплоскости $y>0$ действительных характеристических направлений не имеет, в то время как в каждой точке прямой $y=0$ и полуплоскости $y<0$ оно имеет соответственно по одному и по два характеристических направления. Записывая диф. ур-ие (12) характеристических кривых в виде $dx \pm (-y)^{m/2} dy = 0$ и интегрируя, заключаем, что полуплоскость $y<0$ покрыта двумя семействами характеристических кривых ур-ия (11)

$$x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = const$$

и

$$x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = const$$

На плоскости переменных x, y в области D, пересечение которой с прямой $y=0$ не пусто, (11) является ур-ем смешанного типа, причём при $y>0$ оно эллиптично, при $y<0$ гиперболично, а при $y=0$ параболически вырождается.

§3 Канонические виды линейных ур-ий в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

Б. считать, что линейное ур-ие в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными записано в виде (8). В условиях достаточной гладкости коэффициентов a, b, c всегда можно найти такое неособое преобразование $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ независимых переменных x,y, в результате которого уравнение (8) в области $\mathcal{D}$ его задания приводится к одному из следующих канонических видов

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + Av_{\xi} + Bv_{\eta} + Cv = f_0 \qquad (13)$$

в эллиптическом случае,

$$v_{\xi\eta} + Av_{\xi} + Bv_{\eta} + Cv = f_0 \qquad (14)$$

или

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + Av_{\xi} + Bv_{\eta} + Cv = f_0 \qquad (15)$$

в гиперболическом случае и

$$v_{\eta\eta} + Av_{\xi} + Bv_{\eta} + Cv = f_0 \qquad (16)$$

в параболическом случае.

Возможность приведения уравнения (8) к каноническим видам (13),(14),(15),(16) во всей области $\mathcal{D}$ его задания (или как ещё принято говорить "в большом") довольно трудно доказать. Однако рассуждение, приводящее к осуществлению такой возможности, сильно упрощается, если ограничиться рассмотрением достаточной малой окрестности точки (x , y)области $\mathcal{D}$.

Пусть теперь (8) является уравнением смешанного типа в области $\mathcal{D}$, причём его параболическое вырождение имеет место вдоль кривой σ . Уравнение этой кривой можно записать в виде

$$ac - b^2 = 0. \tag{17}$$

Будем считать, что a, b, c являются аналитическими функциями своих аргументов, а σ - простая аналитическая дуга.

Запишем уравнение (17) в виде

$$H^n(x,y)\ G(x,y) = 0, \tag{18}$$

где n - натуральное число, $H(x,y)=0$ является уравнением кривой σ, вдоль которой функция $G(x,y) \neq 0$ и, кроме того, H_x и H_y одновременно в нуль не обращаются.

Обозначим через σ_1 участок дуги σ, вдоль которого либо

$$a H_x^2 + 2b H_x H_y + c H_y^2 \neq 0, \tag{19}$$

либо

$$a H_x^2 + 2b H_x H_y + c H_y^2 = 0. \tag{20}$$

Выполнение условия (19) означает, что направление характеристики уравнения (8) в точках σ_1 не совпадает с направлением касательной этой кривой, в то время как равенство (20) означает, что эти направления совпадают. Если $\alpha(x,y)$ - наименьший угол между касательной к кривой σ_1 в точке (x,y) и выходящим из этой точки характеристическим направлением, то будем считать, что всюду на σ_1 либо

$$\alpha(x,y) \neq 0, \tag{21}$$

либо

$$\alpha(x,y)=0. \tag{22}$$

Пусть δ_1 - подобласть области δ, содержащая внутри себя дугу σ_1 и в которой выполняется всюду условие либо (2I), либо (22).

Доказывается, что можно найти такое неособое в области δ_1 преобразование независимых переменных $\xi=\xi(x,y),\ \eta=\eta(x,y)$ при помощи которого в этой области уравнение (8) приводится к одному из следующих видов

$$\eta^{2m+1}v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+Av_\xi+Bv_\eta+Cv=f_0 \tag{23}$$

или

$$v_{\xi\xi}+\eta^{2m+1}v_{\eta\eta}+Av_\xi+Bv_\eta+Cv=f_0 \tag{24}$$

при нечётном $n=2m+1$ и при соблюдении условий (2I) или (22), и

$$\eta^{2m}v_{\xi\xi}\pm v_{\eta\eta}+Av_\xi+Bv_\eta+Cv=f_0 \tag{25}$$

или

$$v_{\xi\xi}\pm\eta^{2m}v_{\eta\eta}+Av_\xi+Bv_\eta+Cv=f_0 \tag{26}$$

при чётном $n=2m$ и при соблюдении условий (2I) или (22).

В области δ_1 уравнения (23) и (24) являются уравнени смешанного (эллиптико-гиперболического)типа с параболическим вырождением при $\eta = 0$, в то время как уравнения (25) и (26) при $\eta \neq 0$ всюду эллиптичны или всюду гиперболичны, а при $\eta = 0$ они оба параболически вырождаются. В области, содержа щей внутри себя участок линии параболического вырождения $\eta = 0$ с помощью неособого преобразования переменных уже не возможно привести ни одно из уравнений (23), (24), (25), (26) к другому или к уравнению такого же вида, но с другим показателем сте пени η .

§ 4. Системы линейных уравнений в частных производн

Как уже было отмечено в § I настоящей главы, систему ли-нейных уравнений в частных производных второго порядка, в кото число уравнений N совпадает с числом N_1 искомых функций, можно записать в виде (4). В этом случае характеристическая форма (2) принимает вид

$$K(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \det \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j . \tag{27}$$

Очевидно, что её степень равна $2N$.

Деление по типам системы вида (4) происходит так, как это было указано в § I.

В случае двух независимых переменных для системы (4) будем пользоваться записью (8), в которой a, b, c, d, e, g – квадратные $N\times N$ матрицы, а $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f = (f_1, \dots, f_N)$ – векторы. Без ограничения общности можно считать, что $\det a \neq$

Этого всегда можно добиться подходящей заменой независимых переменных и искомых функций.

Эллиптичность системы (8) означает, что корни характеристического полинома степени $2N$

$$\mathcal{P}(\lambda) \equiv \det Q(\lambda), \quad Q(\lambda) \equiv a\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

все комплексны. Гиперболичность же этой системы равносильна тому, что наряду с тем, что исключается её параболическое вырождение, все корни (нули) полинома $\mathcal{P}(\lambda)$ действительны.

Полином $\mathcal{P}(\lambda)$ при наличии его корней (нулей) λ_i с кратностью k_i можно представить в виде

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det a \prod_{i=1}^{\ell} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{\ell} k_i = 2N.$$

Покажем, что

$$k_i \geq N - r_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \tag{28}$$

где

$$r_i = \operatorname{rank} Q(\lambda_i).$$

Действительно, поскольку $r_i = \operatorname{rank} Q(\lambda_i)$, среди столбцов $q_j(\lambda_i)$, $j = 1, \dots N$, матрицы $Q(\lambda_i)$ линейно независимыми являются r_i. Без ограничения общности примем, что ими являются столбцы $q_1, \dots, q_{r_i}$. Следовательно, имеем

$$q_j(\lambda_i) = \sum_{p=1}^{r_i} c_{ijp}\, q_p(\lambda_i), \quad j = r_{i+1}, \dots, N.$$

Примем обозначения

$$q_{ij}^{0}(\lambda) \equiv q_j(\lambda) - \sum_{p=1}^{r_i} C_{ijp}\, q_p(\lambda), \quad j = r_i+1, \dots, N.$$

Так как $q_{ij}^{0}(\lambda_i) = 0$, то $q_{ij}^{0}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)\, q_{ij}^{1}(\lambda)$, где $q_{ij}^{1}(\lambda)$ - полиномиальный вектор первой степени относительно λ.

Ввиду того, что

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det Q(\lambda) =$$

$$= \det [q_1(\lambda), \dots, q_{r_i}(\lambda), q_{i r_i+1}^{0}(\lambda), \dots, q_{iN}^{0}(\lambda)]$$

$$= (\lambda-\lambda_i)^{N-r_i} \det [q_1(\lambda), \dots, q_{r_i}(\lambda), q_{i r_i+1}^{1}(\lambda), \dots, q_{iN}^{1}(\lambda)],$$

справедливость сформулированного утверждения очевидна.

По определению гиперболическая система (8) называется нормально гиперболической, если в формулах (28) знак равенства исключен. Нормально гиперболическая система называется строго гиперболической, если корни (нули) λ_i полинома $\mathcal{P}(\lambda)$ все простые.

Очевидно, что преобразованием независимых переменных и искомых функций не всегда можно привести систему (8) к видам (I3),(I4),(I5),(I6),(23),(24),(25),(26), в которых A, B, C - квадратные $N \times N$ матрицы, а $u = (u_1, \dots, u_N)$, $f_0 = (f_1, \dots f_N)$ векторы.

Линейные системы уравнений в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x) u = F, \tag{29}$$

где

A_i, B - квадратные $N \times N, N > 1$, матрицы, $u = (u_1, \dots u_N)$-

искомый, а $F=(F_1,\dots,F_N)$ - заданный N-мерные векторы, классифицируются по схеме, указанной в §I настоящей главы.

В случае двух независимых переменных $x_1=x$, $x_2=y$ записывая систему (29) в виде

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F \qquad (30)$$

и считая, без ограничения общности, что $\det a\neq 0$, как и выше рассмотрим полином $P(\lambda)$ степени N относительно λ

$$P(\lambda)=\det(a\lambda+b).$$

Когда $P(\lambda)$ не имеет действительных корней система (30) будет эллиптической, а когда при исключении параболического вырождения, все корни этого полинома действительны, система (30) будет гиперболической, причём и на этот раз вводятся понятия нормальной и строгой гиперболичности.

Классификация по типам линейных систем уравнений в частных производных высокого порядка происходит аналогично, поэтому здесь на этом мы останавливаться не будем.

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что система уравнений (20) линейной статической теории упругости в компонентах смещения, выведенная в § 5 гл.I, эллиптична, так называемая обобщенная система Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+a(x,y)u+b(x,y)v=F_1,\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+c(x,y)u+d(x,y)v=F_2$$

также эллиптична, а система

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+a(x,y)u+b(x,y)v=F_1,\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+c(x,y)u+d(x,y)v=F_2$$

строго гиперболична.

Остановимся ещё на примере системы уравнений в частных производных

$$q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}=0,\quad q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_1}+q_2\frac{\partial q_2}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}=0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho q_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho q_2)=0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_1}-\frac{\partial q_1}{\partial x_2}=0, \tag{33}$$

описывающей плоское стационарное безвихревое движение сжимаемой среды.

С учётом (33) и уравнения состояния $p=p(\rho)$ из (31) следует равенство

$$\frac{1}{2}dq^2+\frac{1}{\rho}dp=\frac{1}{2}dq^2+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho=0, \tag{34}$$

q – скалярная величина скорости q,

$$q^2=q_1^2+q_2^2.$$

Интегрируя (34) получаем равенство

$$\frac{1}{2}q^2+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=\frac{1}{2}q^2+\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho,\qquad p_0=p(\rho_0),$$

известное под названием уравнения Бернулли.

Из уравнения Бернулли в силу уравнения состояния приходим к заключению, что плотность среды ρ является функцией q

$$\rho=\rho(q) \tag{35}$$

и, кроме того, величина

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = -\frac{\rho q}{\rho'(q)} \qquad (36)$$

имеет размерность квадрата скорости. Величина c наз. местной скоростью звука, безразмерная величина

$$M = \frac{q}{c} \qquad (37)$$

— числом Маха, а линия на плоскости движения x_1, x_2, вдоль которой $M=1$ — звуковой линией. Значение q, для к. $M=1$ обозначим через $q_к$.

Введем в рассмотрение потенциала скорости $\varphi(x_1, x_2)$ и функции тока $\psi(x_1, x_2)$ при помощи равенств

$$q_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad q_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \qquad (38)$$

ур-ия (32) и (33), очевидно, будут удовлетворены и выражение q^2 принимает вид

$$q^2 = (\operatorname{grad}\varphi)^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (\operatorname{grad}\psi)^2 \qquad (39)$$

Плоскость переменных x_1, x_2, на к. изучается движение (течение) сжимаемой среды, наз. физической плоскостью. Поскольку каждой точке (x_1, x_2) среды ставится в соответствие вектор скорости (q_1, q_2) частицы с координатами (x_1, x_2), знание закона движения означает, что известны функции $q_1(x_1, x_2)$, $q_2(x_1, x_2)$ или что то же самое, — функции $q(x_1, x_2)$, $\theta(x_1, x_2)$, определенные из рав-в:

$$q_1 = q\cos\theta, \quad q_2 = q\sin\theta. \qquad (40)$$

Плоскость изменения переменных q, θ принято называть пл-ю годографа.

В силу (39) равенства (38) относительно φ и ψ представляет собой систему нелинейных ур-ий в частных производных. Покажем, что в результате перехода от физической плоскости к плоскости годографа эта система становится линейной.

Действительно, в силу (38) и (40) имеем тождество

$$dx_1 + i\,dx_2 = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}dx_1 + i e^{-i\theta}dx_2\right) = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right)$$

или, что тоже самое

$$dx_1 + i\,dx_2 = \frac{e^{i\theta}}{q}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dq + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta\right] \quad (41)$$

Для того, чтобы выражение (41) было полным дифф-ом необходимо и достаточно выполнение ур-й

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{q\rho_0^2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0 \quad (42)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\rho_0}{\rho q}\left(1 + \frac{\rho' q}{\rho}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad (43)$$

Так как в силу (36) и (37)

$$\frac{\rho' q}{\rho} = -M^2,$$

равенство (43) равносильно равенству

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{1-M^2}{q}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad (44)$$

Поскольку в силу (35), (36) и (37) величины ρ и M являются функциями только q, равенства (42) и (44) относительно φ и ψ представляет собой линейную систему ур-й в частных производных первого порядка.

Вводя в рассмотрение вместо q новое безразмерное независимое переменное v, определенное по формуле:

$$v = -\int^q \frac{\rho(\tau)}{\rho_0 \tau}\,d\tau$$

и учитывая, что $\frac{\partial}{\partial q} = -\frac{\rho}{\rho_0 q}\frac{\partial}{\partial v}$

систему (42), (44) м. записать в виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} - K(v)\frac{\partial u_2}{\partial\theta} = 0, \quad (45)$$

где $u_1 = \varphi(q,\theta)$, $u_2 = \psi(q,\theta)$ и

$$K(v) = \frac{\rho_0^2}{\rho^2}(1-M^2)$$

Обл-ти на плоскости годографа, в к. $K>0$ и $K<0$ называются соответственно обл-ми дозвукового и сверхзвукового движения, а обл-ть, пересечение к. со звуковой линией не пусто — обл-ю трансзвукового движения. По данной выше классиф функции система (45) эллиптична в области дозвукового движения, гиперболична в области сверхзвукового движения, а в области трансзвукового движения она относится к системе уравн. смешанного типа.

В результате исключения функции u_1 из системы (45) получается уравн. Чаплыгина

$$K(\tau)\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2}=0.$$

§ 5. Понятие корректности постановки задач для уравнений в частных производных

Существуют уравнения в частных производных, множество решений которых весьма узко или даже пусто. Так, например, множество действительных решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

исчерпывается функцией $u(x) = const$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 1 = 0$$

вовсе не имеет действительных решений. Однако, встречающиеся в приложениях уравнения в частных производных как правило имеют обширное семейство решений.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеется понятие общего решения. Сущность этого понятия особенно ярко раскрывается на примере линейного уравнения порядка n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0, \qquad (46)$$

где $a_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$ – заданные на некотором промежутке $x_0 \le x \le x_1$ непрерывные функции. Как известно, это уравнение имеет систему n линейно независимых решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, при помощи которых любое его решение $y(x)$ можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \qquad (47)$$

где C_k, $k = 1, \ldots n$, – постоянные. Именно в этом смысле выражение (47), в котором $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (46).

В теории уравнений в частных производных аналогичный критерий общности решения хотя и отсутствует, но в некоторых случаях все же можно выписать формулы, выступающие в роли общего решения. Так, например, уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (48)$$

в результате замены переменных

$$\xi = x+t, \quad \eta = x-t, \quad v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

записывается в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Отсюда интегрированием находим, что

$$v(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Следовательно, формула

$$u(x,t) = f_1(x+t) + f_2(x-t) \qquad (49)$$

при любых дважды непрерывно дифференцируемых функциях f_1, f_2 даёт регулярное решение уравнения (48).

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что выражение

$$u(x,t) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}) \qquad (50)$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = x+iy$, представляет собой регулярное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \qquad (51)$$

Доказывается, что любые решения уравнений (48) и (51) можно представить соответственно в виде (49) и (50), т.е. эти формулы выступают в роли общего решения указанных уравнений.

В задачах, которые моделируются в терминах уравнений в частных производных, к искомым решениям данного уравнения предъявляются дополнительные требования, т.е. для них ставятся задачи с определенными условиями на многообразиях, размерность которых на единицу меньше размерности области $\mathcal{D}$ задания самого уравнения, причём, эти многообразия, носящие название носителей данных, лежат либо в области $\mathcal{D}$, либо на её границе $\partial\mathcal{D}$. Когда искомое решение, подчиненное этим условиям, существует, единственно и в определенном смысле (о котором речь пойдёт ниже) устойчиво, то <u>задача</u> называется <u>корректно</u> или <u>правильно поставленной.</u> Важным является то обстоятельство, что корректность постановки задач для уравнений в частных производных существенно зависит от типа рассматриваемого уравнения.

Остановимся на некоторых примерах корректно поставленных задач для простейших уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов.

§ 6. Волновое уравнение

Как уже было установлено в § 3 гл.I в линейной теории колебаний закрепленной по краям упругой мембраны смещение $u(x,y,t)$ её точек (x, y) является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \qquad (52)$$

представляющее собой, по данному в § 2 определению, уравнение гиперболического типа.

В результате непосредственных измерений наблюдатель в состоянии вычислить в начальный момент t_0 времени t как функцию $u(x,y,t_0) \equiv \varphi(x,y)$ – определяющую начальное положение мембраны, так и начальную скорость $\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi(x,y)$ её движения.

Следовательно, функция $u(x,y,t)$, описывающая колебания закрепленной по краям мембраны, занимающей в положении покоя область G плоскости переменных x, y, должна быть регулярным решением уравнения (52), удовлетворяющим условиям

$$u(x,y,t_0) = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi(x,y). \qquad (53)$$

Уравнение (52) является частным случаем при $n=2$, $x_1=x$ $x_2=y$ волнового уравнения с n пространственными переменными $x_1, \dots, x_n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (54)$$

Решения уравнения (54) принято называть волнами.

Когда $n=1$ или $n=3$ уравнение (54) моделирует колебания соответственно одномерного континуума (например, струны) и трёхмерного континуума в декартовых ортогональных координатах. Уравнение (54) гиперболично для всех значений независимых переменных.

Пусть G – область n-мерного пространства E_n точек $x=(x_1,\dots x_n)$, лежащая в гиперплоскости $t=t_0$ пространства E_{n+1} точек (x,t), а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные в G действительные функции.

Задача определения регулярного решения $u(x,t)$ уравнения (54) по заданным

$$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\Big|_{t=t_0} = \psi(x), \quad x \in G \qquad (55)$$

носит название задачи Коши, а условия, сформулированные в виде равенств (55) - начальных условий. В такой постановке задачи Коши носителем данных является область G гиперплоскости $t = t_0$ пространства E_{n+1}.

Решение задачи (54), (55) строится в квадратурах. Мы здесь ограничимся рассмотрением случаев $n=3$, $n=2$, $n=1$. Сперва будем считать, что $n=3$.

Покажем, что функция $u(x,t)$, определенная по формуле

$$u_0(x,t) = \int_S \frac{\mu(y)\,dS_y}{|y-x|},$$

где $|y-x|$ - расстояние между точками $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, S - сфера $|y-x|^2 = t^2$, а μ - заданная на S действительная функция, обладающая непрерывными производными второго порядка, является регулярным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (56)$$

В результате замены переменных $y_i - x_i = t\xi_i$, $i=1,2,3$, перепишем выражение $u_0(x,t)$ в виде

$$u_0(x,t) = t\int_{\sigma} \mu(x_1+t\xi_1,\ x_2+t\xi_2,\ x_3+t\xi_3)\,d\sigma_\xi, \qquad (57)$$

где σ - единичная сфера $|\xi|=1$, а

$$d\sigma_\xi = \frac{dS_y}{t^2} = \frac{dS_y}{|y-x|^2} \qquad (58)$$

- элемент её площади.

Представленная формулой (57) функция $u_0(x,t)$ очевидно имеет непрерывные вторые производные, причём

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i^2} = t \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} \, d\sigma_\xi . \qquad (59)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \int_{\sigma} \mu(x_1+t\xi_1, x_2+t\xi_2, x_3+t\xi_3)\, d\sigma_\xi +$$

$$t \int_{\sigma} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \xi_i \, d\sigma_\xi = \frac{u_0}{t} + \frac{1}{t} I, \qquad (60)$$

где

$$I = \int_{S} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1} \nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} \nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3} \nu_3 \right] dS_y , \qquad (61)$$

а $\nu(y)$ – единичный вектор внешней нормали к S в точке y.

Дифференцируя по t равенство (60), находим

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\frac{u_0}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{1}{t^2} I + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{u_0}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_0}{t} + \frac{1}{t} I\right) -$$

$$- \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (62)$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского перепишем формулу (61) в виде

$$I = \int \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} \, d\tau_y , \qquad (63)$$

где интеграл берется по шару $|y-x|^2 < t^2$.

Переходя от декартовых координат y_1, y_2, y_3 к сферическим ρ, ϑ, φ, из (63) получаем

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \Delta \mu \rho^2 \sin\vartheta \, d\varphi, \tag{64}$$

где $\rho^2 \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi = d\tau$.

Так как $\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = d\sigma_\xi$, то из (64) находим

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \Delta \mu \sin\vartheta \, d\varphi = t^2 \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} \, d\sigma_\xi. \tag{65}$$

В силу (65) и (62) имеем

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = t \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} \, d\sigma_\xi. \tag{66}$$

На основании (59) и (66) заключаем, что $u(x,t)$ является регулярным решением уравнения (54) при $n=3$.

Примем обозначение

$$t \, M(\mu) = \frac{1}{4\pi} u_0(x,t), \tag{67}$$

где, в силу (57)

$$M(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \mu(x_1 + t\xi_1, x_2 + t\xi_2, x_3 + t\xi_3) \, d\sigma_\xi. \tag{68}$$

С учетом формулы (58) выражение (68) для $M(\mu)$ запишем в виде

$$M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_S \mu(y) \, dS_y \tag{69}$$

Поскольку $4\pi t^2$ является площадью сферы $S: |y-x|^2 = t^2$, запись (69) означает, что $M(\mu)$ представляет собой интегральное среднее функции μ по сфере S.

Очевидно, что наряду с $tM(\mu)$ регулярным решением уравнения (56) является и функция $\frac{\partial}{\partial t}[tM(\mu)]$ при требовании, что $\mu(y)$ имеет непрерывные производные третьего порядка.

Следовательно функция

$$u(x,t) = t\,M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}\,[t\,M(\varphi)] \qquad (70)$$

является регулярным решением уравнения (56), если $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ обладают непрерывными производными второго и третьего порядка соответственно.

Легко видеть, что определенная по формуле (70) функция $u(x,t)$ удовлетворяет также и начальным условиям (55) при $t_0 = 0$. Действительно, в силу (68) из (70) получаем

$$u(x,0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \varphi(x)\,d\sigma_\xi = \varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \psi(x)\,d\sigma_\xi = \psi(x).$$

Когда начальные условия берутся при $t = t_0$ в виде (55), решением задачи (55),(56) очевидно является функция $u(x, t-t_0)$ где $u(x,t)$ даётся по формуле (70).

Выражение (70) носит название <u>формулы Кирхгофа.</u>

По формуле Кирхгофа (70) решение $u(x,t)$ задачи Коши (55),(56) определяется в тех точках (x,t) пространства E_4 переменных x_1, x_2, x_3, t, которые обладают тем свойством, что пересечение конуса $K: |y-x|^2-(\tau-t)^2=0$ с вершиной в точке (x,t) с гиперплоскостью $\tau=0$ принадлежит облас G. Когда носитель G данных (55) совпадает с гиперплоскостью $t=0$ пространства E_4, формула Кирхгофа опр деляет решение задачи Коши (55),(56) во всех конечных точка (x,t) пространства E_4.

Поскольку в силу (67) и (68)

$$\frac{\partial}{\partial t}[t M(\varphi)] = M(\varphi) + \frac{1}{t}\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_y} dS_y ,$$

из формулы Кирхгофа (70) следует, что для получения решен $u(x,t)$ задачи (55), (56) в точке (x,t) достаточно з значения φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ и ψ только на сфере $|y-x|^2=t^2$. Эт факт в теории звука известен под названием принципа Гю

Решение $u(x,t)$ задачи (54),(55) при $n=2$ может получено из формулы Кирхгофа методом спуска. Сущность э метода заключается в том, что когда в правой части форм (70) функции φ и ψ зависят только от двух переменн x_1, x_2, то эта формула даёт функцию

$$u(x,t) = u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|^2=t^2} \psi(x_1+y_1, x_2+y_2)\, dS_y$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t}\int_{|y|^2=t^2} \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2)\, dS_y\Big], \tag{71}$$

не зависящую от x_3 и удовлетворяющую по x_1 и x_2 как уравнению (54), так и начальным условиям (55).

Проекция $dy_1 dy_2$ элемента площади dS_y сферы $|y|^2=t^2$ на круг $y_1^2+y_2^2<t^2$ выражается через dS_y формулой

$$dy_1 dy_2 = dS_y \cos(\widehat{i_3, \nu}) = \frac{y_3}{|t|} dS_y$$

где i_3 - орт оси x_3, а ν - нормаль сферы $|y|^2 = t^2$ в точке (y_1, y_2, y_3). Поэтому, учитывая то обстоятельство, что при вычислении интегралов в правой части формулы (71) следует спроектировать на круг $y_1^2 + y_2^2 < t^2$ как верхнюю $y_3 > 0$, так и нижнюю половины сферы $|y|^2 = t^2$, эта формула запишется в виде

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha} \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}, \tag{72}$$

где α - круг $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$.

Формула (72), дающая решение задачи Коши (54),(55) при $n=2$ носит название формулы Пуассона. Из этой формулы видно, что для определения решения $u(x,t)$ задачи Коши (54),(55) в точке (x,t) в случае $n=2$ не достаточно знания значений $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ на окружности $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = t^2$. В определении $u(x_1, x_2, t)$ в точке (x_1, x_2, t) участвуют значения начальных данных во всех точках круга α. Это означает, что в случае $n=2$ в волновых процессах принцип Гюйгенса не имеет места.

Формулу, дающую решение задачи (54),(55) при $n=1$ очевидно можно получить из формулы Пуассона (72) опять применением метода спуска. Однако, для достижения этой цели мы воспользуемся формулой (49) представления решений уравнения (48). Подставляя выражение (49) для функции $u(x,t)$ в начальные условия (55) получаем

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\quad f_1'(x)-f_2'(x)=\psi(x),\ x\in G. \tag{73}$$

В результате интегрирования из второго равенства (73) находим

$$f_1(x)-f_2(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\psi(\tau)\,d\tau,\qquad x_0\in G. \tag{74}$$

В силу (74) и первого из равенств (73) имеем

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\psi(t)\,d\tau\Big],\ f_2(x)=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x)+\int\limits_{x}^{x_0}\psi(\tau)\,d\tau\Big]. \tag{75}$$

Подставляя значения f_1 и f_2 из формул (75) в правую часть формулы (49) получаем решение задачи (54),(55) для случая $n=1$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau\Big],\ x=x_1. \tag{76}$$

Формула (76) называется формулой Даламбера.

Множество точек области G, по начальным данным (55) на котором, вполне определяется значение $u(x,t)$ задачи (54),(55) в точке (x,t) пространства E_{n+1}, называется областью зависимости для точки (x,t). К области зависимости, разумеется не относятся точки, в которых значения функций $\varphi(x)$ $\psi(x)$ не участвуют в определении $u(x,t)$ в точке (x,t).

На основании формул (70),(72) и (76) заключаем, что при $n=3$ область зависимости определяется по принципу Гюйгенса, а при $n=2$ и $n=1$, областью зависимости для точки (x,t) является соответственно круг $|y-x|^2\le t^2$ или сегмент $|y-x|^2\le t^2$

принадлежащие G.

Значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на G влияют на значения $u(x,t)$ во всех точках $(x,t)\in E_{n+1}$, которые обладают тем свойством, что пересечение двух множеств G и $\{|y-x|^2<t^2\}$ не является пустым. Множество таких точек принято называть областью влияния.

Множество точек $(x,t)\in E_{n+1}$, в которых решение $u(x,t)$ задачи (54), (55) вполне определяется по значениям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на G, называется областью определения $u(x,t)$. Опять из формул (70),(72) и (76) следует, что область определения решения $u(x,t)$ составляют исключительно те точки $(x,t)\in E_{n+1}$, которые обладают следующим свойством: 1) при $n=3$, сфера $|y-x|^2=t^2$, являющаяся пересечением конуса

$$K:\ |y-x|^2=(\tau-t)^2$$

с вершиной в точке (x,t) с гиперплоскостью $\tau=0$, принадлежит G, 2) при $n=2$, не только окружность $|y-x|^2=t^2$, являющаяся пересечением конуса K с плоскостью $\tau=0$, но весь круг $|y-x|^2<t^2$ принадлежит G и, наконец, 3) при $n=1$, не только точки $(x-t,0),(x+t,0)$ пересечения прямых (вырожденного конуса) $y-x=\tau-t$, $y-x=t-\tau$, проходящих через точку (x,t) с прямой $\tau=0$, но весь прямолинейный отрезок между этими точками принадлежит G.

Теперь покажем, что в области своего определения решение задачи (54),(55) единственно. Допуская существование двух решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ этой задачи, в силу линейности уравнения (54) и начальных условий (55) приходим к заключению, что функция $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ является решением уравнения (54), удовлетворяющим однородным начальным условиям

Допуская $\exists$ двух решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ этой задачи, в силу линейности ур-я (54) и начальных усл-й (55) приходим к заключению, что ф-ция $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ является решением ур-я (54), удовлетворяющим однородным начальным условиям

$$u(x,0)=0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (77)$$

$\Rightarrow$, единственность решения задачи (54), (55) б. доказана, если покажем, что задача (54), (77) имеет только тривиальное (равное тождественно нулю) регулярное решение.

Т. D - конечная подобласть точек из области определения регулярного решения $u(x,t)$ задачи (54), (77), ограниченная конусом K и гиперплоскостью $t=0$.

Очевидно, что для $\forall$ регулярного решения $u(y,\tau)$ ур-я (54), в котором $t=\tau$, $x=y$, имеет место тождество:

$$-2\frac{\partial u}{\partial \tau}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)=-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right]=0.$$

Интегрируя это тождество по обл-ти D и применяя формулу Гаусса-Остроградского находим, что

$$\int_{\partial D}\left[-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_{i\nu}+\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\tau_\nu+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2\tau_\nu\right]ds=0, \qquad (78)$$

где $y_{i\nu}$, $i=1,\dots,n$, τ_ν - косинусы единичного вектора нормали ν к ∂D в точке (y,τ).

В силу условий (77) интеграл в левой части (распространенный по той части ∂D, на которой $\tau=0$, нулю. На оставшейся же части M границы области D, равенство (78) перепишем в виде

$$\int_M \frac{1}{\tau_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\tau_\nu-\frac{\partial u}{\partial \tau}y_{i\nu}\right)^2 ds=0. \qquad (79)$$

Поскольку $\tau_\nu=\mathrm{const}$, из (79) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}\tau_\nu-\frac{\partial u}{\partial \tau}y_{i\nu}=0, \quad i=1,\dots,n. \qquad (80)$$

Выполнение равенств (83) означает, что на M внутренние производные $u(y,\tau)$ по n линейно независимым направлениям равны нулю. Поэтому $u(y,\tau)=\mathrm{const}$ на M. Так как $u(y,0)=0$, то отсюда следует, что $u(y,\tau)=0$ всюду на D, в частности, $u(x,t)=0$. Ввиду того, что (x,t) – произвольная т. области определения решения $u(x,t)$ задачи (54), (55), оно $=0$ тождественно.

Из формул (70), (72) и (76) непосредственно следует, что бесконечно малое изменение начальных данных (55) влечет за собой бесконечно малое изменение решения задачи (54), (55). В этом смысле решение задачи (54), (55) устойчиво.

Таким образом, приходим к заключению, что задача Коши с начальными условиями (55) для волнового ур-ия (54) поставлена корректно.

Поскольку область определения решения задачи (54) содержит внутри себя носитель G данных, было бы неправильно называть эту задачу граничной или краевой.

Когда носитель G данных (55) совпадает с плоскостью $t=0$, область определения решения (55) совпадает с множеством всех конечных точек E_{n+1}.

$\exists$ формулы, дающие в квадратурах решение задачи (54), (55) для $\forall$, как четного, так и нечетного натурального n. Они носят название формул Пуассона.

§ 7. Уравнение Лапласа

Записанное в декартовых ортогональных координатах уравнение Лапласа (38) из главы I

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (81)$$

эллиптично во всем пространстве E точек $x=(x_1,\dots x_n)$. Поскольку соответствующая этому уравнению квадратичная форма (5) имеет канонический вид

$$Q(\lambda_1,\dots \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2,$$

очевидно, что оно равномерно эллиптично.

Регулярное в области D пространства E_n решение $u(x) = u(x_1,\dots,x_n)$ уравнения (81) называется гармонической функцией.

Из линейности уравнения Лапласа следует простейшие свойства гармонических функций: а) вместе с $u_k(x)$, $k=1,\dots,m$, гармонична и функция $u(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k u_k(x)$, $C_k = const$, б) наряду с гармонической в области D функцией $u(x)$ гармонической является и функция $u(\lambda Cx+h)$, где λ – скалярная действительная постоянная, C – постоянная действительная ортогональная $n\times n$ матрица, а $h=(h_1,\dots,h_n)$ – постоянный действительный вектор, причём предполагается, что точки x, $\lambda Cx+h$ все принадлежат области D, в) если функция $u(x)$ гармонична в области D, то и функция

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

гармонична всюду, где она определена.

Когда область D содержит бесконечно удаленную точку, приведенное выше определение гармонической функции нуждается в уточнении, ибо понятие производной в бесконечно удалённой точке не имеет смысла.

Говорят, что функция $u(x)$ гармонична в окрестности бесконечно удалённой точки (т.е. вне замкнутого шара $|x|\leq R$ достаточно большого радиуса R), если функция

$$v(y) = |y|^{2-n} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \quad y = \frac{x}{|x|^2}, \tag{82}$$

доопределенная в точке $y=0$ как $\lim\limits_{y\to 0} v(y)$, гармонична в окрестности точки $y=0$.

В результате замены $y = \frac{x}{|x|^2}$ из (82) получаем

$$u(x) = |x|^{2-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

В соответствии с этим под регулярным в окрестности бесконечно удаленной точки решением уравнения (81) понимается гармоническая в этой окрестности всюду, кроме бесконечно удаленной точки, функция $u(x)$, которая при $|x|\to\infty$ остаётся ограниченной в случае $n=2$ и стремится к нулю не медленнее, чем $|x|^{2-n}$ при $n>2$.

Пусть $\mathcal{D}$ – область пространства E_n с достаточно гладкой $(n-1)$ -мерной границей $S=\partial\mathcal{D}$, а $u(x)$ и $v(x)$ – заданные в ней действительные гармонические функции с непрерывными в $\mathcal{D}\cup S$ производными первого порядка и интегрируемыми в $\mathcal{D}$ производными второго порядка (понятие гладкости границы области будет уточнено в § I гл.III).

Интегрируя тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0$$

по области $\mathcal{D}$ и пользуясь формулой Гаусса-Остроградского, получаем соответственно

$$\int\limits_{S} v(y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,ds_y = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\tau, \qquad (83)$$

$$\int\limits_{S}\left[v(y)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y)\,\frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y = 0. \qquad (84)$$

Когда область $\mathcal{D}$ содержит бесконечно удалённую точку пространства E_n, для того чтобы формулы (83),(84) оставались в силе, от подинтегральных выражений естественно потребовать абсолютной интегрируемости (или суммируемости, если интеграл понимается в смысле Лебега).

Формулы (83),(84) позволяют легко установить следующие важные свойства гармонических функций: 1) если гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция, удовлетворяющая условиям, достаточным для справедливости тождества (83), равна нулю в каждой точке S, то $u(x)=0$ всюду в $\mathcal{D}\cup S$, 2) если её нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ равна нулю в каждой точке S, то $u(x)=Const$ всюду в $\mathcal{D}$, 3) интеграл, взятый по S от нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ гармонической в $\mathcal{D}$ функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям, достаточным для справедливости тождества (84), равен нулю.

Справедливость этих утверждений следует из тождеств (83) и (84), если положить, что соответственно $v(x)=u(x)$ и $v(x)\equiv 1$ всюду в области $\mathcal{D}$.

Пусть $r=|x-y|$, где x и y – произвольные точки пространства E_n. Функция $u(r)$, зависящая только от r при $r\neq 0$ является решением уравнения (81) тогда и только тогда, когда

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{du}{dr} = 0 . \qquad (85)$$

Полученное дифференциальное уравнение (85) имеет два линейно независимых решения, которые можно брать в виде

$$u_1(r) = 1, \quad u_2(r) = \begin{cases} -\log r & n=2 \\ \dfrac{1}{r^{n-2}}, & n>2 . \end{cases}$$

В теории гармонических функций важную роль играет функция

$$E(x,y) = \begin{cases} -\log|x-y|, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\,|x-y|^{n-2}}, & n>2, \end{cases} \qquad (86)$$

которая при $x \neq y$ является решением уравнения (81) как по переменным $x_1,\dots,x_n$, так и по переменным $y_1,\dots,y_n$.

Определенная по формуле (86) функция $E(x,y)$ называется <u>элементарным или фундаментальным решением уравнения Лапласа (81)</u>.

Для гармонической в области $\mathcal{D}$ с достаточно гладкой $(n-1)$-мерной границей S функции $u(x)$, обладающей непрерывными в $\mathcal{D} \cup S$ производными первого порядка и интегрируемыми в $\mathcal{D}$ производными второго порядка, имеет место <u>интегральное представление</u>

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S E(x,y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,dS_y - \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S u(y)\,\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y , \qquad (87)$$

где $E(x,y)$ – элементарное решение (86) уравнения (81), $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в E_n, а Γ – гамма функция Эйлера.

Для вывода формулы (87) выделим точку x из области $\mathcal{D}$ вместе с замкнутым шаром $|y-x| \leq \varepsilon$ радиуса ε, лежащим в $\mathcal{D}$, и для оставшейся части $\mathcal{D}_\varepsilon$ области $\mathcal{D}$, ограниченной поверхностью S и сферой $|y-x| = \varepsilon$ применим формулу (84), в которой $v(y) = E(x,y)$.

$$\int\limits_S \left[E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y = \int \left[E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\right] ds_y =$$

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y - \int\limits_{|y-x|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} ds_y - u(x)\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} ds_y. \quad (88)$$

Учитывая то обстоятельство, что на сфере $|y-x|=\varepsilon$

$$E(x,y)=\begin{cases} -\log\varepsilon, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}}, & n>2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}, \quad n\geq 2$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} ds_y = 0,$$

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\frac{ds_y}{\varepsilon^{n-1}} = \omega_n,$$

в силу св-ва 3) гармонических функций, из ф-лы (88) в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем интегральное представление (87).

7) Шар $|y-x|\leq R$ лежит целиком в области D гармоничности функции $u(x)$. Так как на сфере $|y-x|=R$:

$$E(x,y)=\begin{cases} -\log R, & n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}}, & n>2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{1}{R^{n-1}}, \quad n\geq 2,$$

из формулы (87), написанной для шара $|y-x|<R$, в силу св-ва 3) гармонических функций следует, что

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, ds_y. \quad (89)$$

Записывая ф-лу (89) для сферы $|y-x|=\rho\leq R$ в виде

$$\rho^{n-1}u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\, ds_y$$

и интегрируя по ρ в промежутке $0\leq\rho\leq R$, получаем

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{|y-x|<R} u(y)\, d\tau_y, \quad (90)$$

где $d\tau_y$ – элемент объёма по переменному y, а $\frac{\omega_n R^n}{n}$ – объём шара $|y-x|<R$.

Формулы (89) и (90) известны под названием формул о среднем арифметическом для гармонических функций по сфере и по шару соответственно.

Обозначим соответственно через M и m верхнюю и нижнюю грани значений гармонической в обл-ти D функции $u(x)$.

Из ф-лы (90) следует принцип экстремума для гармонических функций: отличная от постоянной гармоническая в D функция $u(x)$ ни в одной точке $x \in D$ не может принимать ни значения M, ни значения m.

Когда $M=+\infty$ или $m=-\infty$, справедливость этого принципа очевидна, ибо в каждой т. обл-ти D функция $u(x)$ принимает лишь конечное значение. Когда же $M \neq \infty$, допустим обратное, т.е. $u(x_0)=M$, $x_0 \in D$, и рассмотрим шар $|x-x_0|<\varepsilon$, лежащий в D. В каждой т. этого шара $u(x)=M$. Действительно, если бы в т. y при $|y-x_0|<\varepsilon$ имело место неравенство $u(y)<M$, (нер-во $u(y)>M$ исключено), то в силу непрерывности $u(x)$ это нер-во было бы всюду в некоторой окрестности точки y и на основании формулы (90), примененной в случае шара $|x-x_0|<\varepsilon$, получили бы бессмысленное нер-во $M<M$. Следовательно, $u(x)=M$ всюду в шаре $|x-x_0|<\varepsilon$.

Пусть теперь x – произвольная фиксированная точка области $\mathcal{D}$ и ℓ – непрерывная кривая, соединяющая x с x_0 и лежащая в $\mathcal{D}$. Число ε возьмём меньше, чем расстояние между границей S области $\mathcal{D}$ и кривой ℓ. Передвигая центр y шара $|\eta-y|<\varepsilon$ из точки x_0 в точку x по кривой ℓ и пользуясь тем, что при любом положении y внутри этого шара $u=M$, получаем $u(x)=M$. Следовательно $u(x)$ постоянна в $\mathcal{D}$. Полученное противоречие показывает справедливость первой части сформулированного утверждения. Вторая его часть получается из первой части если вместо $u(x)$ рассмотреть $-u(x)$.

Если дополнительно известно, что отличная от постоянной гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция $u(x)$ непрерывна в $\mathcal{D}\cup S$, то из доказанного принципа экстремума непосредственно следует, что точки максимума и минимума этой функции все лежат на границе S области $\mathcal{D}$.

Пусть $f(x)$ – заданная на границе S области $\mathcal{D}\subset E_n$ действительная функция. Задача определения гармонической в области $\mathcal{D}$ функции $u(x)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathcal{D}}} u(x) = f(x_0), \quad x_0\in S, \tag{91}$$

называется первой краевой задачей или задачей Дирихле для уравнения Лапласа (81).

Th(1) При дополнительном требовании непрерывности функции $f(x)$ на S и искомого решения $u(x)$ на $\mathcal{D}\cup S$ задача (81),(91) не может иметь более одного решения (теорема единственности решения).

В силу линейности уравнения (81) и условия (91) в справедливости этого утверждения убедимся, если окажется, что, когда

f тождественно равно нулю, задача (81),(91) не может иметь отличного от тождественного нуля в $D \cup S$ решения. Последнее утверждение, в свою очередь, является непосредственным следствием доказанного выше принципа экстремума для гармонических функций.

При требовании непрерывности функции $f(x)$ в краевом условии (91) в силу этого же принципа убеждаемся в том, что малое изменение $f(x)$ влечёт собой малое изменение решения задачи Дирихле в $D \cup S$.

Будем считать, что граница S области D является достаточно гладкой $(n-1)$ -мерной поверхностью, а искомое решение задачи (81),(91) обладает непрерывными в $D \cup S$ производными первого порядка и интегрируемыми в D производными второго порядка. В этих предположениях для функции $u(x)$ имеет место интегральное представление (87).

Опр. Определенная в $D \cup S$ функция $G(x,y)$ двух точек x и y, обладающая свойствами: 1) она имеет вид

$$G(x,y) = E(x,y) + g(x,y), \tag{92}$$

где $E(x,y)$ - элементарное решение уравнения (81), а $g(x,y)$ гармоническая функция как по x, так и по y, при $x,y \in D$, 2) когда по крайней мере одна из точек x, y лежит на S, то

$$G(x,y) = 0, \tag{93}$$

называется <u>функцией Грина задачи (81), (91).</u>

① Из определения функции Грина и из принципа экстремума для гармонических функций непосредственно следует, что $G(x,y) \geq 0$ всюду в $D \cup S$.

(2) Функция Грина $G(x,y)$ симметрична относительно точек x, y. Чтобы доказать этот факт, лежащие в области $\mathcal{D}$ точки x и y удалим из $\mathcal{D}$ вместе с замкнутыми шарами $d: |z-x|\le\delta$, $d': |z-y|\le\delta$ достаточно малого радиуса δ — оставшуюся часть области $\mathcal{D}$ обозначим через $\mathcal{D}_\delta$.

Применяя формулу ([illegible]) для области $\mathcal{D}_\delta$ при $u(z)=G(z,x)$ $v(z)=G(z,y)$ получаем

$$\int_S \left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z}\right] ds_z =$$

$$= \left(\int_C + \int_{C'}\right)\left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z}\right] ds_z ,$$

где ν_z — внешняя нормаль в точке z на S и на сферах $C: |z-x|<\delta$, $C': |z-y|<\delta$. В силу равенств $G(z,x)=G(z,y)=0$, z перепишем эту формулу в виде

$$\int_C \left[G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z} - G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z}\right] ds_z =$$

$$\int_{C'} \left[G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z} - G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z}\right] ds_z .$$

. Отсюда с учётом того, что

$$G(z,x) = E(z,x) + g(z,x), \quad G(z,y) = E(z,y) + g(z,y),$$

где $g(z,x)$ и $g(z,y)$ — гармонические функции, в пределе при $\delta\to 0$, как и при выводе формулы (67), приходим к заключению, что $G(x,y)=G(y,x)$, что и требовалось показать.

Если в интегральном представлении (87) примем, что $u(x)$ решение задачи Дирихле (81), (91), и вместо $E(x,y)$ возьмем $G(x,y)$, то повторением приведенного выше рассуждения при выводе формулы (87) и работы (92) и (93) получим.

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\, dS_y. \qquad (94)$$

Гармоничность представленной формулой (94) функции $u(x)$, $x \in D$, следует из гармоничности функции Грина $G(x,y)$ по x при $x \neq y$. То, что эта функция удовлетворяет к краевому условию (91), требует отдельного доказательства.

Формула (94) даёт решение задачи (81), (91) при наличии функции Грина для области D.

В настоящее время имеются несколько методов доказательства существования функции Грина для широкого класса областей D. Однако ее явное выражение выписывается лишь для специального вида областей D.

Покажем, что для шара $|x|<1$ функция Грина $G(x,y)$ дается формулой

$$G(x,y) = E(x,y) - E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right). \qquad (95)$$

Действительно, ввиду того, что

$$\left| |x|y - \frac{x}{|x|} \right| = \left[|x|^2|y|^2 - 2xy + 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right| =$$

$$= |y| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \right| = |x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|,$$

функция

$$g(x,y) = -E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right)$$

при $|x|<1$, $|y|<1$ является гармонической как по x, так и по y. Кроме того, при наличии по крайней мере одного из равенств $|x|=1$, $|y|=1$ имеем

$$|y-x| = \left[|x|^2 - 2xy + 1\right]^{\frac{1}{2}} = \left|\,|y|x - \frac{y}{|y|}\right| = \left|\,|x|y - \frac{x}{|x|}\right|.$$

Следовательно, определенная по формуле (95) функция $G(x,y)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к функции Грина.

Так как при $|y|=1$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i\,(y_i-x_i)}{|y-x|^n} - |x|\,\frac{y_i\left(|x|y_i - \frac{x_i}{|x|}\right)}{\left|\,|x|y - \frac{x}{|x|}\right|^n}\right\}$$

$$= -\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n},$$

формула (94) в рассматриваемом случае запишется следующим образом

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|y|=1}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}\,f(y)\,ds_y. \qquad (96)$$

Эта формула носит название формулы Пуассона.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что определенная в шаре $|x|<1$ по формуле Пуассона (96) гармоническая функция $u(x)$ при требовании непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет краевому условию (91).

Ради наглядности рассуждения ограничимся рассмотрением случая $n=2$, т.е.

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,f(y)\,d\varphi,$$

формула Пуассона для круга (97)

$$y_1 = \cos\varphi,\quad y_2 = \sin\varphi,\quad y = (y_1, y_2).$$

Так как $u(x)=1$ является гармонической функцией, удовлетворяющей краевому условию $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1$, $|x|<1$, где x_0 – произвольная фиксированная точка окружности $|x_0|=1$, то для всех точек x в круге $|x|<1$ из формулы (97) получаем

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\, d\psi = 1. \tag{98}$$

На основании (97) и (98) имеем

$$u(x)-f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,[f(y)-f(x_0)]\, d\psi. \tag{99}$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ на окружности $|x|=1$ для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех ψ и $x_{10}=\cos\psi_0$, $x_{20}=\sin\psi_0$, удовлетворяющих условию $|\psi-\psi_0|<\delta$, имеет место неравенство

$$|f(y)-f(x_0)| < \varepsilon. \tag{I00}$$

Перепишем выражение (99) в виде $u(x)-f(x_0) = I_1+I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,[f(y)-f(x_0)]\, d\psi,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\psi_0-\delta} + \int\limits_{\psi_0-\delta}^{2\pi}\right) \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,[f(y)-f(x_0)]\, d\psi.$$

На основании (98) и (100) заключаем, что $|I_1| < \varepsilon$.

После выбора $\delta(\varepsilon)$ возьмём x настолько близко к x_0, чтобы имело место неравенство

$$\left(\int\limits_0^{\varphi-\delta} + \int\limits_{\varphi_0+\delta}^{2\pi}\right) \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\, d\varphi < \frac{\pi\varepsilon}{M}, \quad M = \max_{|x|=1} |f(x)|,$$

т.е. $|I_2| < \varepsilon$. Следовательно, $|u(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon$ и, стало быть,

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = f(x_0), \quad |x| < 1, \quad |x_0| = 1.$$

Таким образом, формула Пуассона (97) даёт решение задачи Дирихле в следующей постановке: найти гармоническую в круге $|x| < 1$ и непрерывную в замкнутом круге $|x| \leq 1$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую краевому условию

$$u(x_0) = f(x_0)$$

всюду на окружности $|x_0| = 1$.

В дальнейшем мы убедимся в том, что при довольно общих предположениях относительно области D и заданной на её границе S функции $f(x)$ задача (81), (91) имеет и притом единственное устойчивое решение, т.е. эта задача поставлена корректно.

На основании формулы (96) и свойств б) и в) гармонических функций легко видеть, что при требовании непрерывности функции $f(x)$ решение задачи (81), (91) в случае шара $|x - x_0| < R$ даётся формулой

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|y-x|^n} f(y)\, ds_y, \qquad (101)$$

а формула

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{|x-x_0|^2 - R^2}{|y-x|^n} f(y)\, d s_y \qquad (102)$$

даёт решение задачи Дирихле для гармонических функций в следующей постановке: найти регулярную гармоническую вне замкнутого шара $|x-x_0| \leq R$ функцию $u(x)$, непрерывную вне шара $|x-x_0| < R$ и удовлетворяющую краевому условию (91) на сфере $|y-x_0|=R$ (внешняя задача Дирихле для гармонических функций).

Функция Грина $G(x,y)$ строится в явном виде и в случае, когда D представляет собой полупространство $x_n > 0$. Действительно, пусть x и y – точки этого полупространства, а $y' = (y_1, \ldots y_{n-1}, -y_n)$ – точка, симметричная точке $y = (y_1, \ldots, y_n)$ относительно плоскости $y_n = 0$. Так как функция $g(x,y) = -E(x,y')$ при $x_n > 0$, $y_n > 0$ является гармонической как по x так и по y и, кроме того $E(x,y) - E(x,y') = 0$ при $y_n = 0$, то

$$G(x,y) = E(x,y) - E(x,y') \qquad (103)$$

является функцией Грина для рассматриваемого полупространства.

Предположим, что искомое решение $u(x)$ задачи Дирихле (81),(91) в рассматриваемом случае при $|x| \to \infty$ угасает так, что и на этот раз справедлива формула (94). Это заведомо так, если при $|x| \to \infty$

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^h}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \frac{A}{|x|^{h+1}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

где A и h – положительные постоянные. В соответствии с этим при больших $\delta = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ заданная на плоскости $y_n = 0$ функция $f(y_1, \ldots, y_{n-1})$ должна удовлетворять условию

$$|f| < \frac{A}{\delta^k}.$$

Подставляя выражение $G(x,y)$ из формулы (103) в правую часть формулы (94) и учитывая, что

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n} = \frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y'-x|^n} =$$

$$= \frac{-2x_n}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

при $y_n = 0$, получаем формулу

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) x_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{y_n=0} \frac{f(y_1,\dots,y_{n-1})}{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} dy_1 \dots dy_{n-1}, \tag{104}$$

дающую решение задачи Дирихле для гармонической в полупространстве $x_n > 0$ функции с краевым условием

$$\lim_{x \to y} u(x) = f(y_1, \dots y_{n-1}) \quad x_n > 0 \quad y_n = 0. \tag{105}$$

Формулы (101),(102) и (104) также называются формулами Пуассона.

Формулой (104) можно пользоваться и в том случае, когда функция $f(y)$ непрерывна и ограничена при $y_n = 0$. Исходя из этого, проверку краевого условия (105) можно проводить так же, как это было сделано выше в случае задачи Дирихле для круга.

Из формулы (101) для шара $|x| < R$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n} f(y)\, dS_y \tag{106}$$

следует справедливость утверждения: если гармоническая в пространстве E_n функция $u(x)$ всюду неотрицательна (неположительна), то она постоянна.

Δ: Действительно, так как при $|x|<R$, $|y|<R$ имеют место неравенства $R-|x|<|y-x|<R+|x|$ и по условию $u(x)\geq 0$, то из формулы (106) в силу (98) имеем

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0)\leq u(x)\leq R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0) \quad (107)$$

для любого $R>0$. Отсюда, произвольно фиксируя точку $x\in E_n$ и затем устремляя R к бесконечности, получаем, что в каждой точке x пространства E_n функция $u(x)=u(0)$. ▲

Из этого утверждения в свою очередь получается доказательство следующей теоремы Лиувилля: если гармоническая в E_n функция $u(x)$ ограничена сверху (снизу), то она постоянна.

Δ: В самом деле, пусть $|u(x)|<M$ для всех $x\in E_n$, где M - постоянная. Так как функция $M-u(x)$ гармонична в E_n и неотрицательна, то, как только что было доказано, $M-u(x)=M-u(0)$, т.е. $u(x)=u(0)$. ▲

Сл. Теорема Лиувилля позволяет утверждать, что рассмотренная выше задача Дирихле для полупространства $x_n>0$ в классе ограниченных гармонических функций не может иметь более одного решения.

Δ: Действительно, разность $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ любых двух ограниченных решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$ этой задачи удовлетворяет краевому условию $u(x)=0$ при $x_n=0$. Рассмотрим функцию

$$v(x)=\begin{cases} u(x_1,\ldots x_n), & x_n\geq 0\\ -u(x_1,\ldots,-x_n) & x_n\leq 0,\end{cases}$$

гармоническую как при $x_n>0$, так и при $x_n<0$. Функция $v(x)$ гармонична во всем пространстве E_n, ибо в шаре $|x|<R$ при любом $R>0$ она совпадает с гармонической функцией $w(x)$, удовлетворяющей краевому условию $w(x)=v(x)$ при $|x|=R$. Так как по условию $u(x)$ ограничена, то в силу теоремы Лиувилля она постоянна. Но $u(x)=0$ при $x_n=0$, т.е. $u(x)=0$ всюду в E_n и, стало быть $u_1(x)=u_2(x)$. ▲

§ 8. Уравнение теплопроводности

Поскольку соответствующая уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0 \qquad (108)$$

характеристическая квадратичная форма $Q(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ имеет канонический вид

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$$

с индексом дефекта единица, оно является уравнением параболического типа.

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что функция

$$u(x,t)=\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}\Delta^k\tau(x_1,\dots,x_n),\quad \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad (109)$$

для любой заданной бесконечно дифференцируемой функции τ переменных $x_1,\dots,x_n$ при равномерной сходимости ряда в правой части (109) и рядов, полученных из него дифференцированием почленно один раз по t и дважды по x_i, $i=1\dots n$, удовлетворяет уравнению (108).

Решением уравнения (I08) является также функция

$$E(x,y;t,t_0)=(t-t_0)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{1}{4(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right], \quad (\text{II0})$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$-точки пространства E_n, а независимые переменные t, t_0 выступают в роли времени, причём $t>t_0$.

В самом деле

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=-\frac{1}{2(t-t_0)}E+\frac{(x_i-y_i)^2}{4(t-t_0)^2}E, \quad i=1,\dots,n,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{n}{2(t-t_0)}E+\frac{E}{4(t-t_0)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2,$$

откуда и следует что

$$\frac{\partial E}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=0.$$

Определенная по формуле (II0) функция $E(x,y;t,t_0)$ называется элементарным или фундаментальным решением уравнения (I08).

Обозначим через Q область пространства E_{n+1} точек $x=(x_1,\dots,x_n,t)$, нижним основанием которой служит область δ плоскости $t=0$, а боковая поверхность представляет собой цилиндр S_0 с образующими, параллельными оси t, причём $t\geq 0$.

Пусть h – произвольное положительное число. Часть области Q, в которой $0<t<h$, обозначим через Q_h, её боковую поверхность – через S_h, сумму $S_h\cup\delta$ – через S, а верхнее основание Q_h – представляющее собой область плоскости $t=h$ – через δ_h.

Имеет место следующий <u>принцип экстремума</u> для решений уравнения (IO8): регулярное в области Q решение $u(x,t)$ уравнения (IO8), непрерывное в $Q \cup S$, своего экстремума в $Q_h \cup \partial Q_h$ достигает на S.

▲ Действительно, обозначим через M максимум $u(x,t)$ на замкнутом множестве $Q_h \cup \partial Q_h$. Допустим, что этого максимума функция $u(x,t)$ достигает в некоторой точке $(x_0,t_0) \in Q_h \cup \partial Q_h$ и $M = u(x_0,t_0) > u(x,t)$ для всех $(x,t) \in S$. Это допущение приводит к противоречию.

В самом деле, введём в рассмотрение функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + a(h-t), \tag{III}$$

где a – положительная постоянная. Ввиду того, что $0 \le t \le h$, из (III) имеем

$$u(x,t) \le v(x,t) \le u(x,t) + ah \tag{II2}$$

всюду в $Q_h \cup \partial Q_h$.

Обозначим через M_u^S, M_v^S максимумы соответственно $u(x,t)$ и $v(x,t)$ на S. По допущению $M_u^S < M$. Число a подберем так, чтобы имело место неравенство

$$a < \frac{M - M_u^S}{h}. \tag{II3}$$

На основании (II2) и (II3) получаем

$$M_v^S \le M_u^S + ah < M_u^S + \frac{M - M_u^S}{h} \cdot h = M = u(x_0,t_0).$$

Отсюда следует, что функция $v(x,t)$ не может достигать …симума на S. Следовательно, эта функция своего макси… в $Q_k \cup \partial Q_k$ достигает в некоторой точке $(x',t') \in Q_k \cup \delta_k$.

Сперва предположим, что $(x',t') \in Q_k$. Так как (x',t') …ляется точкой максимума функции $v(x,t)$ на $Q_k \cup \partial Q_k$, то …этой точке

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0,$$

…е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \geq 0. \tag{II4}$$

Пусть теперь $(x',t') \in \delta_k$, т.е. $(x',t') = (x',k)$. …илу того, что $v(x,t)$ достигает своего максимума в $Q_k \cup \partial Q_k$ …точке (x',k), то в этой точке имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \tag{II5}$$

…итывая то обстоятельство, что (x',k) является точкой мак…симума $v(x,k)$ как функции x в области δ_k, мы долж…ны иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x',k)}{\partial x_i^2} \leq 0. \tag{II6}$$

В силу (II5) и (II6) мы приходим опять к оценке (II4) в …точке $(x',t')=(x',k)$. Подставляя в левую часть (II4) значения $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$, $i = 1,\dots,n$, найденные из (III), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geq 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$$

в точке (x', t'), а это противоречит тому, что $u(x,t)$ - решение уравнения (I08).

Доказательство второй части сформулированного утверждения получается заменой функции $u(x,t)$ через $-u(x,t)$. ▲

В формулировке принципа экстремума вовсе нет необходимости требовать от боковой поверхности S_o области Q, чтобы она была цилиндрической. Из приведенного выше доказательства следует, что этот принцип остаётся в силе и при более общих предположениях относительно S_o'.

Как уже было показано в § 4 гл.I при определенных допущениях явление распространения тепла в среде описывается уравнением (I08) при $n = 1,2,3$.

Обозначим через Q_T область пространства переменных (x,t)

$$Q_T = \mathcal{D} \times \{ t_o < t < T \}.$$

В процессе наблюдения за распространением тепла, очевидно, могут быть вычислены значения функции $u(x,t)$ в каждой точке x теплопроводящей среды $\mathcal{D}$ в начальный момент t_o и в каждой точке x_o границы $\partial\mathcal{D}$ для всех значений времени t из промежутка $t_o < t < T$.

Следовательно, мы можем считать, что значения искомого в области Q_T решения $u(x,t)$ уравнения (I08) наперед заданы на нижнем основании $\mathcal{D}$ области Q_T:

$$u(x, t_o) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D} \qquad \text{(I17)}$$

и на её боковой поверхности $\partial\mathcal{D}\times\{t_0<t\le T\}$

$$u(x_0,t)=\psi(t),\quad (x_0,t)\in\partial\mathcal{D}\times\{t_0<t<T\}. \qquad (118)$$

Условия (117) и (118) принято называть соответственно начальными и краевыми условиями, задача же отыскания регулярного в области Q_T решения $u(x,t)$ уравнения (108), удовлетворяющего условиям (117),(118) - первой краевой задачей.

В силу линейности уравнения (108) и условий (117),(118) на основании принципа экстремума сразу приходим к заключению, что задача (108),(117),(118) не может иметь более одного решения, непрерывного в $Q_T\cup\partial Q_T$. Из принципа экстремума следует также устойчивость решения этой задачи.

Существование решения задачи (108),(117),(118) доказывается при довольно общих требованиях относительно границы $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ и функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Мы здесь ограничимся рассмотрением случая, когда : 1) в уравнении (108) число пространственных переменных равно единице, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (119)$$

2) область Q представляет собой прямоугольник $O(0,0)$, $B(0,T)$, $N(\ell,T)$, $A(\ell,0)$, $\ell>0$, $T>0$,
и 3) условия (118),(117) имеют вид

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,\quad 0\le t\le T, \qquad (120)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le \ell, \qquad (121)$$

причём $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при $x=0$ и $x=\ell$.

Как известно из курса математического анализа функция $\varphi(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{\ell} x, \tag{122}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пользуясь формулой (109) при $n = 1$, $x_1 = x$, $\tau(x) = \frac{\pi k}{\ell} x$, получаем регулярное решение $u_k(x,t)$ уравнения (119)

$$u_k(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{\pi k}{\ell} x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u_k(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad u_k(x,0) = \sin \frac{\pi k}{\ell} x.$$

Легко показать, что функция $u(x,t)$, представляющая собой сумму ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{\ell^2}} \sin \frac{\pi k}{\ell} x \tag{123}$$

является искомым решением задачи (119),(120),(121). Для этого достаточно заметить, что при $t > 0$ абсолютная и равномерная сходимость ряда (123) и рядов, полученных из него дифференцированием по x и t сколько угодно раз, в окрестности каждой точки $(x,t) \in Q$ следует из равенств

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^m e^{-\frac{\pi^2 k^2}{\ell^2} t} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Следовательно задача (119),(120),(122) поставлена корректно.

Глава III

Уравнения эллиптического типа

§ I. Классы гладкости функций и областей их задания

В евклидовом пространстве E_n точек с декартовыми ортогональными координатами расстояние между двумя точками $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ даётся формулой

$$|x-y| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Примем за окрестность точки $x \in E_n$ шар $|y-x|<\varepsilon$ с центром в точке x радиуса ε и введём обычным образом понятия предельной, изолированной и внутренней точек множества $\mathcal{M} \in E_n$, а также понятия ограниченного, замкнутого, открытого, компактного множеств и замыкания $\bar{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$. Пересечение $\bar{\mathcal{M}} \cap \overline{C\mathcal{M}} = \partial\mathcal{M}$, где через $C\mathcal{M}$ обозначено дополнение множества $\mathcal{M}$ до всего пространства E_n называется границей $\mathcal{M}$.

Df Множество $\mathcal{M}$ называется связным, если нельзя найти двух открытых множеств $O_1 \subset E_n$, $O_2 \subset E_n$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{M} \subseteq O_1 \cup O_2, \quad \mathcal{M} \cap O_1 \neq \varnothing, \quad \mathcal{M} \cap O_2 \neq \varnothing, \quad \mathcal{M} \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing,$$

где $\varnothing$ – пустое множество.

Df Открытое связное множество называется областью, а замыкание области – замкнутой областью.

Df Компонентой K множества $\mathcal{M} \subset E_n$ называется связное подмножество этого множества, обладающее тем свойством, что не существует другого связного подмножества K_1, множества

$\mathcal{M}$, удовлетворяющего условию $K \subset K_1$. Компоненту замкнутого множества иногда называют континуумом. При таком определении изолированная точка тоже может оказаться континуумом.

Df Число компонент границы данной области называется порядком связности этой области.

Понятия непрерывности, равномерной непрерывности, производных и дифференциалов заданной в области $\mathcal{D}$ однозначной функции $u(x)$ хорошо известны из курса математического анализа.

Df Говорят, что однозначная в области $\mathcal{D}$ функция $u(x)$ непрерывна по Гёльдеру (или удовлетворяет условию Гёльдера), если существуют положительные числа L, h, $0<h\le 1$, такие, что для любой пары точек $x, y \in \mathcal{D}$ имеет место оценка

$$|u(x)-u(y)| \le L\,|x-y|^{h}. \tag{I}$$

Когда в оценке (I) число $h=1$, говорят, что функция $u(x)$ в области $\mathcal{D}$ непрерывна по Липшицу (или удовлетворяет условию Липшица).

Если функция $u(x)$ в области $\mathcal{D}$ имеет все частные производные порядка k, непрерывные по Гёльдеру, то говорят, что $u(x)$ принадлежит классу $C^{k,h}(\mathcal{D})$. Класс $C^{k,0}(\mathcal{D})$ объединяет все заданные в $\mathcal{D}$ функции, производные порядка k которых непрерывны в $\mathcal{D}$.

Когда функция $u(x)$ и её производные до порядка k (включительно) имеют пределы в каждой точке $x^0 \in \partial\mathcal{D}$ при стремлении точки x изнутри области $\mathcal{D}$ к x^0 по любому пути, то эти пределы можно принять за значения $u(x)$ и её производных на границе $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ и считать, что функция $u(x)$ и ее частные производные до порядка k (включительно) определен в замкнутой области $\mathcal{D}\cup\partial\mathcal{D}$. Смысл записей $u(x)\in C^{k,h}(\mathcal{D}\cup S)$, $u(x)\in C^{k,0}(\mathcal{D}\cup\partial\mathcal{D})$ очевиден.

Как известно, двумерное евклидово пространство E_2 точек x с декартовыми ортогональными координатами x_1, x_2 можно идентифицировать с плоскостью комплексного переменного $z = x_1 + i x_2$.

Непрерывной кривой на плоскости E_2 называется множество точек z, удовлетворяющих уравнению

$$z = z(t) = x_1(t) + i\,x_2(t), \tag{2}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – заданные непрерывные действительные функции действительного параметра t на сегменте

$$\alpha \le t \le \beta. \tag{3}$$

Непрерывная кривая (2) как непрерывный образ компактного связного множества (3) является связным компактным множеством.

Df Непрерывная кривая называется кривой Жордана или простой кривой, если в её представлении (2) различным значениям параметра t (кроме, быть может значений $t=\alpha$ и $t=\beta$) соответствуют различные значения $z(t)$. **Жорданова кривая называется** замкнутой, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Замкнутая кривая Жордана может рассматриваться как топологический образ окружности.

Жорданом было доказано, что замкнутая простая кривая делит расширенную комплексную плоскость на две области, внутреннюю (не содержащую точку $z = \infty$) и внешнюю (содержащую точку $z = \infty$). Очевидно, что каждая из этих областей является односвязной.

При изменении параметра t на сегменте своего задания (3) в одном направлении (от α к β или обратно) на кривой Жордана Γ точка $z(t)$ совершает обход. Если при обходе замкнутой кривой Жордана Γ ограничиваемая ею конечная область $\mathcal{D}^+$

остается слева, то направление обхода называется положительным. В случае же разомкнутой кривой Жордана Γ положительным направлением обхода можно считать направление, соответствующее возрастанию параметра t.

Заданная уравнением (2) жорданова кривая Γ называется гладкой, если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют непрерывные производные $x_1'(t)$ и $x_2'(t)$ и $z'(t) = x_1'(t) + i x_2'(t) \neq 0$ всюду на сегменте (3), причём $z'(\alpha) = z'(\beta)$ при $z(\alpha) = z(\beta)$. В каждой точке гладкая кривая имеет касательную, причем угол, составленный ею с любым выбранным постоянным направлением на плоскости, является непрерывной функцией параметра t.

Так как гладкая кривая является спрямляемой, то в качестве параметра t в представлении (2) можно принять длину s дуги Γ, отсчитываемую от произвольной фиксированной точки на Γ в положительном направлении. Очевидно, что для элемента ds длины дуги гладкой кривой Γ имеем

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = J\,dt, \qquad (4)$$

где

$$J = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} \neq 0, \qquad (5)$$

а косинусы внешней (относительно D^+) нормали ν и положительно направленной касательной s к Γ связаны между собой равенствами

$$\cos \widehat{\nu x_1} = -\cos \widehat{s x_2}, \quad \cos \widehat{\nu x_2} = \cos \widehat{s x_1}. \qquad (6)$$

Гладкая замкнутая кривая Жордана Γ обладает следующим важным свойством: для каждой Γ существует положительное число δ_0 такое, что окружность с центром в любой точке $x \in \Gamma$ радиуса $\delta < \delta_0$ ровно два раза пересекает кривую Γ.

Представленная формулой (2) Жорданова кривая называется кусочно гладкой, если сегмент (3) можно разделить на конечное множество сегментов, внутри каждого из которых $z'(t)$ непрерывна и отлична от нуля, а в точках деления t_k функция $z'(t)$ имеет отличные от нуля пределы как справа, так и слева.

Гладкая кривая Γ называется кривой Ляпунова, если угол $\theta(t)$, составленный касательной к Γ в точке $z(t)$ с некоторым постоянным направлением (например, с направлением действительной оси плоскости комплексного переменного z) непрерывен по Гёльдеру.

Ниже мы будем рассматривать в основном области с конечным порядком связности, каждая граничная компонента которых является либо гладкой, либо кусочно-гладкой кривой, либо кривой Ляпунова.

Поверхность S в пространстве E_3 называется гладкой, если: а) она везде имеет касательную плоскость, меняющуюся непрерывно от точки к точке, и б) существует такое положительное число δ_0, что часть σ поверхности S лежащая внутри шара с центром в любой точке $x \in S$ радиуса $\delta < \delta_0$ пересекается каждой прямой, параллельной к нормали ν в точке x, не более чем один раз.

Пусть x, y – произвольная пара точек гладкой поверхности S, ν_x, ν_y – единичные нормали к S в этих точках, а ϑ –

наименьший угол между ν_x и ν_y. Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если наряду с условиями а) и б) выполнено условие в):

$$\vartheta \leq L\,|x-y|^{h},$$

где L, h – положительные числа, причем $0 < h \leq 1$.

Приняв нормаль ν_x в точке $x \in S$ за ось $O\zeta$ и выбрав оси $O\xi$ и $O\eta$ в касательной плоскости к S в точке x, в силу условия б), уравнение части σ гладкой поверхности S можно записать в виде

$$\zeta = f(\xi,\eta). \tag{7}$$

Условие а) означает, что существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, причём выражение

$$J = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2} \neq 0. \tag{5_I}$$

Кроме того, для косинусов нормали ν к S имеем

$$\cos\widehat{\nu\xi} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial \xi},\ \cos\widehat{\nu\eta} = -\frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial \eta},\ \cos\widehat{\nu\zeta} = \frac{1}{J}, \tag{6_I}$$

а для элемента ds площади σ –

$$ds = J\cdot d\xi\, d\eta. \tag{4_I}$$

Очевидно, что запись (7) уравнения σ равносильна параметрической записи

$$\xi = \xi,\quad \eta = \eta,\quad \zeta = f(\xi,\eta). \tag{2_I}$$

Поверхность Ляпунова называется замкнутой, если она гомеоморфна сфере.

Границу $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}\subset E_n$ обозначим через S. Говорят, что область $\mathcal{D}$ принадлежит классу $A^{k,\ell}$, если соблюдены следующие условия: I) множество S можно покрыть конечным числом n - мерных шаров, в каждом из которых координаты текущей точки $x\in S$ допускают параметрическое представление

$$x_i = x_i\,(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ i=1,\ldots n, \tag{8}$$

где функции x_i определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области $\delta\cup\partial\delta$ пространства переменных $t_1,\ldots t_{n-1}$;
2) система функций (8) осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\delta\cup\partial\delta$ и соответствующей частью S, причём все $x_i\in C^{k,\ell}(\delta\cup\partial\delta)$, $k\geq 1$;
3) выражение

$$J=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial(x_{i+1},\ldots x_n, x_1,\ldots x_{i-1})}{\partial(t_1,\ldots\ t_{n-1})}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\neq 0 \tag{5_2}$$

всюду в $\delta\cup\partial\delta$; 4) параметрическое представление (8) выбрано так, что косинусы внешней нормали ν к S в области δ даются формулами

$$\cos\widehat{\nu x_i}=\frac{1}{J}\,\frac{\partial(x_{i+1},\ldots x_n, x_1,\ldots x_{i-1})}{\partial(t_1,\ldots, t_{n-1})},\ i=1,\ldots n. \tag{6_2}$$

В принятых обозначениях элемент ds площади S записывается в виде

$$ds = J\ dt_1,\ldots dt_{n-1}\,. \tag{4_2}$$

Очевидно, что граница S области $\mathcal{D} \subset E_n$ класса $A^{1,h}$ представляет собой $(n-1)$ -мерное многообразие, являющееся кривой Ляпунова при $n=2$ и поверхностью Ляпунова при $n=3$. /Сравн. формулы (2),(2_I),(3),(4),(4_I),(4_2),(5),(5_I),(5_2), (6),(6_I),(6_2) /.

§ 2. Сопряженные линейные операторы в частных производных второго порядка. Формула Грина

Линейный оператор в частных производных второго порядка имеет вид

$$L u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u, \quad A_{ij} = A_{ji},$$

где A_{ij}, B_i, C – заданные в некоторой области $\mathcal{D}_0 \subset E_n$ действительные функции [См. формулу (3) гл. I и формулу (4) гл. II.]

Если $A_{ij} \in C^{1,0}(\mathcal{D}_0)$, оператору L можно придать вид

$$L u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u, \qquad (9)$$

где

$$\ell_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (10)$$

В случае, когда $\ell_i(x) \in C^{1,0}(\mathcal{D})$, вводится понятие сопряженного оператора

$$L^* v \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\ell_i v) + C v. \qquad (11)$$

df Заданный по формуле (9) линейный оператор называется <u>самосопряженным</u>, если равенство $Lu = L^*u$ выполняется тождественно для всех функций $u(x) \in C^{2,0}(D_0)$. В силу
Th (9),(10) и (11) очевидно, что выполнение равенств

$$\ell_i(x) = 0, \quad x \in D_0, \quad i = 1,\dots,n, \qquad (12)$$

является <u>достаточным условием для самосопряженности оператора</u> L.

Легко видеть, что условие (12) является и необходимым для самосопряженности оператора L. ▲Действительно, приняв в тождестве $Lu = L^*u$ соответственно $u=1$, $u = x_j$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ell_i}{\partial x_i} = 0, \quad 2\ell_j(x) + x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ell_i}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Откуда и следует, что выполняются равенства (12). ▲

В силу (10) условия (12) самосопряженности оператора L записываются в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j} = B_i(x) \quad i = 1,\dots,n.$$

Для любой пары функций $u(x), v(x) \in C^{2,0}(D_0)$ в силу определения операторов L и L^* по формулам (9),(11) имеет место тождество

$$vLu - uL^*v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial v}{\partial x_i} u\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\ell_i u v) \qquad (13)$$

всюду в области D_0 задания этих операторов.

Пусть $\mathcal{D}$ – подобласть области $\mathcal{D}_0$ класса $A^{1,h}$. Для системы $p_1(x), \dots, p_n(x)$, заданных в $\mathcal{D} \cup S$ функций из $C^{2,0}(\mathcal{D} \cup S)$ имеет место хорошо известная из курса математического анализа формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \, d\tau_x = \int_{S} \sum_{i=1}^{n} p_i(y) \cos \widehat{\nu y_i} \, ds_y ,$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к границе $S = \partial \mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ в точке $y \in S$. Этой формулой мы не раз пользовались в предыдущих главах.

Интегрируя тождество (I3) по области $\mathcal{D}$ и пользуясь формулой (GO) получаем формулу Грина

$$\int_{\mathcal{D}} (v L u - u L^* v) \, d\tau_x = \int_{S} \left[a \left(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN} \right) + b u v \right] ds_y , \quad (I4)$$

где N – единичный вектор – конормаль в точке $y \in S$ с направляющими косинусами

$$\cos \widehat{N y_i} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_j} , \quad i = 1, \dots, n, \quad (I5)$$

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos \widehat{\nu y_i} \right)^2 ,$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} l_i \cos \widehat{\nu y_i} . \quad (I6)$$

Будем считать, что оператор L эллиптичен, т.е. соответствующая ему характеристическая квадратичная форма

$$a(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j \quad (I7)$$

положительно определена всюду в $\mathcal{D}_0$. Из этого требования следует, что $a^2>0$. В самом деле, поскольку функции $\mathcal{A}_{ij}$ действительны, равенство $a^2=0$ в силу (I6) означало бы, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_{ij}\cos\widehat{\nu y_j} = 0, \quad i=1,\dots,n. \qquad (\text{I8})$$

Так как детерминант $\mathcal{A}=\det\|\mathcal{A}_{ij}\|$ линейной однородной алгебраической системы (I8) относительно $\cos\widehat{\nu y_j}$, $j=1,\dots,n$, в силу положительной определенности формы (I7) отличен от нуля, из (I8) получили бы

$$\cos\widehat{\nu y_j}=0, \quad y\in S, \quad j=1,\dots,n,$$

а это противоречит требованию, что $\mathcal{D}$ является областью класса $\mathcal{A}^{1,h}$.

Для скалярного произведения $N\cdot\nu$ определенного по формулам (I5) конормали N и нормали ν в точках $y\in S$ имеем

$$N\cdot\nu = \frac{1}{a}\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_{ij}\cos\widehat{\nu y_i}\cos\widehat{\nu y_j}.$$

Отсюда в силу положительной определенности формы (I8) получаем

$$N\cdot\nu>0. \qquad (\text{I9})$$

Неравенство (I9) означает, что конормаль N ни в одной точке границы S области $\mathcal{D}$ класса $\mathcal{A}^{1,h}$ не выходит в касательную к S плоскость.

§ 3. Существование решений линейных эллиптических уравнений второго порядка. Элементарные решения

В области $\mathcal{D}_0 \subset E_n$ рассмотрим линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$Lu = f(x), \tag{20}$$

где L – введенный в предыдущем параграфе дифференциальный оператор, удовлетворяющий в $\mathcal{D}_0$ всюду условию равномерной эллиптичности, а $f(x)$ – заданная функция.

Обозначим через $a_{ij}(x)$ отношение алгебраического дополнения элемента A_{ij} матрицы $\| A_{ij} \|$ к детерминанту $A = \det \| A_{ij} \|$ и введем функцию $\sigma(x,y)$ двух точек $x, y \in \mathcal{D}_0$

$$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j). \tag{21}$$

Поскольку форма (17) положительно определена, этим же свойством обладает и квадратичная форма (21).

Пусть $\mathcal{D}$ – подобласть области $\mathcal{D}_0$ задания уравнения (20). Так как уравнение (20) равномерно эллиптично в области $\mathcal{D}$, существуют положительные постоянные k_0 и k_1 такие, что

$$k_0 |x-y|^2 \le \sigma(x,y) \le k_1 |x-y|^2$$

всюду в $\mathcal{D} \cup S$, где $S = \partial \mathcal{D}$.

Относительно коэффициентов уравнения (20) потребуем, чтобы они принадлежали классам гладкости

$$A_{ij} \in C^{3,0}(\mathcal{D} \cup S), \quad B_i, C, f \in C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S).$$

и рассмотрим функцию

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\sigma_0(y)\,\sigma^{\frac{2-n}{n}}, & n>2\\ -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}}\log\sigma, & n=2,\end{cases} \tag{22}$$

где

$$\sigma_0=\left[\omega_n(n-2)\sqrt{A(y)}\,\right]^{-1}, \tag{23}$$

а ω_n – площадь единичной сферы в E_n. Определенная по формуле (22) функция $\psi(x,y)$ называется параметриксом, или функцией Леви. При $n=2$ без ограничения общности можно считать, что $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, $a_{ii}=1$, $i=1,2$, т.е. $A(y)=1$. В случае же $n>2$, в силу равномерной эллиптичности оператора L нижняя грань $A(y)$ в $D\cup S$ положительна.

Когда $A_{ij}=0$, $i\neq j$, $A_{ii}=1$, $i=1,\dots,n$, определенная по формуле (21) функция $\sigma(x,y)=|x-y|^2$, $A(y)=1$, $\sigma_0=\dfrac{1}{\omega_n(n-2)}$ и стало быть, функция $\omega_n\psi(x,y)$ не что иное, как элементарное решение

$$\omega_n\psi(x,y)=E(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, & n>2\\ -\log|x-y|, & n=2\end{cases} \tag{24}$$

уравнения Лапласа в пространстве E_n [см.формулу (86) гл.II].

Функция

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_D E(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y \tag{25}$$

в случае сходимости интеграла в правой части этой формулы, называется ньютоновым потенциалом объёмных масс, распределённых по области D с плотностью μ.

В дальнейшем будем считать, что $\mathcal{D}$ является ограниченной областью класса $A^{1,h}$ и функция $\mu \in C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$.

Как известно из курса математического анализа, определенная по формуле (25) функция $u(x)$ имеет непрерывные производные первого порядка всюду в E_n, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_i} E(x,y) \mu(y)\, d\tau_y, \quad i=1,\dots,n. \tag{26}$$

Очевидно, что эта функция вне замкнутой области $\mathcal{D} \cup S$ гармонична, причём, когда $|x| \to \infty$ она исчезает при $n > 2$, а при $n = 2$ ведёт себя как

$$-\log|x| \int_{\mathcal{D}} \mu(y)\, d\tau_y$$

Покажем, что функция $u(x)$ в области $\mathcal{D}$ имеет также и производные второго порядка.

Действительно, формулу (26) в силу равенств

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial x_i} = -\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i} \qquad i=1,\dots,n$$

перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathcal{D}} \mu(y) \frac{\partial}{\partial y_i} E(x,y)\, d\tau_y,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{\omega_n} \int_{S} E(x,y)\mu(y) \cos \nu y_i \, dS_y + \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} E(x,y)\, d\tau_y.$$

Отсюда следует существование производных второго порядка функции $u(x)$ в каждой точке $x \in \mathcal{D}$, причём

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial x_j} \mu(y) \cos \widehat{\nu y_i}\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n} \int \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \frac{\partial E(x,y)}{\partial x_j} d\tau_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_j} \mu(y) \cos \widehat{\nu y_i}\, dS_y - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_D \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_j} d\tau_y. \qquad (27)$$

В силу (27) имеем

$$\Delta u = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} \mu(y) dS_y - \frac{1}{\omega_n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i} d\tau_y, \quad (28)$$

где D_ε - часть области D вне замкнутого шара $|y-x| \leq \varepsilon$ лежащего в D.

Так как при $x \neq y$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial y_i^2} = 0$$

и, стало быть,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \frac{\partial E}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\mu \frac{\partial E}{\partial y_i} \right),$$

в результате интегрирования по частям и применения формулы (GO) можем написать

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i} d\tau_y = \int\limits_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\mu \frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i} \right) d\tau_y =$$

$$= \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y - \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \mu(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y. \qquad (29)$$

На основании (28) и (29) при $x \in \mathcal{D}$ имеем

$$\Delta u = \frac{1}{\omega_n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|=\varepsilon} \mu(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\mu(y)\, dS_y}{|y-x|^{n-1}} = -\frac{1}{\omega_n} \mu(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{dS_y}{\varepsilon^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{\omega_n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|=\varepsilon} \frac{\mu(y)-\mu(x)}{|y-x|^{n-1}} dS_y = -\mu(x) .$$

(30)

При выводе формулы (30) от требования, что $\mathcal{D}$ – область класса $A^{1,h}$ можно отказаться. Действительно, выражение (25) для функции $u(x)$ представим в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int E(x,y) \mu(y) d\tau_y + \frac{1}{\omega_n} \int_{|y-x|<R} E(x,y) \mu(y) d\tau_y ,$$

где шар $|y-x| \leq R$ лежит в области $\mathcal{D}$, а $\mathcal{D}_R$ – часть $\mathcal{D}$ вне шара $|y-x| \leq R$. В правой части этого представления первое слагаемое является гармонической функцией в шаре $|y-x| < R$, а для второго слагаемого, очевидно, годится приведенное выше рассуждение.

Равенство (30) означает, что ньютонов потенциал (25) масс, распределённых по области $\mathcal{D}$ с плотностью μ представляет собой регулярное решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -\mu(x) . \qquad (31)$$

Как уже было отмечено выше, в случае двух независимых переменных можно считать, что главная часть эллиптического оператора L совпадает с оператором Лапласа.

Будем искать решение $u(x)$ уравнения (20) при $n=2$ по формуле

$$u(x) = \omega(x) + v(x), \tag{32}$$

где $\omega(x)$ – произвольная функция класса $C^{3,0}(D \cup S)$, а $v(x)$ – потенциал масс, распространенных по области D с плотностью $\mu(x)$

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_D \log|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y. \tag{33}$$

Учитывая то обстоятельство, что определенная по формуле (33) функция $v(x)$ является решением уравнения Пуассона $\Delta v = -\mu(x)$, $x \in D$, приходим к заключению, что функция $u(x)$ будет решением уравнения (20), если

$$\mu(x) + \int\limits_D K(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y = g(x), \tag{34}$$

где

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\Big[\sum_{i=1}^{2} B_i(x)\,\frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} + C(x)\log|x-y|\Big], \tag{35}$$

$$g(x) = L\,\omega(x) - f(x). \tag{36}$$

Равенство (34) относительно μ представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода, ибо его ядро $K(x,y)$ при $|x-y| \to 0$ в силу (35) имеет особенность вида

$$K(x,y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right).$$

Как известно, интегральное уравнение Фредгольма второго рода во всяком случае в области достаточно малой меры всегда имеет решение. Следовательно, в области $\mathcal{D}$ достаточно малой меры уравнение (34) имеет решение $\mu(x)$, которое при принятых выше предположениях относительно B_i, C и f в силу (36) принадлежит классу $C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$ и, стало быть, формула (32) дает семейство регулярных в области $\mathcal{D}$ решений уравнения (20), зависящее от произвольной функции $\omega(x) \in C^{3,0}(\mathcal{D} \cup S)$.

Рассмотрим теперь соответствующее (20) однородное уравнение

$$Lu = 0 \tag{37}$$

с коэффициентами B_i, C из класса $C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$.

Пусть точка $y \in \mathcal{D}$. Часть области $\mathcal{D}$ вне замкнутого круга $|x-y| \leq \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Как только что было доказано, если функция $\mu_\varepsilon \in C^{1,0}(\mathcal{D}_\varepsilon \cup \partial\mathcal{D}_\varepsilon)$ является решением интегрального уравнения

$$\mu_\varepsilon(x,y) + \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} K(x,t)\,\mu_\varepsilon(t,y)\,d\tau_t = g(x,y), \tag{38}$$

где $K(x,y)$ даётся формулой (35), в которой $y = t$, и

$$g(x,y) = -L(\log|x-y|),$$

то выражение

$$u_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \log|x-t|\,\mu_\varepsilon(t,y)\,d\tau_t \tag{39}$$

как функция x удовлетворяет уравнению (37) в области $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Очевидно, что решение $\mu_\varepsilon(x,y)$ уравнения (38) при $\varepsilon\to 0$ равномерно стремится к решению $\mu(x,y)$ уравнения

$$\mu(x,y)+\int\limits_{\mathcal{D}} K(x,t)\mu(t,y)\,d\tau_t = g(x,y)$$

и, следовательно, при $\varepsilon\to 0$ из (39) получаем функцию

$$\Omega_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{D}}\log|x-t|\mu(t,y)\,d\tau_t\,,$$

обладающую свойствами: I) в области $\mathcal{D}$ при $x\neq y$ функция Ω_0 относительно x является регулярным решением уравнения (37); 2) вблизи точки y при $|x-y|\to 0$ имеют место оценки

$$\Omega_0 = O\left(\log\frac{2R}{|x-y|}\right),\ \frac{\partial\Omega_0}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right),\ i=1,2,$$

где R – диаметр области $\mathcal{D}$.

Функции со свойствами I) и 2) называются элементарными решениями однородного уравнения (37). В принятых выше предположениях относительно коэффициентов B_i, C уравнение (37) во всяком случае в области достаточно малой меры всегда имеет элементарное решение.

В теории эллиптических уравнений элементарные решения играют существенную роль. Поэтому их построение является одной из важнейших задач этой теории.

Элементарным решением соответствующего (20) однородного уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0 \qquad (40)$$

при $n > 2$ называется функция $\Omega_0(x,y)$ двух точек x, y области $D \subset E_n$, обладающая свойствами: а) когда $x \neq y$, функция $\Omega_0(x,y)$ относительно x является регулярным решением уравнения (40); б) когда $|x-y| \to 0$ имеют место оценки

$$\Omega_0 = O(|x-y|^{2-n}), \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_i} = O(|x-y|^{1-n}), \quad \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_i \partial x_j} = O(|x-y|^{-n}),$$

$$i,j = 1, \dots n.$$

При требовании равномерной эллиптичности оператора L в предположениях, что $A_{ij} \in C^{3,0}(D \cup S)$, $C \in C^{1,0}(D \cup S)$ изложенный выше метод построения элементарного решения успешно применяется и в случае уравнения (40) с числом n независимых переменных больше двух.

Действительно, для производных первого и второго порядка определенной по первой из формул (22) функции Леви

$$\psi(x,y) = \sigma_0(y)\,\sigma^{\frac{2-n}{2}}$$

в силу (21) имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\sigma_0(y)(n-2)\,\sigma^{-\frac{n}{2}}\Big[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k-y_k) + \frac{1}{2}\sum_{\ell,k=1}^{n} \frac{\partial a_{\ell k}}{\partial x_i}(x_\ell-y_\ell)(x_k-y_k)\Big] =$$

$$= -\sigma_0(y)(n-2)\,\sigma^{-\frac{n}{2}}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k-y_k) + P_i(x,y), \tag{41}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = -\sigma_0(y)(n-2)\,\sigma^{-\frac{n+2}{2}}\Big[a_{ij}\sigma - n\sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ik}a_{j\ell}(x_k-y_k)(x_\ell-y_\ell)\Big] +$$

$$+ P_{ij}(x,y), \quad i,j = 1, \dots n. \tag{42}$$

где для $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$, $P_i(x,y)$ и $P_{ij}(x,y)$ при $|x-y| \to 0$ имеют место оценки

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = O(|x-y|^{1-n}),\quad \mathcal{P}_i(x,y) = O(|x-y|^{2-n}),\quad \mathcal{P}_{ij}(x,y) = O(|x-y|^{1-n}). \tag{43}$$

Ввиду того, что

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, a_{ik} = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

в силу (42) с учётом (2I) получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} = -\sigma_0(y)(n-2)\sigma^{-\frac{n+2}{2}}\Big[n\sigma - n\sum_{c,\ell=1}^{n} a_{k\ell}(x_k-y_k)(x_\ell-y_\ell)\Big] +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,\mathcal{P}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,\mathcal{P}_{ij}. \tag{44}$$

На основании (4I),(43) и (44) приходим к заключению, что при $|x-y| \to 0$ для $L\Psi(x,y)$ имеет место оценка

$$L\Psi(x,y) = O(|x-y|^{1-n}), \tag{45}$$

где оператор L берётся по x.

Введём в рассмотрение функцию

$$v(x) = \int \Psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y, \tag{46}$$

где $\mu(x) \in C^{1,0}(D \cup S)$, а D – ограниченная область класса $A^{1,h}$.

Так же как в случае ньютонового потенциала (25) нетрудно показать, что при $x \in D$

$$Lv = -\mu(x) + \int_D L\Psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y. \tag{47}$$

Интеграл в правой части формулы (47) в силу (45) сходится абсолютно и равномерно.

Повторением приведенного выше рассуждения для случая $n = 2$ приходим к заключению, что, если функция $\mu(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\mu(x) + \int_{D} K(x,y)\mu(y)\,d\tau_y = -(f - L\omega), \tag{48}$$

где $K(x,y) = -L\Psi$, то определенная по формуле

$$u(x) = \omega(x) + \int_{D} \Psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y \tag{49}$$

функция $u(x)$ при произвольной функции $\omega(x) \in C^{3,0}(D \cup S)$ будет регулярным в области D решением неоднородного уравнения (20) с коэффициентами $A_{ij} \in C^{3,0}(D \cup S)$, $B_i, C, f \in C^{1,0}(D \cup S)$.

В силу оценки (45) равенство (48) относительно неизвестной функции $\mu(x)$ является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, которое во всяком случае для области D достаточно малой меры всегда имеет решение в пространстве функций из $C^{1,0}(D \cup S)$. Следовательно, в областях достаточно малой меры неоднородное уравнение (20) имеет семейство регулярных решений, зависящее от произвольной функции ω.

Если решение $\Omega_0(x,y)$ однородного уравнения (40) будем искать в виде

$$\Omega_0(x,y) = \Psi(x,y) + \int_{D} \Psi(x,y)\mu(y)\,d\tau_y, \tag{50}$$

то для неизвестной плотности $\mu(x)$ вместо (48) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu + \int_{D} K(x,t)\mu(t)\,d\tau_t = L\Psi$$

с таким же ядром как и уравнение (48). Тем самым приходим к заключению, что однородное уравнение (40) в областях достаточно малой меры имеет решение вида (50), удовлетворяющее требованиям, предъявленным выше элементарным решениям.

Функцию $u_0(x)$, определенную по формуле

$$u_0(x) = \int\limits_{D} \Omega_0(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y \tag{51}$$

естественно называть обобщенным потенциалом масс, распределенных по области D с плотностью $\mu(x)$. Очевидно, что при $\mu \in C^{1,0}(D \cup S)$ функция $u_0(x)$ является регулярным в области D решением неоднородного уравнения

$$L\,u_0(x) = -\mu(x).$$

Сформулированное выше свойство б) элементарного решения $\Omega_0(x,y)$ при $n>2$ нуждается в уточнении относительно его структуры при $x=y$. Такое уточнение становится возможным, если коэффициенты уравнения (40) являются аналитическими функциями. В этом предположении обозначая через Γ квадрат геодезического расстояния между точками x, y риманова пространства с метрикой $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,dx_i\,dx_j$ можно утверждать, что при нечетном n

$$\Omega_0(x,y) = R_1\,\Gamma^{\frac{2-n}{n}} + R_2$$

а при четном n

$$\Omega_0(x,y) = R_1\,\Gamma^{\frac{2-n}{2}} + R_2 \log\Gamma + R_3$$

где R_1, R_2, R_3 – аналитические функции переменных $x_1, \dots x_n$, причём может случиться, что R_2 тождественно обращается в нуль.

Существование элементарного решения $\Omega_0(x,y)$ уравнения (40) выше было доказано в областях достаточно малой меры или, как ещё принято говорить, в малом.

Теперь будем считать, что уравнение (40) задано во всем пространстве E_n. Определенное в E_n элементарное решение $\Omega(x,y)$ уравнения (40) будем называть главным элементарным решением, если существует такая постоянная $\alpha > 0$, что при $|x-y| \to \infty$

$$\Omega = O\left(e^{-\alpha|x-y|}\right), \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} = O\left(e^{-\alpha|x-y|}\right), \tag{52}$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Приведём без доказательства следующее важное утверждение: эллиптическое уравнение (40), заданное во всем пространстве E_n, имеет главное элементарное решение $\Omega(x,y)$, если: 1) функция $A(x) = \det\|A_{ij}\|$ ограничена снизу положительным числом; 2) функции A_{ij}, B_i, C ограничены и непрерывны по Гёльдеру, причем A_{ij} непрерывны по Гёльдеру равномерно, 3) функция $C(x) \le 0$ всюду в E_n, а вне некоторой ограниченной области $C(x) < -g^2$, где g – отличная от нуля действительная постоянная. Более того, когда дополнительно известно, что функции A_{ij}, B_i, $i,j = 1,\dots,n$ имеют первые производные, ограниченные и равномерно непрерывные по Гёльдеру в E_n, то существует главное элементарное решение $\Omega(x,y)$ уравнения (40), которое относительно y при $y \ne x$ удовлетворяет сопряженному однородному уравнению

$$L^*\Omega = 0 \tag{53}$$

Когда заданное в ограниченной области $\mathcal{D} \subset E_n$ уравнение (40) равномерно эллиптично и его коэффициенты – достаточно гладкие функции, причём $c(x) \le 0$, то это уравнение можно доопределить во всем пространстве E_n так, что условия 1), 2), 3) будут выполнены. Поэтому в рассматриваемом случае мы вправе считать, что уравнение (40) имеет главное элементарное решение.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$\Omega(x,y) = \begin{cases} \varphi_2(r) & n=2 \\ \varphi_3(r) & n=3 \end{cases}$$

где

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-rt}\,dt}{\sqrt{t^2-1}}, \quad \varphi_3(r) = \frac{e^{-r}}{4\pi r}, \quad r = |x-y|,$$

является главным элементарным решением уравнения

$$\Delta u - u = 0 \tag{54}$$

в случаях двух и трёх независимых переменных.

Следует отметить, что если $\varphi_n(r)$ – главное элементарное решение уравнения (54) при n, то

$$\varphi_{n+2} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \varphi_n(r),$$

где $\varphi_n(r)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$r\varphi''(r) + (n-1)\varphi'(r) - r\varphi(r) = 0.$$

Легко видеть, что функция $\Omega(x,y) = \lambda^{n-2}\varphi_n(\lambda r)$ является главным элементарным решением уравнения

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = const.$$

Эллиптическое во всем пространстве E_n уравнение (40) с аналитическими коэффициентами всегда (т.е. без требования $C \leq 0$) имеет элементарное решение, которое вовсе не обязан обладать свойством (52)

§ 4. Потенциалы двойного и простого слоя

Пусть $\mathcal{D}$ - ограниченная область пространства E_n с границей $S = \partial \mathcal{D}$, $E(x,y)$ - элементарное решение уравнения Лапласа, а $\mu(y)$ - заданная на S интегрируемая функция. Определенные по формулам

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} \mu(y) d s_y, \tag{54}$$

$$w(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x,y) \mu(y) d s_y \tag{55}$$

функции $v(x)$ и $w(x)$ называются соответственно потенциалом двойного слоя и потенциалом простого слоя масс, распределенных по поверхности S с плотностью μ .

Из формулы (87) гл.II, заведомо верной для любой гармонической в области $\mathcal{D}$ класса $A^{1,h}$ функции $u(x)$ из класса $C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$, следует что эта функция в каждой точке $x \in \mathcal{D}$ может быть представлена в виде суммы потенциалом двойного и простого слоя масс, распределенных по S с плотностями $\mu(y) = -u(y)$, $\mu(y) = \frac{du}{\partial \nu_y}$ соответственно.

Для области $\mathcal{D}$ и для дополнения $\mathcal{D} \cup S$ до пространства E_n, как и выше, примем обозначения $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$. Из формулы (86) гл.II для элементарного решения $E(x,y)$ уравнения Лапласа следует, что $v(x)$ и $w(x)$ являются гармоническими функциями как в $\mathcal{D}^+$, так в $\mathcal{D}^-$, причём, когда $|x|\to\infty$, функция $v(x)$ обращается в нуль при любом n, а функция $w(x)$ обращается в нуль при $n>2$ и ведёт себя как

$$-\frac{\log|x|}{2\pi}\int_S \mu(y)\,ds_y$$

при $n=2$.

Переходим к изучению основных свойств потенциалов $v(x)$ и $w(x)$. Поскольку эти свойства не зависят от того $n=2$ или $n>2$, мы ниже ограничимся рассмотрением случая $n=2$, причём будем считать, что S – замкнутая кривая Жордана с непрерывной кривизной, т.е. $\mathcal{D}^+$ является областью класса $C^{2,0}(S)$, а функция $\mu\in C^{2,0}(S)$

Так как $n=2$, выражение (54) для потенциала $v(x)$ двойного слоя запишется в виде

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial\nu_y}\log|y-x|\,\mu(y)\,ds_y,\quad x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2). \tag{56}$$

Дуговые абсциссы точек $x^0, y\in S$ (т.е. длины дуг на S, отсчитываемые от фиксированной точки против часовой стрелки до точек x^0 и y), обозначим через s и t соответственно.

Покажем, что потенциал двойного слоя (56) имеет смысл и при $x=x^0\in S$. В самом деле, для функции

$$\pi k(s,t) = \frac{\partial}{\partial\nu_y}\log|y-x^0|$$

имеем

$$\pi k(s,t) = \frac{1}{|y-x^0|^2}\sum_{i=1}^{2}(y_i-x_i^0)\cos\widehat{\nu_y y_i} = \frac{\cos\varphi}{|y-x^0|} = \frac{\partial}{\partial t}\vartheta(s,t), \tag{57}$$

где

$$\cos\varphi = \frac{(y-x^\circ)\nu_y}{|y-x^\circ|}, \quad \vartheta(s,t) = \operatorname{arctg}\frac{y_2-x_2^\circ}{y_1-x_1^\circ}.$$

Легко видеть, что функция $K(s,t)$ непрерывна по совокупности переменных s, t на S.

Действительно, примем обозначения

$$\alpha(s,t) = \frac{y_2(t)-x_2^\circ(s)}{t-s}, \quad \beta(s,t) = \frac{y_1(t)-x_1^\circ(s)}{t-s}.$$

Очевидно, что

$$y_1(t)-x_1^\circ(s) = (t-s)\int_0^1 y_1'[t+\tau(s-t)]\,d\tau,$$

$$y_2(t)-x_2^\circ(s) = (t-s)\int_0^1 y_2'[t+\tau(s-t)]\,d\tau,$$

где $y_1 = y_1(z), y_2 = y_2(z), 0 \le z \le \ell$, – параметрическая запись кривой S, а ℓ – длина её дуги.

В силу (57) имеем

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\beta\alpha'(t)-\alpha\beta'(t)}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда следует, что

$$\lim_{t\to s} K(s,t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x_1^{\circ\prime}(s)x_2^{\circ\prime\prime}(s)-x_2^{\circ\prime}(s)x_1^{\circ\prime\prime}(s)}{x_1^{\circ\prime 2}+x_2^{\circ\prime 2}} = \frac{k(s)}{2\pi},$$

где $k(s)$ – кривизна кривой S.

Доопределим $k(s,t)$ при $t=s$ как

$$\lim_{t\to s} k(s,t) = \frac{k(s)}{2\pi}.$$

Учитывая то обстоятельство, что в силу непрерывности кривизны S функции $\alpha, \beta, \alpha_t', \beta_t'$ непрерывны по совокупности переменных s, t на S, убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения.

Из непрерывности функции $k(s,t)$ следует, что потенциал двойного слоя (56) при $x^0 \in S$

$$v(x^0) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{\cos\varphi}{|y-x^0|} \mu(y)\, ds_y \tag{58}$$

имеет смысл и представляет непрерывную функцию x^0 на S.

Основное свойство потенциала двойного слоя $v(x)$ можно сформулировать в виде следующего утверждения: в любой точке $x^0 \in S$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} v(x) = v^+(x^0), \quad \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in D^-}} v(x) = v^-(x^0), \tag{59}$$

причём

$$v^+(x^0) - v(x^0) = -\frac{1}{2}\mu(x^0), \tag{60}$$

$$v^-(x^0) - v(x^0) = \frac{1}{2}\mu(x^0), \tag{61}$$

В принятых выше предположениях относительно гладкости кривой S и функции $\mu(x)$ в справедливости сформулированного утверждения можно убедиться довольно просто. Действительно, обозначим через d круг $|x-x_0|<\varepsilon$ с центром в точке $x^0 \in S$ достаточно малого радиуса ε, а через S' – часть S, лежащую внутри d. Пусть $d' = d \cap D^+$, а $v_1(x)$ – действительная функция класса $C^{2,0}(d' \cup \partial d')$, удовлетворяющая краевым условиям

$$v_1(x) = \mu(x), \quad \frac{\partial v_1(x)}{\partial \nu_x} = 0, \quad x \in S'. \tag{62}$$

Часть окружности $|x - x^0| = \varepsilon$, лежащую в D^+, обозначим через σ.

Интегрируя тождество

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\log|y-x|\frac{\partial v_1}{\partial y_i} - v_1\frac{\partial}{\partial y_i}\log|y-x|\right) =$$

$$= \log|y-x|\,\Delta v - v\,\Delta\log|y-x|$$

по области d' (в случае, когда $x \in d' \cup S'$, эту точку следует выделить из $d' \cup S'$ вместе с замкнутым кругом $|y-x| \le \delta$ достаточно малого радиуса δ, брать интеграл по оставшейся части области d' и устремить δ к нулю) и учитывая равенства (62), мы можем написать

$$-\int_{S'} \mu \frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\,ds_y + \int_{\sigma}\left(\log|y-x|\frac{\partial v_1}{\partial \nu_y} - v_1\frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\right)ds_y +$$

$$+ q(x)\,v_1(x) = \int_{d'} \log|y-x|\,\Delta v\,d\tau_y, \tag{63}$$

где

$$q(x) = \begin{cases} 2\pi, & x \in d', \\ \pi, & x \in S', \\ 0, & x \in D^-. \end{cases} \tag{64}$$

Записывая формулу (56) в виде

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S'} \mu\frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\,ds_y - \frac{1}{2\pi}\int_{S''}\mu\frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\,ds_y,$$

где S'' – часть S, лежащая вне круга d, и пользуясь равенством (63), получаем

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S''}\mu\frac{d}{d\nu_y}|y-x|\,ds_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{6}\left(v_1\frac{\partial}{\partial\nu_y}\log|y-x| - \log|y-x|\frac{\partial v_1}{\partial\nu_y}\right)ds_y +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{d'}\log|y-x|\,\Delta v_1\,d\tau_y - \frac{1}{2\pi}\,q(x)\,v_1(x). \qquad (65)$$

Интегральные члены в правой части формулы (65) непрерывны при переходе точки x из D^+ в D^- через x^0. С учётом этого обстоятельства и равенств (64) для величин $v(x^0)$, $v^+(x_0)$ и $v^-(x_0)$, определенных по формулам (58) и (59), получаем соотношения (60) и (61). Следовательно, потенциал двойного слоя (56) когда точка $x \to x^0$ оставаясь все время в D^+ или в D^-, претерпевает разрыв со скачками, выраженными формулами (60) и (61).

Ввиду того, что интегральные члены в правой части (65) при переходе точки x из D^+ в D^- через точку $x^0 \in S$ имеют непрерывные производные первого порядка, на основании второго из равенств (62) и (64) заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in D^+}}\frac{\partial v}{\partial\nu_x} = \left(\frac{\partial v}{\partial\nu_{x^0}}\right)^+, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}}\frac{\partial v}{\partial\nu_x} = \left(\frac{\partial v}{\partial\nu_{x_0}}\right)^-$$

и

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\nu_{x^0}}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial\nu_{x^0}}\right)^- = 0 \qquad (66)$$

в каждой точке $x^0 \in S$.

Рассмотрим теперь потенциал простого слоя (55) опять при $n=2$

$$w(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S} \log|y-x|\,\mu(y)\,ds_y \tag{67}$$

Повторяя процедуру, использованную выше при выводе формулы (65) лишь с той разницей, что на этот раз вместо $v(x)$ берётся функция $w(x)$, а вместо $v_1(x)$ функция $w_1(x)\in C^{2,0}(d'\cup\partial d')$, удовлетворяющая краевым условиям

$$w_1(x)=0,\quad \frac{\partial w_1(x)}{\partial \nu_x}=\mu(x),\quad x\in S', \tag{68}$$

получаем

$$\int\limits_{S''} \log|y-x|\,\mu(y)\,ds_y + \int\limits_{\sigma}\left(\log|y-x|\frac{\partial w_1}{\partial \nu_y} - w_1\frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\right)ds_y +$$

$$+\;q(x)\,w_1(x) = \int\limits_{d'} \log|y-x|\,\Delta w_1\,d\tau_y. \tag{69}$$

В силу формулы (69) потенциал простого слоя (67) представим в виде

$$w(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S''}\log|y-x|\,\mu(y)\,ds_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}\Big(\log|y-x|\frac{\partial w_1}{\partial \nu_y} -$$

$$-\;w_1\frac{\partial}{\partial \nu_y}\log|y-x|\Big)ds_y + \frac{1}{2\pi}\,q(x)\,w_1(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{d'}\log|y-x|\,\Delta w_1\,d\tau_y. \tag{70}$$

Из формулы (70) в силу непрерывной дифференцируемости интегральных членов в её правой части всюду в E_2 вне дуг S' и σ с учётом (64) и (68) заключаем, что при переходе точки x из области $\mathcal{D}^+$ в область $\mathcal{D}^-$ через точку $x^0\in S$ потенциал простого слоя $w(x)$ остаётся непрерывным, а его нормальная производная $\frac{\partial w}{\partial \nu_x}$ претерпевает разрыв, так что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu_{x_0}}\right)^{+} - \frac{\partial w(x_0)}{\partial \nu_{x_0}} = \frac{1}{2}\mu(x^0), \tag{71}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu_{x^0}}\right)^{-} - \frac{\partial w(x^0)}{\partial \nu_{x^0}} = -\frac{1}{2}\mu(x^0), \tag{72}$$

где

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu_{x^0}}\right)^{+} = \nu_{x^0} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} \operatorname{grad} w(x), \tag{73}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu_{x^0}}\right)^{-} = \nu_{x^0} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} \operatorname{grad} w(x), \tag{74}$$

$$\frac{\partial w(x^0)}{\partial \nu_{x^0}} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{(y-x^0)\,\nu_{x^0}}{|y-x^0|^2}\mu(y)\,ds_y = \frac{1}{2}\int\limits_{S} K^{*}(t,s)\,\mu(t)\,dt \tag{75}$$

$$K^{*}(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\operatorname{arctg}\frac{y_2-x_2^0}{y_1-x_1^0}. \tag{76}$$

Доопределяя $K^{*}(s,t)$ при $t=s$ как $\lim\limits_{t\to s} K^{*}(s,t)$ убеждаемся в том, что эта функция непрерывна по совокупности переменных s, t на контуре S.

Установленные выше свойства потенциалов двойного и простого слоя остаются в силе и при более общих предположениях относительно контура S области D^{+} и относительно функции μ, в частности, когда S – кривая Ляпунова, и $\mu \in C^{\infty}(S)$.

§ 5. Задачи Дирихле для гармонических функций

Пусть $\mathcal{D}$ - ограниченная область E_2, граница которой S представляет собой кривую с непрерывной кривизной, причём для независимых переменных x_1, x_2 примем обозначения $x = x_1$, $y = x_2$.

Мы здесь будем изучать задачу Дирихле в следующей постановке: найти гармоническую в области $\mathcal{D}$ функцию $u(x,y)$, принадлежащую классу $C^{0,0}(\mathcal{D} \cup S)$ и удовлетворяющую краевому условию

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in S, \tag{77}$$

где $\varphi(x,y)$ - заданная на S действительная функция класса $C^{0,0}(S)$.

Единственность решения задачи (77) является непосредственным следствием принципа экстремума для гармонических функций.

В самом деле, допуская существование двух решений $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ этой задачи, для их разности $u(x,y) = u_1 - u_2$, представляющую собой гармоническую в области $\mathcal{D}$ функцию, в силу (77) получили бы однородное краевое условие

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S.$$

Поскольку гармоническая функция $u(x,y) \in C^{0,0}(\mathcal{D} \cup S)$ обращается в нуль на S всюду, то в силу принципа экстремума она тождественно должна быть равной нулю в $\mathcal{D} \cup S$, т.е. $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ и тем самым единственность решения задачи (77) доказана.

Переходим к доказательству существования решения этой задачи. Будем его искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log|y-x|\, \mu(y)\, d s_y \tag{78}$$

с неизвестной пока плотностью μ класса $C^{0,0}(S)$.

В силу свойства потенциала двойного слоя, выраженного формулой (60) имеем

$$u^+(x^0) = -\frac{1}{2}\mu(x^0) + u(x^0), \quad x^0 = (x_0, y_0) \in S, \tag{79}$$

где в силу (58)

$$u(x^0) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\cos\varphi}{|y-x^0|}\mu(y)\,ds_y. \tag{80}$$

Вводя обозначения

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\varphi}{|y-x^0|}, \quad \mu(y) = \mu(t), \quad ds_y = dt, \tag{81}$$

где s и t – дуговые абсциссы точек $x^0, y \in S$; перепишем формулу (80) в виде

$$u(x^0) = -\frac{1}{2}\int_S K(s,t)\mu(t)\,dt. \tag{82}$$

Требуя, чтобы представленная формулой (25) гармоническая функция $u(x)$ удовлетворяла краевому условию (77), на основании формул (79), (80), (81) и (82) приходим к заключению, что функция $\mu(x^0) = \mu(s)$ должна быть решением уравнения

$$\mu(s) - \int_S K(s,t)\mu(t)\,dt = \varphi(s), \tag{83}$$

где $\varphi(s) \equiv \varphi(x_0, y_0) \equiv \varphi(x^0)$.

Поскольку S – кривая с непрерывной кривизной, определенная по формуле (81), функция $K(s,t)$ непрерывна на S по совокупности переменных s, t. Следовательно, функция $\mu(s)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода (83). Очевидно, что если μ – решение уравнения (83), то определенная по формуле (78) функция $u(x,y)$ будет решением задачи Дирихле (77).

Покажем, что соответствующее (83) однородное уравнение

$$\mu_0(s) - \int_S K(s,t)\mu_0(t)\,dt = 0 \tag{84}$$

не имеет отличного от тождественного нуля решения.

Действительно, пусть μ_0 – решение уравнения (84). Потенциал двойного слоя $u_0(x)$ с плотностью μ_0

$$u_0(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{d}{d\nu_y}\log|y-x|\,\mu_0(y)\,ds_y \tag{85}$$

в силу (79) и (84) удовлетворяет краевому условию

$$u_0^+(x^0)=0, \quad x^0\in S,$$

т.е. $u_0(x)=0$ для всех точек замкнутой области $D\cup S$. Отсюда в свою очередь следует, что

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^+ = 0 \tag{86}$$

всюду на S.

В силу свойства потенциала двойного слоя, выраженного равенством (66), на основании (86) находим, что

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^- = 0$$

всюду на S. Поскольку нормальная производная гармонической в D^- функции $u_0(x)$, представляющей собой потенциал двойного слоя, равна нулю на $S = \partial \mathcal{D}^-$, то $u_0(x) = 0$ всюду в области $\mathcal{D}^-$ и, стало быть, $u_0^-(x^0) = 0$ на S.

Пользуясь свойством потенциала двойного слоя, выраженного формулами (60) и (61), получаем

$$\mu_0(x^0) = u_0^-(x^0) - u_0^+(x^0) = 0.$$

Таким образом, соответствующее (83) однородное уравнение (84) нетривиальных решений не имеет. Отсюда на основании известной альтернативы Фредгольма приходим к заключению, что уравнение (83) имеет, притом единственное решение для любой его правой части $\varphi \in C^{0,0}(S)$. Этим завершается доказательство существования решения задачи Дирихле в приведенной выше постановке.

Приведенное выше доказательство существования решения задачи Дирихле (77) для гармонических функций было основано на возможности редукции этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Именно для реализации этой возможности мы были вынуждены потребовать от границы S области $\mathcal{D}^+$, чтобы она была замкнутой кривой с непрерывной кривизной. При снижении этого требования у ядра $K(s,t)$ интегрального уравнения (83) могут появиться разрывы, нарушающие фредгольмовость этого уравнения. Тем не менее такая завышенная гладкость S вовсе не является необходимой для существования решения задачи Дирихле.

Применением метода, основанного на теории аналитических функций комплексного переменного эту задачу легко исследовать в следующей более общей постановке: в области $\mathcal{D} \in E_2$, граница S которой является замкнутой кривой Жордана, требуется определить гармоническую функцию $u(x,y)$, непрерывную в

$D \cup S$ и удовлетворяющую краевому условию (77).

Будем считать, что D – область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Для гармонической функции $u(x,y)$ введём обозначение $u(x,y) = u(z)$ и запишем краевое условие (77) в виде

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in S. \tag{87}$$

Пусть $F(z)$ аналитическая в области D функция, действительной частью которой является $u(z)$, т.е. $Re\, F(z) = u(z)$, $z \in D$.

В силу известного принципа (теоремы Римана) теории конформных отображений существует аналитическая функция $\zeta = f(z)$, отображающая конформно область D на круг d: $|\zeta| < 1$ плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, причём эта функция осуществляет взаимно однозначное и непрерывное соответствие между границей S области D и окружности $|\tau| = 1$.

Функция $F[f^{-1}(\zeta)]$ – аналитична в круге d, причём её действительная часть $u_*(\zeta) = Re\, [f^{-1}(\zeta)]$ представляет собой гармоническую в d функцию, удовлетворяющую краевому условию

$$u_*(\tau) = h(\tau), \qquad |\tau| = 1, \tag{88}$$

где $h(\tau) = \varphi[f^{-1}(\tau)]$.

Гармоническая в круге d функция $u_*(\zeta)$, удовлетворяющая краевому условию (88), даётся по формуле Пуассона

$$u_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{1 - |\zeta|^2}{|\zeta - \tau|^2} h(\tau)\, dS_\tau . \tag{89}$$

Следовательно, решение задачи Дирихле (87) в приведенной выше постановке существует, и оно выражается через функцию $u_*(\zeta)$ в виде $u(z) = u_*[f(z)]$.

Поскольку определенная по формуле (89) гармоническая функция $u_*(\zeta)$ изнутри круга d принимает заданные значения (88), в силу взаимной однозначности и непрерывности соответствия, устанавливаемого функцией $\zeta = f(z)$ между $\mathcal{D} \cup S$ и $d \cup \partial d$ заключаем, что и функция $u(z)$ принимает заданные значения (87) изнутри области $\mathcal{D}$.

Это свойство решения задачи Дирихле для гармонических функций может не иметь места, когда $n > 2$ при нарушении гладкости границы S области $\mathcal{D}$ (особенно при наличии у поверхности S точек и рёбер возврата).

Из вида функции Грина $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$ следует, что для доказательства её существования достаточно решить задачу Дирихле для гармонической в области $\mathcal{D}$ функции $g(x,y)$ по краевому условию специального вида

$$g(x,y) = -E(x,y), \quad x \in S = \partial \mathcal{D}. \tag{90}$$

Исходя из этого при $n=2$ следовало бы ожидать, что для широкого класса областей $\mathcal{D}$ (например, границей которых служат замкнутые кривые Жордана) доказательство существования функций Грина получится только что указанным методом. Это в принципе так, но мы не всегда в состоянии судить даже о существовании частных производных G в $\mathcal{D} \cup S$ именно из-за специального вида краевого условия (90).(Элементарное решение уравнения Лапласа имеет особенность при $x = y$). Когда граница S области $\mathcal{D}$ – замкнутая кривая Жордана с непрерывной кривизной, существование функции Грина очевидно, причём её производная по нормали непрерывна на S.

При наличии функции Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле для гармонических функций, повторением рассуждения, примененного при выводе формулы (31), убеждаемся в том, что формула

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_D G(x,t) f(t)\, d\tau_t\,, \tag{91}$$

где функция $f \in C^{1,0}(D \cup S)$, даёт регулярное в области D частное решение $u(x)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x)\,, \quad x \in D. \tag{92}$$

Покажем, что представленная формулой (92) функция $u(x)$ удовлетворяет однородному краевому условию

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \in S \\ x \in D}} u(x) = 0. \tag{93}$$

Мы не вправе переходить к пределу под знаком интеграла в правой части формулы (91), ибо не знаем является ли стремление к нулю функции $G(x,t)$ при $x \to x^0 \in S$ равномерным относительно $t \in D$. Поэтому поступим следующим образом. Представим функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{D_\varepsilon} G(x,t) f(t)\, d\tau_t - \frac{1}{\omega_n}\int_{d_\varepsilon} G(x,t) f(t)\, d\tau_t\,,$$

где $d_\varepsilon = D \cap \{|x-x^0| < \varepsilon\}$, а D_ε - часть D вне замкнутого шара $|t-x^0| < \varepsilon$ с центром в точке x^0 достаточно малого радиуса ε.

Очевидно, что

$$\lim_{x \to x^0} \int_{D_\varepsilon} G(x,t) f(t)\, d\tau_t = \int_{D_\varepsilon} \lim_{x \to x^0} G(x,t) f(t)\, d\tau_t = 0.$$

Если мы покажем, что для всех $x \in d_\varepsilon$ имеет место оценка

$$\left| \int_{d_\varepsilon} G(x,t)\, d\tau_\varepsilon \right| < N(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_\varepsilon = 0$, то в силу ограниченности функции $f(x)$ справедливость равенства (93) будет доказана.

Обозначим через S_R сферу $|y-t| = R$ с центром в точке $t \in D$ настолько большого радиуса R, что при любом $t \in D$ эта сфера содержит внутри себя область D. Пусть

$$\Omega(x,t) = E(x,t) - E(y,t), \quad |y-t| = R.$$

Очевидно, что в шаре $|x-t| < R$ функция $\Omega(x,t) \geq 0$, а на границе S области D

$$G(x,t) - \Omega(x,t) \leq 0$$

Отсюда, учитывая гармоничность $G(x,t) - \Omega(x,t)$ в области D, в силу принципа экстремума заключаем, что $\Omega(x,t) \geq G(x,t) \geq 0$ всюду в области D. Из полученного неравенства непосредственно следует интересующая нас оценка

$$\int_{d_\varepsilon} G(x,t)\, d\tau_t \leq \int_{d_\varepsilon} \Omega(x,t)\, d\tau_t < N(\varepsilon), \quad x \in d_\varepsilon,$$

ибо интеграл от $\Omega(x,t)$, по области d_ε равномерно и абсолютно сходится.

Заметим, что если $u(x)$ - решение однородной задачи (93) для уравнения Пуассона (92) в области D и $v(x)$ - гармоническая в этой же области функция, удовлетворяющая неоднородному краевому условию

$$v(x) = \varphi(x), \quad x \in S,$$

то функция $w(x)=u(x)+v(x)$ будет решением уравнения Пуассона (92), удовлетворяющим неоднородному краевому краевому условию $w(x)=\varphi(x)$, $x\in S$.

При исследовании задачи Дирихле (87) для гармонических функций мы требовали, чтобы искомая гармоническая функция $u(z) = u(x,y)$ была непрерывной в $D\cup S$ и, стало быть, заданная на S функция также принадлежала классу $C^{0,0}(S)$. В приложениях порой это требование приходится ослабить в различных вариантах. Остановимся на одном из них.

В области $D\subset E_2$ класса $A^{1,h}$ задача Дирихле (87) корректна в следующей постановке: требуется найти гармоническую функцию $u(z)$ в области D, непрерывную в $D\cup S$ всюду, кроме конечного числа точек $t_k\in S$, $k=1,\dots N$, при наличии в этих точках разрыва первого рода у искомого решения или при допущении его обращения в бесконечность слабее чем $\log|z-t_k|$, $z\to t_k$.

Единственность решения этой задачи является непосредственным следствием следующего утверждения: если краевые значения гармонической в области D функции $u(z)$ изнутри D на S равны нулю всюду, кроме конечного множества точек $\{t_k\in S\}$, $k=1,\dots$ и

$$\lim_{\substack{z\to t_k\\ z\in D}} \frac{u(z)}{\log|z-t_k|} = 0, \quad k=1,\dots N,\ z=x+iy, \tag{94}$$

то $u(z)=0$ всюду в D.

Для доказательства справедливости этого утверждения обозначим через D_δ часть области D, лежащую вне замкнутых кругов $|z-t_k|$, $k=1,\dots N$, достаточно малого радиуса δ, и введём в рассмотрение положительную гармоническую в D_δ функцию

$$v(z) = \varepsilon\sum_{k=1}^{N}\log\frac{d}{|z-t_k|}, \tag{95}$$

где d – диаметр области $\mathcal{D}$, а ε – произвольное положительное число.

В силу (94) и (95) для любого $\varepsilon > 0$, начиная с определенного значения $\delta > 0$, краевые значения на границе S_δ области $\mathcal{D}_\delta$ гармонических в этой области функций $v(z) - u(z)$ и $v(z) + u(z)$ положительны. Отсюда в силу принципа экстремума для гармонических функций заключаем, что в любой точке $z \in \mathcal{D}_\delta$

$$|u(z)| < v(z). \tag{96}$$

Поскольку любая фиксированная точка $z \in \mathcal{D}$, начиная с определенного значения $\delta > 0$, лежит в $\mathcal{D}_\delta$, в силу произвольности ε из (96) следует, что $u(z) = 0$, что и требовалось показать.

При доказательстве существования решения задачи Дирихле (87) в приведенной выше постановке будем считать, что $\mathcal{D}$ представляет собой единичный круг $|z| < 1$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Это не ограничивает общность, ибо существует аналитическая функция $\zeta = f(z)$, отображающая конформно область $\mathcal{D}$ на единичный круг $|\zeta| < 1$, и которая принадлежит, по меньшей мере, классу $C^{0,h}(|\zeta| \leq 1)$. Следовательно, исходная задача редуцирована к определению гармонической в круге $|\zeta| < 1$ функции $u_*(\zeta) = u[f^{-1}(\zeta)]$, которая имеет в краевом условии такие же разрывы как функция $u(z)$.

Формула Пуассона

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{1 - |z|^2}{|t - z|^2} f(\vartheta)\, d\vartheta, \quad \vartheta = \arg t, \tag{97}$$

дающая решение задачи Дирихле $u_1(t)=f(\vartheta)$, $|t|=1$, была выведена в гл.II в предположении, что $u(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leq 1$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $f(\vartheta)$ непрерывна на окружности $|e^{i\vartheta}|=1$ всюду, кроме точки $z=e^{i\vartheta_0}$ разрыва первого рода

$$\lim_{\vartheta\to\vartheta_0-0} f(\vartheta)=f^-,\quad \lim_{\vartheta\to\vartheta_0+0} f(\vartheta)=f^+,\quad f^-\neq f^+. \tag{98}$$

Обозначим через $u_0(z)$ гармоническую функцию

$$u_0(z)=\frac{1}{\pi}\left(f^- - f^+\right)\arg(z-z_0), \tag{99}$$

где под $\arg(z-z_0)$, понимается главная ветвь этой функции.

Пусть $f_0(\vartheta)=u_0(e^{i\vartheta})$, $0\leq\vartheta\leq 2\pi$. Очевидно, что

$$\lim_{\vartheta\to\vartheta_0-0} f_0(\vartheta) = (1+\alpha)(f^- - f^+)$$

$$\lim_{\vartheta\to\vartheta_0+0} f_0(\vartheta) = \alpha(f^- - f^+) \tag{100}$$

где $\pi\alpha$ – угол, составленный положительным направлением касательной к окружности $|e^{i\vartheta}|=1$ в точке $e^{i\vartheta_0}$ с положительным направлением действительной оси $y=0$ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$.

Функция $\varphi(\vartheta)=f(\vartheta)-f_0(\vartheta)$, $0<\vartheta<2\pi$, непрерывна всюду, кроме точки ϑ_0, а в точке ϑ_0 в силу (98), (100) имеем

$$\lim_{\vartheta\to\vartheta_0-0}\varphi(\vartheta)=\lim_{\vartheta\to\vartheta_0+0}\varphi(\vartheta)=(1+\alpha)f^+-\alpha f^- \tag{101}$$

Следовательно, после доопределения функции $\varphi(\vartheta)$ в точке z_0 как

$$\varphi(\vartheta_0) = \lim_{\vartheta \to \vartheta_0} \varphi(\vartheta)$$

она становится непрерывной всюду на окружности $|t|=1$.

При построении гармонической в круге $|z|\leqslant 1$ функции $u_1(z)$ непрерывной в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и принимающей на окружности $|t|=1$ значения $\varphi(\vartheta)$, мы вправе пользоваться формулой Пуассона (97)

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{1-|z|^2}{|t-z|^2}\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{102}$$

Гармоническая в круге $|z|<1$ функция $u(z)$, определенная по формуле

$$u(z) = u_1(z) + u_0(z) \tag{103}$$

непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ всюду, кроме точки z_0, причём

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ |z|<1}} u(z) = f(\vartheta), \quad t_0 \neq z_0, \ |t_0|=1 .$$

Когда же точка z изнутри круга $|z|<1$ стремится к точке z_0 разрыва функции $f(\vartheta)$ вдоль луча $\arg(z-z_0) = \pi\beta$, где $\pi\beta$ – угол, составленный вектором $z-z_0$ с положительным направлением действительной оси, то в силу (99), (102),(103) получаем

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = (1-\lambda) f^{+} + \lambda f^{-},$$

где $\lambda = \beta - \alpha$.

Аналогичная картина имеется и тогда, когда функция $f(\vartheta)$ имеет конечное множество точек разрыва первого рода. Что же касается единственности решения задачи Дирихле с краевым условием $\lim\limits_{z\to t} u(z)=f(\vartheta)$, $t=e^{i\vartheta}$, $0\le\vartheta\le 2\pi$, в классе ограниченных в замкнутом круге $|z|\le 1$ функций, она уже была выше доказана.

Доказывается, что при суммируемости заданной на окружности $|t|=1$ функции $f(\vartheta)$ формула (97) даёт гармоническую в круге $|z|<1$ функцию $u(z)$, которая при $|z|\to 1$ почти для всех ϑ $0\le\vartheta\le 2\pi$ стремится к $f(\vartheta)$.

Заметим, что если $t''=e^{i\vartheta''}$, $t'=e^{i\vartheta'}$, $\vartheta''<\vartheta'$ – точки на окружности $|t|=1$, то выражение

$$u(\vartheta',\vartheta'';z)=\frac{1}{\pi}\arg\left[\frac{z-t'}{z-t''}e^{i\frac{\vartheta''-\vartheta'}{2}}\right]$$

при выборе его главной ветви, представляет собой гармоническую в круге $|z|<1$ функцию, равную единице на дуге $\vartheta''<\vartheta<\vartheta'$ окружности $|t|=1$ и равную нулю на дополнении закрытой дуги $\vartheta''\le\vartheta\le\vartheta'$ до полной окружности $|t|=1$. Она называется гармонической мерой дуги $\widehat{t''t'}$ окружности $|t|=1$ в точке z $|z|<1$, относительно единичного круга $|z|<1$.

§ 6. Задача Неймана. Задача с наклонной производной

Пусть D – ограниченная область пространства E_n класса $A^{1,h}$, а $f, e_1,\dots,e_n$ – заданные на её границе $S=\partial D$ действительные непрерывные функции, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2\ne 0$ всюду на

Под задачей Неймана для гармонических функций понимается следующая задача: найти гармоническую в области $\mathcal{D}$ функцию класса $C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$, удовлетворяющую краевому условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} = f(x), \quad x \in S, \tag{104}$$

где ν_x - внешняя к S нормаль в точке x.

Эта задача является частным случаем так называемой задачи с наклонной производной: требуется найти гармоническую в области $\mathcal{D}$ функцию $u(x)$ класса $C^{1,0}(\mathcal{D} \cup S)$ по краевому условию

$$\ell(x) \operatorname{grad} u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{105}$$

где вектор $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$.

Поскольку $\ell \neq 0$ без ограничения общности можно считать, что $|\ell| = 1$.

Как уже было показано в §7 гл. 2 для любой гармонической в области $\mathcal{D}$ функции $u(x)$ класса $C^{1,h}(\mathcal{D} \cup S)$ имеет место равенство

$$\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} ds_x = 0$$

,если $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} = 0$ всюду на S, то $u(x) = Const$ в $\mathcal{D} \cup S$.

основании этих свойств гармонических функций заключаем, что ли задача Неймана (104) имеет решение $u(x)$, то: а) оно ределяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, б) интеграл от $f(x)$ по границе области $\mathcal{D}$ равен нулю:

$$\int_S f(x) ds_x = 0. \tag{106}$$

довательно, равенство (106) является необходимым условием раз ости задачи Неймана (104).

Если искать решение задачи Неймана в виде потенциала того слоя (55)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x,y) \mu(y) ds_y,$$

его свойства (71)

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}\right]^+ = \frac{1}{2}\mu(x) + \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}, \quad x\in S$$

деления неизвестной плотности μ распределения масс, и интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x) + \int_S K_x(x,t)\mu(t)ds_t = 2f(x), \quad x\in S \quad (107)$$

которого дается формулой

$$K_x(x,t) = \frac{2}{\omega_n}\frac{\partial E(x,t)}{\partial \nu_x}.$$

уже было показано, когда $n=2$ при требовании, что граница S асти D является замкнутой кривой Жордана с непрерывной изной, функция $K_x(x,t)$ непрерывна по совокупности перемен- $x,t\in S$. Доказывантся, что при любом n в случае области D класса $A^{1,L}$ для интегрального уравнения (107) теория Фредгольма применима. В отличии от задачи Дирихле, в случае задачи Неймана соответствующее (107) однородное интегральное уравнение имеет нетривиальное решение, однако выполнение условия (106) гарантирует разрешимость интегрального уравнения (107) и, стало быть, задачи Неймана, т.е. (106) является условием, необходимым и достаточным для существования решения этой задачи.

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_x} = \nu(x)\,\mathrm{grad}\, u(x),$$

задача Неймана (104) является частным случаем задачи с наклонной производной (105), когда вектор $\ell=\nu_x$.

Решение задачи Неймана (104) для гармонических функций в случае круга при выполнении условия (106) выписывается в квадратурах.

В самом деле, ограничимся рассмотрением единичного круга $D: |z|<1,\ z=x_1+ix_2$. Поскольку на окружности $|z|=1$ имеют место равенства $x_1=\cos\widehat{\nu x_1},\ x_2=\cos\widehat{\nu x_2}$, краевое условие (104) можно записать в виде:

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = f(z),\quad z=x_1+ix_2,\ |z|=1$$

$\mathrm{Re}[z\Phi(z)] = f(z)$, $|z|=1$, (108)

где $\Phi(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2}$ производная аналитической в D функции $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$.

Аналитическая в круге $|z|<1$ функция $z\Phi(z)$ по краевым значениям (108) её действительной части на окружности $|z|=1$ найти формулой Шварца:

$$z\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\left(\frac{2}{t-z} - \frac{1}{t}\right) f(t)\,dt + iC_0 \quad , \quad (109)$$

где C_0 - произвольная Re постоянная.

Считая, что условие (107) вып., т.е.

$$\frac{1}{i}\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{t} = \int\limits_{|t|=1} f(\vartheta)\,d\vartheta = 0, \quad e^{i\vartheta}=t,$$

равенству (109) придадим вид

$$~~z\Phi(z) = \frac{z}{\pi}\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{t-z}\,d\vartheta + iC_0.~~$$

$\Rightarrow$ $C_0 = 0$ и стало быть,

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|=1} f(t)\log\left(1-\frac{z}{t}\right)d\vartheta + C_1 \quad , (110)$$

где C_1 - произвольная постоянная, а под $\log\left(1-\frac{z}{t}\right)$ понимается ветвь этой функции, равная нулю при $z=0$.

Перепишем ф-лу (110) в виде:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\log|t-z|\,f(t)\,d\vartheta + \frac{i}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\arg\left(1-\frac{z}{t}\right)f(t)\,d\vartheta + C_1$$

и выделяя Re часть, для искомого решения $u(z)$ задачи Неймана получаем

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\log|t-z|\,f(\vartheta)\,d\vartheta, \quad (111)$$

где C - произв. Re const.

Переходим к изучению задачи с наклонной производной (103). Теория этой задачи хорошо разработана лишь для 2-мерных областей. Мы здесь ограничимся рассмотрением именно этого случая.

Пусть D - ограниченная область плоскости комплексного пе-

[illegible] $z=x_1+ix_2$, границей к. служит замкнутая кривая Ляпунова S. Наша речь пойдёт о задаче с наклонной производной в следующей постановке: определить гармоничную в обл-ти D функцию $u(z)=u(x_1,x_2)$ класса $C^{1,h}(D\cup S)$ по краевому условию

$$l_1(t)\frac{\partial u}{\partial x_1}+l_2(t)\frac{\partial u}{\partial x_2}=f(t),\quad x_1+ix_2=t\in S, \qquad (112)$$

где l_1, l_2, f - заданные Re функции класса $C^{0,h}(S)$, причём $l_1^2+l_2^2=1$.

Обозначим через $\Phi(z)$ аналитическую в обл-ти D функцию Re частью к. является искомое решение $u(z)$ задачи (112).

Поскольку $\Phi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x_1}-i\frac{\partial u}{\partial x_2}$, условие (112) м. записать в виде: $Re[\varphi(t)F(t)]=f(t),\ t\in S$, (113)

где $$\varphi(t)=l_1(t)+il_2(t), \qquad (114)$$

$$F(z)=\Phi'(z). \qquad (115)$$

Таким образом задача (112) редуцирована к зад. определения аналитической в обл-ти D функции $F(z)$ кл. $C^{0,h}(D\cup S)$ по краевому условию (113). При исследовании этой задачи, носящей название зад. Гильберта, для упрощения общности м. считать что D - единичный круг $|z|<1$. Этого м. всегда добиться в результате конформного отображения.

Обозначим через n целое число

$$n=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}[\arg\varphi(t)]_S, \qquad (116)$$

где Var перед квадратными скобками означает, изображает приращение аргумента функции $\varphi(t)$ при однократном обходе точкой t окружности S: $|t|=1$ в положительном направлении.

Очевидно, что функция:

$$\alpha(t)=\arg\varphi(t)-n\vartheta,\quad t=e^{i\vartheta}, \qquad (117)$$

однозначна и непрерывна по Гёльдеру на S.

Аналитическая в круге D функция $\psi(z)$ класса $C^{0,h}(D\cup S)$, удовлетворяющая краевому усл.: $Re\,\psi(t)=\alpha(t)$ (118)

при требовании, что $\operatorname{Im}\psi(0)=0$ (119)

строится по ф-ле Шварца:

$$\psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_S\frac{\alpha(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\alpha(t)\,dt}{t}$$

После того как ф-ция $\psi(z)$ найдена, на основании (114), (117) и (118) краевое усл. (113) перепишем в виде:

$$\operatorname{Re}\left[t^n e^{i\psi(t)}F(t)\right]=e^{-\operatorname{Im}\psi(t)}f(t),\quad t\in S \qquad (120)$$

Сперва рассмотрим случай $n>0$. Аналитическая в обл. D ф-ция:

$$\Omega(z)=z^n e^{i\psi(z)}F(z) \qquad (121).$$

класса $C^{0,h}(D\cup S)$, удовлетворяющая краевому условию (120) даётся ф-лой Шварца

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_S e^{-\operatorname{Im}\psi(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{2t}\right)f(t)\,dt+iC. \qquad (122).$$

Из (121) и (122) получаем:

$$F(z)=z^{-n}e^{-i\psi(z)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_S e^{-\operatorname{Im}\psi(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{2t}\right)f(t)\,dt+iC\right] \qquad (123)$$

Так как аналитическая ф-ция $e^{-i\psi(z)}$ в $D\cup S$ нигде в нуль не обращается, представленная ф-лой (123) ф-ция $F(z)$ б. аналитической в обл. D лишь при усл., что аналитическая ф-ция в скобках в правой части этой формулы при $z=0$ имеет нуль порядка не ниже n, т.е. когда $C=0$ и

$$\int_S e^{-\operatorname{Im}\psi(t)}t^{-k-1}f(t)\,dt=0,\quad k=0,\dots,n-1 \qquad (124).$$

$\Rightarrow$, в рассматриваемом случае задача (113) имеет и притом единственное решение т.т., к. правая часть $f(t)$ в краевом условии (113) удовлетворяет доп. требованиям (124). Они представляют собой $2n-1$ Re интегральных усл's, которым д. удовлетворять ф-ция f для разрешимости задачи (113).

Пусть теперь $n\le 0$. Искомую ф-цию $F(z)$, удовлетворяющую усл. (120) представим в виде:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{-n-1}\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)z^k+z^{-n}F_1(z) \qquad (125)$$

174 где $F_1(z)$ - также неизвестная ф-ция, причём предполагается, что $F_1(z) = F(z)$, когда $n=0$.

Принимая во внимание (125), краевое усл. (120) перепишем в виде:

$$Re[e^{i\psi(t)} F_1(t)] = e^{-\Im m\psi(t)} f(t) - Re[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) t^{k+n}]$$
(126)

Применяя снова ф-лу Шварца, в силу (126) получаем

$$e^{i\psi(z)} F_1(z) = iC + \frac{1}{\pi i} \int_S \{e^{-\Im m\psi(t)} f(t) - Re[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{t^{n+k}}{k!} F^{(k)}(0)]\} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t}\right) dt$$
(127)

Из ф-л (125) и (127) находим emellikmo решение $F(z)$ задачи (111):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) z^k + iCe^{-i\psi(z)} \cdot z^{-n} +$$

$$+ z^{-n} e^{-i\psi(z)} \frac{1}{\pi i} \int_S \{e^{-\Im m\psi(t)} f(t) - Re[e^{i\psi(t)} \sum_{k=0}^{-n-1} \frac{t^{n+k}}{k!} F^{(k)}(0)]\} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t}\right) dt,$$
(128).

содержащую одну Re C и $-n$ Im произвольных постоянных $F^{(k)}(0)$, $k=0, \dots, -n-1$.

Подставив значение $F(z)$ из формулы (128) в (115), в результате интегрирования находим ф-цию $\Phi(z)$ и, стало быть, ф-цию $u = Re\,\Phi(z)$, представляющую собой решение задачи (112). Полученное для $u(z)$ выражение линейно зависит от $-2n+2$ произвольных Re const's.

§7 Некоторые гр. задачи для эллиптических ур's.

Краевые задачи для эллиптических ур's ставятся только в ограниченной обл-х.

Т S-замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность Ляпунова в пр-ве E_n, а D^--бесконечная обл-ть с границей S.

Ниже речь пойдёт о задаче Дирихле для гармонических ф-ций в следующей постановке: определить регулярную гармоническую в обл-ти D^- ф-цию u класса $C^{2,0}(D^-)$, удовлетворяющую краевому усл:

$$u(y) = \varphi(y), \quad y \in S \qquad (129)$$

где φ - заданная на S Re непрерывная ф-ция. Эта задача, в отличие от зад. Дирихле в конечной обл-ти $D^+ \subset C(\bar{D}^+)$ (внутренней задачи), естественно наз. внешней зад. Дирихле

По определению, регулярность гармонической в $\mathcal{D}$ функции $u(x)$, означает, что при $|x| \to \infty$ эта функция стремится к нулю не медленнее чем $|x|^{2-n}$, когда $n > 2$, и стремится к конечному пределу при $n=2$.

Без ограничения общности будем считать, что точка $x=0$ принадлежит области $\mathcal{D}^+$.

В результате инверсии
$$x' = \frac{x}{|x|^2} \tag{130}$$
область $\mathcal{D}^-$ с границей S переходит в область $\mathcal{D}'$ с границей S' в пространстве E'_n переменных $x'_1, \dots, x'_n$.

Функция $v(x')$ -определённая по формуле
$$v(x') = |x'|^{2-n} u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right), \tag{131}$$
при её доопределении в точке $x'=0$ как $\lim_{x'\to 0} v(x') = v(0)$ является гармонической в области $\mathcal{D}'$, принадлежит классу $C^{0,0}(\mathcal{D}' \cup S')$ и в силу (129) удовлетворяет краевому условию
$$v(y') = |y'|^{2-n} \varphi\left(\frac{y'}{|y'|^2}\right), \; y' \in S'. \tag{132}$$

Таким образом, внешняя задача Дирихле для гармонических функций 129) редуцирована к уже исследованной выше внутренней задаче Дирихле также для гармонических функций.

Учитывая то обстоятельство, что при $x \neq 0$ равенство (130) однозначно обращается
$$x = \frac{x'}{|x'|^2}$$
приходим к заключению, что при наличии решения $v(x')$ задачи Дирихле (132) из формулы (131) получаем искомое решение $u(x)$ внешней задачи Дирихле (129)
$$u(x) = |x|^{2-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right). \tag{133}$$

Когда $\mathcal{D}^-$ представляет собой внешность единичного шара $|x| \le 1$, задача (129) в результате замены (130) сводится к задаче Дирихле (132) для единичного шара $|x'| < 1$ пространства E'_n, причём
$$v(y') = \varphi(y'), \quad |y'| = 1.$$

Следовательно, в силу формулы Пуассона(см. ф-лу (96) гл. 2) имеем

$$v(x') = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y'|=1} \frac{1-|x'|^2}{|y'-x'|^n} \varphi(y') \, dS_{y'} . \qquad (134)$$

Поскольку ,в силу формулы (130) при $|y|=1$ имеет место равенство $\left(|y'-x'| = \frac{1}{|x|}|y'-x'|\right)$ на основании (133) и (134) для искомого решения $u(x)$ внешней задачи (129) получаем формулу (сравн. с ф-лой (102) гл. 2)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \frac{|x|^2-1}{|y-x|^n} \varphi(y) \, dS_y , \quad |x|>1 .$$

Внешняя задача Дирихле (129) может быть исследована без редукции к внутренней задаче Дирихле. Так,например, если искать решение $u(x)$ ой задачи в виде потенциала двойного слоя(54),то для определения неизвестной плотности μ в силу формулы $u^-(x^0) - u(x^0) = \frac{1}{2}\mu(x^0)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода,однозначная разрешимость оторого устанавливается повторением приведённого выше рассуждения при исследовании внутренней задачи Дирихле.

Внешняя задача Неймана заключается в определении регулярной гармонической в области D^- функции $u(x)$ класса $C^{1,h}(\overline{D}\cup S)$ по краевому условию $\frac{\partial u}{\partial \nu_x} = \varphi(x), \ x \in S,$
ν -нормаль к S,а φ-заданная действительная функция класса $C^{0,h}(S)$.

Эту задачу нельзя свести к аналогичной задаче для ограниченной облас как это было сделано в случае внешней задачи Дирихле. Однако,если искать её решение $u(x)$ в виде потенциала простого слоя и воспользоваться формулой $\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}\right)^- - \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} = -\frac{1}{2}\mu(x)$, то для определения плотности μ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода,которое можно исследовать до конца применением стандартной техники.

В случае, когда линейный оператор в частных производных Lu в области D своего задания удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, широкий класс краевых задач для уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in D \qquad (135)$$

тывается следующей задачей Пуанкаре:найти регулярную в области D решение $u(x)$ уравнения (135),принадлежащее классу $C^{1,h}(D\cup S)$,удовлетворяющее краевому условию

$$l(x) \, \mathrm{grad}\, u(x) + q(x)\, u(x) = r(x) , \quad x \in S, \qquad (136)$$

где действительный вектор $l=(l_1,\dots,l_n)$ и скаляры q и r заданы всюду на S .

Когда $l(x)=0$ всюду на S и q нигде на S в нуль не обращается, из (I36) получается краевое условие

$$u(x)=g(x),\quad g=\frac{r(x)}{q(x)},\quad x\in S. \tag{I37}$$

Задачу (I35),(I37) как и в случае гармонических функций принято называть первой краевой задачей или задачей Дирихле.

При $q(x)\equiv 0,\ x\in S$, условие (I35) принимает вид

$$l(x)\operatorname{grad} u(x)=r(x),\quad x\in S. \tag{I38}$$

Когда вектор l нигде в нуль не обращается, задачи с краевым условием (I38) для уравнения (I35) называется задачей с наклонной производной.

Если в краевом условии (I38) вектор l совпадает с конормалью N, задача с наклонной производной называется задачей Неймана для уравнения (I35). Заметим, что в случае гармонических функций уравнение (I35) является уравнением Лапласа и конормаль N совпадает с нормалью ν к границе S области $\mathcal{D}$.

В предположении, что соответствующее (I35) однородное уравнение

$$Lu=0 \tag{I39}$$

имеет главное элементарное решение $\Omega(x,y)$, повторением рассуждения, применённого при выводе интегрального представления для гармонических функций (87) из гл. 2, для регулярных решений уравнения (I39) можно получить формулу

$$u(x)=\int_S a(y)\,\Omega(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,dS_y-\int_S Q_y\,\Omega(x,y)\,u(y)\,dS_y,$$

где N-конормаль

$$a=\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos\widehat{N y_j}\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

$$Q_y=a(y)\frac{\partial}{\partial N_y}-b(y),\quad b(y)=\sum_{i=1}^{n}e_i(y)\cos\widehat{N y_i}.$$

Функции

$$u(x)=\int_S Q_y\,\Omega(x,y)\,\mu(y)\,dS_y$$

и

$$v(x)=\int_S \Omega(x,y)\,\mu(y)\,dS_y,$$

являющиеся решениями уравнения (139), называются обобщёнными потенциалами двойного и простого слоя соответственно. Они обладают свойствами, аналогичными свойствам гармонических потенциалов двойного и простого слоя. Это обстоятельство позволяет свести задачу Дирихле и задачу Неймана для уравнения (139) к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и исследовать эти задачи таким же образом, как и в случае гармонических функций.

§8 Принцип экстремума для решений уравнения (139) и единственность решения задачи (135),(137)

В теории линейных эллиптических уравнений второго порядка важную роль играет принцип экстремума: если в области $\mathcal{D}$ всюду ??

$$c(x) < 0, \tag{140}$$

то регулярное в этой области решение u эллиптического уравнения (139) ни в одной точке $x \in \mathcal{D}$ не может достигать ни отрицательного относительного максимума, ни положительного относительного минимума.

Допуская, что функция $u(x)$ в точке $x \in \mathcal{D}$ достигает отрицательного относительного минимума, мы можем написать

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{141}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \geq 0, \tag{142}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – произвольные действительные параметры. Так как положительно определённую форму $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j$ в точке $x \in \mathcal{D}$ всегда можно представить в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} g_{k\ell} \lambda_\ell \Big)^2,$$

то для коэффициентов A_{ij} справедливо представление

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si} g_{sj}, \quad i,j = 1, \dots, n. \tag{143}$$

На основании (142) и (143) имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si} g_{sj} \geq 0. \tag{144}$$

Учитывая то обстоятельство, что $u(x) < 0$ в силу (9), (140), (141) и (144) получаем $L u > 0$, а это противоречит равенству (139). Полученное противоречие опровергает наше допущение.

Аналогично доказывается, что в точке $x \in \mathcal{D}$ функция $u(x)$ не может достигать положительного относительного максимума.

Из принципа экстремума следует, что задача Дирихле (I35), (I37) не может иметь более одного решения. Действительно, для разности $u = u_1 - u_2$ любых двух решений u_1, u_2 этой задачи мы должны иметь

$$Lu(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \quad u(y) = 0, \quad y \in S. \tag{I45}$$

Так как
$$\max_{x \in S} |u(x)| = 0,$$
то в силу принципа экстремума заключаем, что в области $\mathcal{D}$ всюду $u(x) = 0$, т.е. $u_1(x) = u_2(x)$

Легко видеть, что единственность решения задачи (I37) для уравнения

$$Lu \equiv \Delta u + a u_x + b u_y + cu = f \tag{I46}$$

имеет место и при выполнении условия

$$C(x,y) \leq 0. \tag{I47}$$

Достаточно показать, что однородная задача (I45) при выполнении услов (I47) отличного от нуля (тождественного) решения не имеет.

В результате замены функции $u(x,y)$ по формуле $u = (A - e^{-Mx})v$ где $A = const > 0$, а число M больше чем верхняя грань $a(x,y)$ в области $\mathcal{D}$, для v в силу (I45) получаем

$$\Delta v + a_1 v_x + b v_y + c_1 v = 0, \quad (x,y) \in \mathcal{D}, \quad v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S, \tag{I48}$$

где $a_1 = a + 2M(Ae^{Mx} - 1)^{-1}$, $c_1 = c - M(M-a)(Ae^{Mx} - 1)^{-1}$.

Подбором числа A так, чтобы выражение $Ae^{Mx} - 1$ было положительным, добьёмся выполнения условия $c_1(x,y) < 0$ всюду в $\mathcal{D}$. Для этого случая, как уже было показано, задача (I48) не имеет отличных от тождественного нуля решений, т.е. $u(x,y) = 0$ всюду в $\mathcal{D}$.

Глава IУ

Обобщенные решения уравнений в частных производных.

§ I. Краткий обзор методов построения классических решений уравнений в частных производных.

Классическими называются регулярные решения уравнений в частных производных, удовлетворяющие соответственно краевым, начальным, смешанным и т.д. условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е. в каждой точке носителя данных.

Одним из универсальных и исторически первых методов построения классических решений уравнений в частных производных является метод разделения переменных.

Сущность этого метода легко проследить на примере линейного уравнения в частных производных второго порядка вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u. \qquad (I)$$

Если искать решение $u(x,t)$ уравнения (I) как произведение двух функций $v(x)$ и $w(t)$

$$u(x,t) = v(x)\,w(t), \qquad (2)$$

то будем иметь

$$\omega(t)\Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)v\Big] = v(x)\Big[\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t)\frac{dw}{dt} + \gamma(t)w\Big].$$

Для того, чтобы полученное равенство выполнялось тождественно для всех $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и t в области задания уравнения (I) необходимо и достаточно выполнение двух равенств

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x)+\lambda]v = 0 \qquad (3)$$

и $$\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2}+\beta(t)\frac{dw}{dt}+[\gamma(t)+\lambda]w=0, \tag{4}$$

где λ – постоянная

$$\lambda=-\frac{1}{v(x)}\Big[\sum_{ij=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+C(x)v\Big]=$$
$$=-\frac{1}{w(t)}\Big[\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2}+\beta(t)\frac{dw}{dt}+\gamma(t)w\Big].$$

Тем самым независимые переменные x,t и неизвестные функции $v(x),w(t)$ разделились и для определения последних получили соответственно уравнение (3) в частных производных (при $n>1$), в котором число независимых переменных на единицу меньше чем в уравнении (I), и обыкновенное дифференциальн уравнение (4).

Во многих случаях для уравнения (I) набор его решений вида (2) позволяет исчерпывающим образом изучить рассматриваемую задачу.

Мы здесь ограничимся изучением задачи колебаний упругой мембраны с закрепленными краями вдоль кривой S, лежащей в плоскости переменных x,y. Предполагается, что в положении пок мембрана занимает конечную область G этой плоскости, причем $S=\partial G$. Как известно, изучаемый процесс описывается функцией $u(x,y,t)$, представляющей собой регулярное решение волнового урав нения с двумя пространственными переменными x,y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{5}$$

и удовлетворяющей начальным

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y);\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\psi(x,y),\ (x,y)\in G \tag{6}$$

и краевому

$$u(x,y,t)=0,\quad t\geq 0,\quad (x,y)\in S \tag{7}$$

условиям.

В рассматриваемом случае уравнения (3) и (4) переходят соответственно в уравнение Гельмгольца

$$\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{8}$$

и в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w''(t) + \lambda w(t) = 0, \quad \lambda = const, \tag{9}$$

а краевое условие (7) – в краевое условие задачи Дирихле

$$v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S \tag{10}$$

для функции $v(x,y)$.

При $\lambda = 0$ задача (8),(10) отличного от нуля решения не имеет. Значение λ, для которого задача (8),(10) имеет нетривиальное решение $v(x,y)$, называется собственным числом или собственным значением, а $v(x,y)$ – соответствующей λ собственной функцией указанной задачи.

Легко видеть, что в случае кусочно-гладкого контура S собственные числа задачи (8),(10) положительны.

Действительно, для нетривиального решения $v(x,y)$ уравнения (8) в области G имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda v^2.$$

В результате интегрирования этого тождества по области G и применения формулы (GO) в силу (10) получаем

$$\int_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = \int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds + \lambda\int_G v^2\,dx\,dy = \lambda\int_G v^2\,dx\,dy. \tag{11}$$

Ввиду того, что v – действительная отличная от постоянной функция, из равенства (II) приходим к заключению, что $\lambda > 0$.

Приняв обозначение $\lambda = \mu^2$, где μ – действительная постоянная, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (9) можно записать в виде

$$w(t) = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t, \tag{I2}$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные постоянные. Очевидно, что нам достаточно ограничиться положительными значениями μ.

При довольно общих предположениях относительно области G имеет место утверждение: множество собственных чисел счетно

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \qquad \lim_{n \to \infty} \mu_n = \infty ; \tag{I3}$$

кроме того, счетным является и множество линейно независимых собственных функций

$$v_1, v_2, \ldots , \tag{I4}$$

причем в (I3) знак равенства означает, что среди собственных чисел могут оказаться и такие, которым соответствуют несколько линейно независимых собственных функций. Такие собственные числа называются кратными. Доказательство сформулированного утверждения требует привлечения теории линейных интегральных (операторных) уравнений Фредгольма второго рода. Однако, в некоторых случаях мембраны конкретной формы (круговой, прямоугольной и др.) в его справедливости можно легко убедиться и другим способом.

Нетрудно видеть, что собственные функции v_k и v_m, соответствующие собственным числам λ_k и λ_m при $\lambda_k \neq \lambda_m$ ортогональны, т.е.

$$\int_G v_k v_m \, dx\,dy = 0. \tag{I5}$$

Действительно, в результате интегрирования по области G очевидного тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v_k \frac{\partial v_m}{\partial x} - v_m \frac{\partial v_k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_k \frac{\partial v_m}{\partial y} - v_m \frac{\partial v_k}{\partial y}\right) = v_k \Delta v_m - v_m \Delta v_k$$

и применения формулы (60) с учетом равенств

$$\Delta v_k = -\lambda_k v_k, \quad \Delta v_m = -\lambda_m v_m, \quad (x,y) \in G,$$

$$v_k(x,y) = v_m(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S$$

получаем

$$\int_S \left(v_k \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m \frac{\partial v_k}{\partial \nu}\right) ds =$$

$$= \int_G (v_k \Delta v_m - v_m \Delta v_k)\, dx\,dy = (\lambda_k - \lambda_m) \int_G v_k v_m \, dx\,dy = 0,$$

откуда и следует (I5).

Записывая соответствующее собственному числу μ_n решение (I2) уравнения (9) в виде $w_n(t) = a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t$, где a_n и b_n – произвольные действительные постоянные, составим набор решений уравнения (8), удовлетворяющих краевому условию (7), по формуле

$$u_n(x,y,t) = v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t) \tag{I6}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Будем искать решение $u(x,y,t)$ задачи (5), (6), (7) в виде суммы ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t). \tag{I7}$$

В случае равномерной сходимости ряда в правой части (I7) и допустимости его почленного дифференцирования до второго порядка, сумма $u(x,y,t)$ этого ряда, очевидно, будет решением уравнения (5), удовлетворяющим краевому условию (7). Требование, чтобы $u(x,y,t)$ удовлетворяло и начальным условиям (6), равносильно равенствам

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x,y) = \varphi(x,y); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n v_n(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in G. \tag{I8}$$

Поскольку система функций (I4) линейно независима, мы вправе считать ее ортонормированной (ортогональность v_n и v_m при $\lambda_n \neq \lambda_m$, впрочем, уже была доказана), т.е.

$$\int_G v_n(x,y)\, v_m(x,y)\, dx\,dy = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0 & n \neq m. \end{cases} \tag{I9}$$

В силу (I9) из (I8) для определения коэффициентов a_n, b_n получим формулы

$$a_n = \int_G \varphi(x,y)\, v_n(x,y)\, dx\,dy, \quad b_n = \frac{1}{\mu_n} \int \psi(x,y)\, v_n(x,y)\, dx\,dy. \tag{20}$$

Доказывается, что при требовании достаточной гладкости от $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, эти функции могут быть представлены в виде сумм рядов (I8), коэффициенты которых даются формулами (20), причем ряд в правой части (I7) сходится равномерно, и его сумма $u(x,y,t)$ представляет собой регулярное решение задачи (5),(6),(7) в цилиндре $Q = \{ (x,y) \in G,\ t \in (0,\infty) \}$, образующие которого проходят через кривую S и параллельны оси t.

Убедиться в единственности решения задачи (5),(6),(7) трудности не представляет, когда граница S области G является достаточно гладкой кривой.

В самом деле, пусть Q_t – часть цилиндрической области $Q=\{(\xi,\eta)\in G,\ 0<\tau<\infty\}$ между плоскостями $\tau=0$, $\tau=t$, а $u(\xi,\eta,\tau)$ – регулярное в Q решение уравнения (5), удовлетворяющее однородным условиям

$$u(\xi,\eta,0)=0,\ u_\tau(\xi,\eta,0)=0,\ (\xi,\eta)\in G,\ u(\xi,\eta,\tau)=0,\qquad (\xi,\eta)\in S. \tag{21}$$

Единственность решения задачи (5),(6),(7) будет доказана, если покажем, что задача (5),(21)) отличного от нуля решения не имеет.

В предположении достаточной гладкости кривой S мы вправе считать, что для области Q_t формула (60) применима.

Интегрируя тождество

$$-2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2\right]=0$$

по Q_t и применяя формулу (60), получаем (ср. с формулой (78) гл. II)

$$\int\limits_{\partial Q_t}\left\{-2\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial\xi}\xi_\nu-2\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial u}{\partial\eta}\eta_\nu+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2\right]\tau_\nu\right\}ds=0, \tag{22}$$

где $\xi_\nu, \eta_\nu, \tau_\nu$ – косинусы внешней к ∂Q_t нормали в точке (ξ,η,τ).

В силу (21) из (22) следует равенство

$$\int\limits_{G_t}[u_\xi^2+u_\eta^2+u_\tau^2]\,ds=0, \tag{23}$$

где G_t – область плоскости $\tau=t$, представляющая собой пересечение Q с плоскостью $\tau=t$. Из (23) получаем что $u_\xi=u_\eta=u_\tau=0$ в G_t и, стало быть, $u_x=u_y=u_t=0$ в любой конечной точке $(x,y,t)\in Q$. Следовательно $u(x,y,t)=\mathrm{const}$. Отсюда в силу первого из условий (21) заключаем, что $u(x,y,t)=0$ и тем самым единственность решения задачи (5),(6),(7) доказана.

Остановимся подробно на примере круговой мембраны. Без ограничения общности можно считать, что в положении покоя круговая мембрана G занимает круг $x^2+y^2\leq 1$ на плоскости переменных x, y.

Вводя полярные координаты $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ и пользуясь для оператора Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выражением

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2},$$

запишем уравнение Гельмгольца (8) в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta^2}+\mu^2 v=0,\quad \mu^2=\lambda. \tag{24}$$

Функция $v(r,\vartheta)=R(r)\Theta(\vartheta)$ будет решением уравнения (24), если функции $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\mu^2r^2-\omega)R(r)=0, \tag{25}$$

$$\Theta''(\vartheta)+\omega\Theta(\vartheta)=0, \tag{26}$$

где ω – действительная постоянная

$$\omega=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\frac{r^2R''+rR'+r^2\mu^2R}{R}=const.$$

Для однозначности функции $v(r,\vartheta)$ очевидно, что функция $\Theta(\vartheta)$ должна быть периодической с периодом 2π, т.е. $\omega=n^2$, где n – произвольное целое число.
В соответствии с этим общее решение уравнения (26) запишется в виде

$$\Theta(\vartheta)=\alpha_n\cos n\vartheta+\beta_n\sin n\vartheta, \tag{27}$$

где α_n, β_n - произвольные действительные постоянные.

В обозначениях $\mu r = \rho,\ R(r) = R\left(\frac{\rho}{\mu}\right) = J(\rho)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (25) для $R(r)$ переходит в уравнение Бесселя

$$J''(\rho) + \frac{1}{\rho} J'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) J(\rho) = 0 \tag{28}$$

с целочисленным параметром $\omega = n^2$,

Поскольку нас интересует регулярное в круге G решение $v(\rho, \theta)$ уравнения (24), из двух линейно независимых решений уравнения (28) мы должны брать регулярное при $0 \le r \le 1$ его решение, представляющее собой функцию Бесселя $J_n(\rho)$ с неотрицательным целочисленным индексом.

$$J_n(\rho) = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\rho^{n+2K}}{2^{n+2K} K!(n+K)!} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Краевое условие (IO) в рассматриваемом случае переходит в условие $J_n(\mu) = R(1) = 0$ для функции $J_n(\rho)$.

Как известно, функция Бесселя $J_n(\mu)$ имеет счетное число корней, которые являются действительными и для которых единственной предельной точкой является бесконечно удаленная точка плоскости комплексного переменного μ.

Следовательно, собственными числами задачи (8),(IO) являются квадраты отличных от нуля корней функции $J_n(\mu)$. Примем для них обозначения $\mu_{n,m} = \rho_{n,m}$ и расположим в порядке возрастания

$$\rho_{n,m} < \rho_{n,m+1} \qquad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Соответствующими им собственными функциями являются

$$J_n(\mu_{n,m} r)\cos n\vartheta, \quad J_n(\mu_{n,m} r)\sin n\vartheta. \tag{29}$$

Из (29) следует, что собственные числа $\mu^2_{0,m}$ все простые, в то время как кратность каждого собственного числа $\mu^2_{n,m}$, $n>0$ по меньшей мере равна двум, ибо им соответствуют линейно независимые собственные функции

$$J_n(\mu_{n,m} r)\cos n\vartheta, \quad J_n(\mu_{n,m} r)\sin n\vartheta.$$

Лежащие в G точки (r,ϑ), в которых какая-нибудь из собственных функций обращается в нуль, называются узловыми. При $\mu=\mu_{0,m}$, $m>1$, все точки окружностей

$$r = \frac{\mu_{0,m-j}}{\mu_{0,m}}, \quad j=1,\dots,m-1,$$

и только они являются узловыми, а при $\mu=\mu_{n,m}$, $n\geq 1$, $m>1$ узловыми являются окружности

$$r = \frac{\mu_{n,m-j}}{\mu_{n,m}}, \quad j=1,\dots,m-1$$

и лучи

$$\vartheta = \left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)/n, \quad \vartheta = k\pi/n, \quad k=0,\dots,n-1, \; 0<r<1.$$

Очевидно, что узловыми являются также точки $(r,\vartheta)\in G$, в которых обращаются в нуль функции

$$\alpha J_n(\mu_{n,m} r)\cos n\vartheta + \beta J_n(\mu_{n,m} r)\sin n\vartheta$$

при действительных постоянных α,β; $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Записывая соответствующую $\mu_{n,m}$ собственную функцию в виде

$$v_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)(\alpha_n\cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta),$$

где α_n, β_n – произвольные действительные постоянные, функции (16), выражающие собственные колебания закрепленной по краям круговой мембраны, примут вид

$$v_{n,m} = J_n(\mu_{n,m} r)(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta)(a_{n,m}\cos\mu_{n,m}t + b_{n,m}\sin\mu_{n,m}t), \quad n = 0,1,\ldots;\ m = 1,2,\ldots$$

Этот набор решений уравнения (5) позволяет по указанной выше схеме построить решение задачи (5),(6),(7).

Уравнение (8) иногда принято называть метагармоническим, а его решения – метагармоническими функциями.

В конце предыдущей главы была доказана единственность решения задачи Дирихле для уравнения (8) при $\lambda<0$. В этом предположении доказывается и существование решения этой задачи. Однако, при $\lambda>0$ положение значительно сложнее. Как мы только что убедились, при $\lambda=\mu_{n,m}^2>0$, например в круге $x^2+y^2<1$, однородная задача Дирихле (10) для уравнения (8) имеет линейно независимые решения

$$J_n(\mu_{n,m} r)\cos n\vartheta, \quad J_n(\mu_{n,m} r)\sin n\vartheta,$$

а неоднородная задача Дирихле, оказывается, не всегда разрешима.

К классическим методам построения решений уравнений гиперболического типа относится метод характеристик, о котором речь шла во вводном курсе уравнений математической физики.

Пусть $Q(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – характеристическая квадратичная форма, соответствующая линейному уравнению в частных прозводных

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = 0, \qquad (30)$$

а уравнение

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = const \tag{31}$$

представляет собой $(n-1)$ – мерную поверхность в пространстве E_n переменных $x_1, \dots x_n$. Если функция $\varphi(x_1, \dots x_n)$ удовлетворяет равенству

$$Q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

для всех точек поверхности (31), то последняя называется характеристической поверхностью уравнения (30). В частности, каждый конус семейства

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 - (t - t_0)^2 = 0, \quad x_i^0 = const, \quad t_0 = const,$$

является характеристической поверхностью волнового уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{32}$$

Плоскости, определенные уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - c_0 t = const, \quad c_0^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

при произвольных действительных постоянных c_i, $i = 0, 1, \dots n$, также входят в семейство характеристических поверхностей уравнения (32).

Обозначим через S достаточно гладкую n-мерную поверхность в пространстве E_{n+1} переменных $x_1, \dots x_n, t$, записанную в виде

$$\psi(x, t) = 0.$$

Будем считать, что S не является характеристической поверхностью уравнения (32), т.е. ни в одной ее точке (x, t) не имеет места равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0$$

и, кроме того, при $n>1$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2<0. \tag{33}$$

Доказывается, что для уравнения (32) правильно, т.е. корректно поставлена следующая задача: найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (32) по условиям

$$u(x,t)=\varphi(x,t),\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial e}=\psi(x,t),\quad (x,t)\in S, \tag{34}$$

где ℓ - заданный на S единичный вектор, ни в одной точке не выходящий в касательную к S плоскость, а φ и ψ - также заданные на S достаточно гладкие функции. В приведенной здесь постановке задачу (32),(34) также принято называть задачей Коши.

Поверхность S, удовлетворяющая условию (33), называется поверхностью пространственного типа для уравнения (32). При $n=1$ задача (32),(34) правильно поставлена и тогда, когда кривая S - носитель данных (34) вместо (33) удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\neq 0,\quad x_1=x.$$

В параграфе 6 гл.II носителем начальных данных (55) является плоскость $\psi(x,t)=t-t_0=0$, представляющая собой поверхность пространственного типа для уравнения (32), а направление ℓ совпадает с направлением оси t.

Для волнового уравнения (32) когда число пространственных переменных $n>1$, плоскость $x_n=0$ не является ни характеристической поверхностью, ни поверхностью пространственного типа. Функция $u(x,t)$, определенная по формуле

$$u(x,t)=\frac{1}{k^2}\,\mathrm{sh}\,kx_n\,\sin kx_{n-1},$$

где κ – натуральное число, очевидно, является решением задачи вида (34) с данными на $x_n = 0$

$$u\Big|_{x_n=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = \frac{1}{\kappa} \sin \kappa x_{n-1}$$

для уравнения (32), но эта задача некорректна, т.е. неправильно поставлена, ибо

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0,$$

в то время как само решение $u(x,t)$ при $\kappa\to\infty$ не остается ограниченным.

На примере волнового уравнения (32) с одним пространственным переменным $x_1 = x$ легко убеждаемся в том, что характристики не могут служить носителями начальных данных вида (34). В самом деле, пусть S совпадает с прямой $x-t=0$, являющейся характеристикой этого уравнения, а ℓ – с напрвлением оси t. В этих предположениях условия (34) запишутся в виде

$$u(x,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=x} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{35}$$

Пользуясь общим представлением решений уравнения (32) в рассматриваемом случае

$$u(x,t) = f_1(x+t) + f_2(x-t),$$

где f_1 и f_2 – произволные функции класса $C^{2,0}$ и требуя, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла условиям (35), получаем равенства

$$f_1(2x) + f_2(0) = \varphi(x), \quad f_1'(2x) - f_2'(0) = \psi(x),$$
$$-\infty < x < \infty,$$

которые при произвольных, даже как угодно гладких φ и ψ, не могут быть удовлетворены.

Что же касается однородной задачи

$$u(x,x)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=x}=0,$$

её решением является выражение

$$u(x,t)=f_2(x-t),$$

где $f_2(\xi), -\infty<\xi<+\infty$ – произвольная действительная функция класса $C^{2,0}$, обращающая в нуль при $\xi=0$ вместе со своей производной первого порядка.

Тем не менее в случае того же волнового уравнения правильно поставлена так называемая характеристическая задача Коши. Обозначим через К характеристический для уравнения (32) конус

$$K: \ |x-x_0|^2-|t-t_0|^2=0, \quad t\geq t_0$$

представляющий собой огибающую семейства плоскостей (также характеристических для уравнения (32)):

$$C(x-x_0)=|C|(t-t_0)=0, \quad t_0=const,$$

где C – действительный постоянный n-мерный вектор. В простейшем варианте характеристической задачи Коши требуется определить регулярное внутри конуса K решение $u(x,t)$ уравнения (32) по́ условию

$$u(x,t)=\varphi(x,t), \quad (x,t)\in K \tag{36}$$

где φ – заданная на K достаточно гладкая действительная функция.

В случае $n=1$ конус K вырождается в характеристические прямые

$$L_1: \ x+t=x_0+t_0, \quad L_2: \ x-t=x_0-t_0, \quad t\geq t_0,$$

выходящие из точки (x_0,t_0), а условие (36) переходит в условия

$$u(x,t)|=\varphi_1(t), \quad u(x,t)|=\varphi_2(t), \quad t\geq t_0,$$

где φ_1 и φ_2 – заданные действительные функции класса $C^{2,0}$, причем $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$.

В вводном курсе уравнений математической физики было доказано, что характеристическая задача (32), (36) поставлена правильно, т.е. она имеет единственное устойчивое решение. При $n=1$ задача (32),(37) называется задачей Гурса и ее решение дается формулой

$$u(x,t)=\varphi_1\left(\frac{t-x+x_0+t_0}{2}\right)+\varphi_2\left(\frac{t+x-x_0+t_0}{2}\right)-\varphi_1(t_0).$$

Для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-Lu=f(x,t), \tag{38}$$

где L – линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка по пространственным переменным $x_1,\dots x_n$, стоящий в левой части уравнения (30), и $f(x,t)$ – заданная действительная функция, поверхность S : $\psi(x,t)=0$ называется поверхностью пространственного типа, если в каждой ее точке имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2<0.$$

Доказывается корректность постановки задачи (35),(38), когда S – поверхность пространственного типа и все данные этой задачи достаточно гладки.

Кроме того, корректно поставлена и основная смешанная задача (6),(7),(38).

В терминах уравнений гиперболического типа моделируются, в основном, нестационарные процессы, в то время как уравнения эллиптического типа, как правило, описывают стационарные процессы, а также явления, протекающие в средах, находящихся в статическом (равновесном) состояния. С эллиптическими уравнениями чаще всего приходится иметь дело при применении метода разделения переменных. Уравнения параболического типа находят свое применение при изучении явлений переноса, которым присуща эволюция.

В главе III мы убедились в том, что в теории классических задач для линейных уравнений эллиптического типа важная роль отводится методу параметрикса. Этот метод позволяет привлечь при исследовании вопросов разрешимости указанных задач линейные интегральные уравнения. В определенном смысле модификацией указанного метода является метод тепловых потенциалов, успешно применяемый при изучении классических задач для уравнений параболического типа.

Встречающиеся в приложениях уравнения в частных производных в большинстве случаев представляют собой дифференциальную запись законов сохранения, которым подчинены изучаемые явления. Эти законы обычно сформулированы в интегральном виде, и функции, описывающие интересующие нас явления, представляют собой решения вариационных задач на минимум определенного вида функционалов. Методы, позволяющие найти эти функции без привлечения уравнений в частных производных, называются вариационными методами. Следующий параграф посвящен некоторым из этих методов.

§ 2. Вариационные методы.

Как уже было отмечено в §I, гл. I, прогиб $u=u(x,y)$ упругой мембраны, находящейся в равновесном состоянии, при определенных допущениях представляет собой гармоническую в области G функцию переменных x,y, т.е. регулярное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in G, \tag{39}$$

которое на этот раз выступает в роли уравнения Эйлера-Лагранжа для интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}(u)=\int_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy, \tag{40}$$

выражающего потенциальную энергию мембраны в положении изгиба.

Пусть $\varphi(x,y)$ –заданная на $S=\partial G$ действительная функция класса $C^{0,0}(S)$. Функции класса $C^{0,0}(G\cup S)$ с кусочно-непрерывными в G производными первого порядка, для которых интеграл Дирихле (40) существует (т.е.конечен) и которые удовлетворяют краевому условию

$$u(x,y)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in S, \tag{41}$$

называются допустимыми функциями.

В гл. Ш была изучена первая краевая задача или задача Дирихле в следующей постановке: среди гармонических в области G функций класса $C^{0,0}(G\cup S)$ найти ту, которая удовлетворяет краевому условию (4I), причем, при довольно общих предположениях относительно области G было доказано, что решение этой задачи существует, единственно и устойчиво.

В физической задаче от искомой формы $u = u(x,y)$ мембраны, находящейся в равновесном состоянии изгиба, требуется, чтобы функция $u(x,y)$ принадлежала классу допустимых функций и в этом классе она минимизировала интеграл Дирихле. Задача отыскания среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле минимален, называется первой вариационной задачей. Следует подчеркнуть, что в постановке первой вариационной задачи ничего не говорится о вторых производных искомой функции.

Имеет место следующее важное утверждение: если заданная на S функция $\varphi(x,y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

Справедливость этого утверждения мы покажем при дополнительных предположениях, о которых речь пойдет ниже.

Пусть $u(x,y)$ – решение первой вариационной задачи. Класс допустимых функций представим в виде $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, где ε - произвольная постоянная, а $h(x,y)$ – произвольная функция из класса допустимых функций, удовлетворяющая краевому условию

$$h(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S. \tag{42}$$

Очевидно, что

$$D(u+\varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h) \geq 0, \tag{43}$$

где $$D(u,h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y)\, dx\, dy. \tag{44}$$

Так как $u(x,y)$ – минимизирующая функция и ε – произвольная постоянная, то из (43) получаем

$$D(u,h) = 0. \tag{45}$$

Примем следующие дополнительные предположения: функции $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S области G являются настолько гладкими, что для них имеют место тождества

$$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h \Delta u,$$

$$D(u,h) = \int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_G h \Delta u \, dx dy, \qquad (46)$$

где ν внешняя к S нормаль.

В силу (42) и (45) из (46) имеем

$$\int_G h \Delta u \, dx dy = 0,$$

откуда при предположении, что Δu является непрерывной функцией в G, в силу произвольности $h(x,y)$ приходим к заключению, что $\Delta u(x,y) = 0$. Следовательно, при принятых выше допущениях решение первой вариационной задачи является решением задачи Дирихле (39), (4I).

Пусть теперь $u(x,y)$ — решение задачи Дирихле (39), (4I), а $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, как и выше, - класс допустимых функций, причем для $u(x,y)$ и $h(x,y)$ имеет место формула (46). Из этой формулы в силу (39) и (42) следует равенство (45) и, стало быть, на основании (43) получаем

$$D(u) \leq D(u + \varepsilon h),$$

а это означает, что функция $u(x,y)$ минимизирует интеграл Дирихле (40), т.е. она является решением первой вариационной задачи. ▲

Идея редукции краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа к первой вариационной задаче для интеграла Дирихле принадлежит Риману. Приведенное выше утверждение об эквивалентности этих двух задач известно под названием принципа Дирихле.

Далеко не всегда имеет место эквивалентность между задачей Дирихле (39), (4I) и первой вариационной задачей. На простых примерах убеждаемся в том, что задача Дирихле (39), (4I) может иметь и притом единственное решение $u(x,y)$, в то время как $u(x,y)$ не только не минимизирует интеграл Дирихле $D(u)$, но этот последний даже расходится.

Пусть G – единичный круг $|z|^2 = x^2+y^2 < 1$, а в краевом условии (41)

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \pi \\ 0 & \pi < \vartheta < 2\pi \end{cases}, \tag{47}$$

где $x+iy = e^{i\vartheta}$ – точка окружности $|z| = 1$.

Решением задачи (39),(47), очевидно, является функция

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \log i \frac{1+z}{1-z}, \quad z = x+iy,$$

где под $\log i \frac{1+z}{1-z}$ понимается ветвь этой функции, равная $\frac{\pi}{2}$ при $z=0$.

Поскольку

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{\pi^2} \left| \left(\log \frac{1+z}{1-z}\right)' \right|^2 = \frac{4}{\pi} \left| \frac{1}{1-z^2} \right|^2,$$

интеграл Дирихле $D(u)$ расходится.

На примере гармонической в круге $|z|<1$ функции

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{2^{2k}}}{2^k}, \quad z = x+iy,$$

принимающей на окружности $|z|=1$ непрерывные краевые значения

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos 2^{2k} \vartheta, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

убеждаемся в том, что при $0<r<1$, $re^{i\vartheta} = z$

$$\int\limits_{|z|\le r} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\,dy = \int\limits_{|z|\le r} f'(z) \overline{f'(z)}\, dx\,dy =$$

$$= 2\pi \int_0^r \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \varrho^{2 \cdot 2^{2k}-1} d\varrho = \pi \sum_{k=1}^{\infty} r^{2^{2k+1}}$$

и, стало быть, интеграл Дирихле $D(u)$, взятый по кругу $|z|<1$, и на этот раз расходится.

Аналогичная ситуация может иметь место при нарушении гладкости границы S области G.

В предыдущем параграфе построение функции, описывающей колебания закрепленной по краям упругой мембраны, было сведено к задаче о собственных значениях в следующей постановке: в конечной области G плоскости переменных x, y с кусочно-гладкой границей $S = \partial G$ требуется определить собственные числа и собственные функции уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in G, \quad \lambda = const, \tag{48}$$

т.е. найти значения λ, при которых это уравнение в области G имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие однородному краевому условию

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S, \tag{49}$$

и построить их.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \tag{50}$$

где $D(u)$ – интеграл Дирихле (40), а

$$H(u) = \int_G u^2(x,y)\,dx\,dy$$

Допустимыми для функционала (50) будем считать отличные от постоянной, удовлетворяющие краевому условию (49) непрерывные в $G \cup S$ действительные функции с кусочно-непрерывными в G производными первого порядка, для которых интеграл Дирихле (40) существует.

Под второй вариационной задачей понимается задача нахождения в классе допустимых функций минимума функционала (50) и построения соответствующей минимизирующей функции.

Покажем, что в определенных дополнительных предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$-минимизирующая функция, то $\lambda = J(u)$ является наименьшим собственным числом задачи (48),(49), и $u(x,y)$ - соответствующей λ собственной функцией этой же задачи.

Действительно, пусть $u(x,y)$ - минимизирующая J функция и

$$\lambda = J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} . \tag{51}$$

Для класса допустимых функций $u(x,y) + \varepsilon \cdot h(x,y)$, где ε - произвольная постоянная, а $h(x,y)$ - произвольная допустимая функция, имеем

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)} ,$$

где $D(u,h)$ дается формулой (44), а

$$H(u,h) = \int_G u h \, dx dy .$$

Так как функция $F(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет минимум, то

$$F'(0) = 2 \, \frac{H(u) D(u,h) - D(u) H(u,h)}{H^2(u)} = 0,$$

откуда в силу (51) получаем

$$H(u) \left[D(u,h) - \lambda H(u,h) \right] = 0$$

или, в виду того, что $H(u) \neq 0$,

$$D(u,h) - \lambda H(u,h) = 0. \tag{52}$$

Допуская, что условия гладкости функций $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контура S области G позволяют пользоваться формулой

(46), перепишем равенство (52) в виде

$$H(\Delta u + \lambda u, h) = 0. \tag{53}$$

При дополнительном требовании непрерывности Δu в области G из (53) приходим к заключению, что $u(x,y)$ является собственной функцией задачи (48),(49), соответствующей собственному числу λ.

Если λ^* – отличное от нуля собственное число, а $u^*(x,y)$ – соответствующая ему собственная функция задачи (48),(49), то в силу (46) будем иметь

$$H(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*) = -D(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0$$

и, стало быть,

$$\lambda^* = \frac{D(u^*)}{H(u^*)} \geq \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda,$$

т.е. λ среди собственных чисел задачи (48),(49) является наименьшим.

Для наименьшего собственного числа и соответствующей ему собственной функции задачи (48), (49) примем обозначения $\lambda = \lambda_1$, $u = u_1$.

Поскольку наряду с $u_1(x,y)$, соответствующей λ_1 собственной функцией является $C\,u_1(x,y)$, где C – произвольная, отличная от нуля действительная постоянная, то без ограничения общности можно считать, что

$$H(u_1) = 1, \quad D(u_1) = \lambda_1. \tag{54}$$

Покажем, что следующее за λ_1 ближайшее собственное число λ_2 и соответствующую ему собственную функцию $u_2(x,y)$ задачи (48), (49) можно получить в результате решения вариационной задачи

$$\boxed{\min J(u) = J(u_2) = \lambda_2}$$

в классе допустимых функций, удовлетворяющих условию

$$H(u, u_1) = 0. \tag{55}$$

Предполагая, что решение сформулированной вариационной задачи существует, повторением приведенного выше при выводе тождества (52) рассуждения, приходим к заключению, что

$$D(u_2, \xi) - \lambda_2 H(u_2, \xi) = 0 \tag{56}$$

для любой допустимой функции ξ, удовлетворяющей условию (55). Легко видеть, что тождество (56) имеет место для любой допустимой функции $\eta(x,y)$, не обязательно удовлетворяющей условию (55). В самом деле, в силу (55) и (56) имеем

$$H(u_2, u_1) = 0, \quad D(u_2, u_1) = 0. \tag{57}$$

На основании первого из равенств (54) очевидно, что для любой допустимой функции $\eta(x,y)$ функция

$$\xi(x,y) = \eta(x,y) - H(\eta, u_1) u_1 \tag{58}$$

удовлетворяет условию (55) и, стало быть,

$$D(u_2, \xi) - \lambda_2 H(u_2, \xi) = 0. \tag{59}$$

Подставляя выражение $\xi(x,y)$ из (58) в (59) и учитывая равенства (57) подходим к заключению, что

$$D(u_2, \eta) - \lambda H(u_2, \eta) = 0. \tag{60}$$

Так как тождество (60) имеет место для любой допустимой функции, то при требовании достаточной гладкости этих функций и контура S области G, как и при выводе тождества (53), из (60) получаем

$$H(\Delta u_2 + \lambda_2 u_2, h) = 0,$$

т.е. $\Delta u_2 + \lambda u_2 = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично убеждаемся в том, что если при любом натуральном n

$$\lambda_n = J(u_n) = \min J(u) \tag{61}$$

в классе допустимых функций, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &H(u)=1, \\ &H(u, u_i)=0, \quad i=1, \dots n-1, \end{aligned} \tag{62}$$

то λ_n и $u_n(x,y)$ представляют собой собственное число и соответствующую ему собственную функцию задачи (48), (49), причем

$$H(u_i)=1, \quad H(u_i, u_k)=0, \; i \neq k, \; \mathcal{D}(u_i)=\lambda_i \; \mathcal{D}(u_i,u_k)=0, \; i\neq k \tag{63}$$

Поскольку, класс допустимых функций для вариационной задачи (61) при $n=k+1$ уже, чем класс допустимых функций при $n=k$, то очевидно, что

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

При довольно общих предположениях относительно гладкости границы S области G справедливы следующие утверждения: 1) для любого натурального n существует решение вариационной задачи (61), (62), т.е. в классе допустимых функций функционал $J(u)$ имеет минимум $\lambda_n = J(u_n)$, причем функции u_n удовлетворяют условиям (63), 2) число λ_n и функция $u_n(x,y)$ представляют собой решение задачи (48), (49) о собственных значениях, 3) $\lim\limits_{\lambda_n \to \infty} \lambda_n = \infty$, 4) система собственных функций

$$u_1(x,y), \; u_2(x,y), \; \dots \; u_n(x,y), \dots \tag{64}$$

является полной в том смысле, что для любой функции $f(x,y) \in C^{0q}(G \cup S)$ и для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ существует линейная форма $L_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k u_k(x,y)$ с действительными коэффициентами a_k такая, что

$$H(f - L_n) < \varepsilon,$$

причем при фиксированном n наименьшее значение $H(f-L_n)$ достигается тогда, когда числа a_k являются коэффициентами Фурье функции f относительно системы (64)

$$a_k = \int_G f(x,y)\, u_k(x,y)\, dx\,dy, \quad k=1,\dots n, \tag{65}$$

5) для коэффициентов Фурье (65) имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = H(f),$$

6) когда $f(x,y)$ принадлежит классу допустимых функций для функционала J, то ее можно представить в виде суммы абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x,y).$$

На доказательствах этих утверждений мы здесь останавливаться не будем.

Некоторые из методов построения сформулированных выше задач связаны с именами Гаусса и Римана. В историческом плане определенные затруднения в развити этих методов были вызваны тем, что в классе допустимых функций может не оказаться минимизирующей функции. Так например, пусть в классе допустимых функций из $C^{0,0}(0 \le x \le 1)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 1 \tag{66}$$

ищется действительная функция $u(x)$, минимизирующая функционал

$$J(u) = \int_0^1 u^2(x)\, dx. \tag{67}$$

Поскольку функция $u_n(x)=x^n$ при любом натуральном n является допустимой, и

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0,$$

нижняя грань функционала (67) равна нулю. Следовательно, минимизирующая функционал (67) действительная функция из $C^{00}(0\le x\le 1)$ должна тождественно равняться нулю, но она не может быть допустимой, ибо она не удовлетворяет второму из условий (66).

Когда класс допустимых функций $\{u\}$ не является пустым, множество значений интеграла Дирихле $D(u)$ имеет нижнюю грань d. Хотя мы и не знаем, достигается ли эта грань допустимой функцией, но очевидно одно: существует последовательность $u_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ допустимых функций такая, что

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n) = d. \tag{68}$$

Последовательность $\{u_n\}$, $n=1,2,\ldots$, для которой имеет место равенство (68), называется минимизирующей.

То же самое можно сказать о функционале $J(u)$.

Существование минимизирующей последовательности еще не означает, что существует решение рассматриваемой вариационной задачи. Объектами дальнейших исследований должны быть следующие вопросы: 1) как строить минимизирующую последовательность, 2) сходится ли она и 3) является ли ее предел $u=\lim u_n$ допустимой функцией?

Детальное исследование этих вопросов требует введения в рассмотрение определенных функциональных пространств, элементами которых являются, в частности, члены минимизирующей последовательности. Установив сходимость минимизирующей последовательности в метрике этих пространств, желательно либо показать, что полученный предел является решением вариационной задачи в приведенной выше постановке, либо разумно обобщить понятие самого решения. При этом важно установить, что решение вариационной задачи является решением соответствующей краевой задачи либо в обычном, либо в определенном обобщенном смысле.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются уравнения в частных производных. Эти методы применительно к задачам для уравнений в частных производных принято называть вариационными или прямыми методами. Важно то, что некоторые прямые методы позволяют строить приближенные решения рассматриваемых задач. О двух из этих методов речь пойдет ниже. Первый из них носит название метода Ритца.

Сущность метода Ритца заключается в следующем. Пусть рассматривается вопрос о минимизации функционала $\Phi(u)$. Обозначим через $\{v_n\}$, $n=1,...$ полную систему допустимых функций для функционала $\Phi(u)$ и составим последовательность

$$\{u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k\}, \quad n=1,2,..., \tag{69}$$

где c_k - пока произвольные постоянные.

Определим коэффициенты c_k, $k=1,...n$, так, чтобы выражение $\varphi_n = \Phi(u_n)$ как функция $c_1,... c_n$ было минимальным.

Для некоторых классов функционалов Ритцу удалось показать, что указанным образом посроенная последовательность (69) является минимизирующей последовательностью, которая сходится, и предел которой u решает рассматриваемую задачу.

В качестве примера рассмотрим вторую вариационную задачу минимизации функционала $J(u)$, когда область представляет собой квадрат $\{0<x<\pi, 0<y<\pi\}$, причем

$$H(u)=1. \tag{70}$$

В качестве указанной выше полной системы возьмем систему функций

$$\{\sin kx \sin ly\}, \quad k, l=1,2,\ldots$$

Пусть

$$\{u_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl} \sin kx \sin ly\} \quad n, m=1,2,\ldots$$

Функции u_{mn}, очевидно, удовлетворяют условию (49) и являются допустимыми для функционала $J(u)$. Кроме того,

$$d_{mn} = \mathcal{D}(u_{mn}) = \frac{\pi}{4}^2 \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2 (k^2+l^2), \tag{71}$$

$$\underline{H(u_{mn}) = \frac{\pi}{4}^2 \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2. = 1} \tag{72}$$

По схеме Ритца в силу (70) и (72) нам следует найти минимум выражения (71) при условии, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2 = \frac{4}{\pi^2}. \tag{73}$$

Решая задачу на условный экстремум (71),(73) находим что при любых m и n все c_{kl} равны нулю кроме c_{11}, причем

$$\boxed{c_{11}=\frac{2}{\pi}}; \quad d_{mn}=2,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn} = u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sin x \sin y,$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d_{mn} = \mathcal{D}(x) = \lambda = 2.$$

Метод Ритца позволяет построить приближенное решение задачи о собственных значениях (48),(49). В самом деле, за приближенное решение второй вариационной задачи о минимизации функционала $J(u)$ при условии (70) можно принять функцию

$$\underline{u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)} \tag{74}$$

из последовательности (69), где коэффициенты $c_k,\ k=1,2,\dots$ определяются в результате решения задачи на условный минимум

$$\begin{cases} d_n(c_1,\dots c_n)=D(u_n)=\min, \\ h_n(c_1,\dots c_n)=H(u_n)=1. \end{cases}$$

Таким образом, построенную функцию u_n принимают за приближенное решение собственной функции, а число λ_n, определенное формулой $\lambda_n=D(u_n)$ за собственное число задачи (48),(49).

Для построения приближенного решения этой же задачи с успехом пользуются методом Бубного-Галеркина. В этом методе за приближенное решение задачи (48),(49) принимается определенная по формуле (74) функция $u_n(x,y)$, коэффициенты которой $c_k,\ k=1,\dots n$, определяются из равенств (срав. с (53))

$$\boxed{H(\Delta u_n+\lambda u_n, v_m)=0}, \quad m=1,\dots n,$$

или, что то же самое –

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} H(\Delta v_k+\lambda v_k, v_m)c_k=0,} \quad m=1,\dots n. \tag{75}$$

Равенства (75) представляют собой однородную систему линейных алгебраических уравнений, в которой число неизвестных равно числу уравнений.

Из линейной алгебры известно, что система (75) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$
\det \begin{Vmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1), \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_1) \\ \vdots & \vdots \\ H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_n) \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \end{Vmatrix} = 0. \qquad (76)
$$

Определенное из уравнения (76) значение λ принимается за приближенное выражение собственных чисел задачи (48),(49). Соответствующие же им приближенные выражения для собственных функций, как уже было сказано, даются формулой (74), в которой C_k, $k=1,\dots,n$, – нетривиальные решения системы (75).

Оценка погрешности приближения к точным решениям при применении метода Бубнова-Галеркина, так же как и при применении метода Ритца, сталкивается с трудностями, о преодолении которых речь может идти лишь при решении конкретно взятых задач.

По сравнению с методом Ритца, пользоваться методом Бубнова-Галеркина предпочтительнее прежде всего в том отношении, что задача нахождения решений уравнений (75) и (76) проще, чем решение задачи на условный минимум в методе Ритца.

§3. Обобщенные решения классических задач для уравнений в частных производных

Понятие интеграла Дирихле обобщается и на функции, заданные в многомерных областях. Пусть G - ограниченная область n-мерного евклидова пространства E_n точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, \dots, x_n$, граница $S = \partial G$ которой представляет собой $(n-1)$-мерную поверхность, а $u(x)$ - заданная в G действительная функция. Интегралом Дирихле $\mathcal{D}(u)$ называется функционал

$$\mathcal{D}(u) = \int\limits_G \nabla u \cdot \nabla u \, dx, \tag{77}$$

где $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $\nabla u \nabla u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}^2$, а dx - элемент объема.

Непрерывные в $G \cup S$ функции с кусочно-непрерывными в G производными первого порядка, для которых существует интеграл Дирихле (77) и, которые на S совпадают с заданной непрерывной функцией $g(x)$

$$u(x) = g(x), \quad x \in S, \tag{78}$$

называются <u>допустимыми функциями</u>. Задача определения среди допустимых функций той функции $u(x)$, для которой интеграл Дирихле минимален, называется <u>первой вариационной задачей</u>.

Как и в случае $n=2$ прямыми методами вариационного исчисления доказывается что, если заданная на S функция $g(x)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то первая вариационная задача имеет и притом единственное решение.

При существовании решения первой вариационной задачи, представляя множество всех допустимых функций в виде $\{u+\varepsilon h\}$, где $u(x)$ – минимизирующая $D(u)$ функция, ε – произвольная действительная постоянная, а $h(x)$ – произвольная допустимая функция, удовлетворяющая краевому условию

$$h(x)=0, \quad x\in S, \tag{79}$$

выражение $D(u+\varepsilon h)$ можно записать в виде

$$D(u+\varepsilon h)=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h), \tag{80}$$

где $$D(u,h)=\int_G \nabla u\,\nabla h\,dx.$$

Из (80) следует, что

$$D(u,h)=0. \tag{81}$$

Если дополнительно известно, что: а) решение первой вариационной задачи $u(x)\in C^{2,0}(G)$, б) для области G применима формула (60) и, в) тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}h\right)=\nabla u\,\nabla h+h\,\Delta u \tag{82}$$

интегрируемо по области G, то из (82) в результате интегрирования с учетом (79) получаем

$$D(u,h)=-\int_G h\,\Delta u\,dx. \tag{83}$$

Из тождества (81),(82) следует гармоничность функции $u(x)$ в области G.

Обратно, если допустимая для интеграла Дирихле (77) функция $u(x)$ в области G является решением уравнения Лапласа и имеет место тождество (83), то подставляя множество всех допустимых функций опять в виде $\{u+\varepsilon h\}$, где ε - произвольная действительная постоянная, и $h(x)$ произвольная допустимая функция, удовлетворяющая условию (79), то в силу (81) и (83) из (80) приходим к заключению, что $u(x)$- минимизирующая функция.

Когда априори неизвестно, что имеют место тождества (82) и (83), однако для допустимой функции $u(x)$ выполняется равенство (81) при любой достаточно гладкой функции $h(x)$, обращающейся в нуль в пограничной полоске области G, то можно показать, что $u(x)$- решение первой вариационной задачи и естественно считать, что эта функция является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в обобщенном смысле. Руководствуясь этим обстоятельством, можно обобщить понятие производной применительно к классу функций, дифференцируемость которых, во всяком случае априори, не известна.

Один из вариантов обобщенных производных вводится следующим образом.

Будем считать, что G - область пространства E_n, причем не делается никаких предположений относительно ограниченности G и структуры ее ~~границы~~. Заданная в G функция $\varphi(x)$, $x=(x_1,..,x_n)$ называется финитной, если она бесконечно дифференцируема и тождественно равна нулю вне некоторого компакта $K\subset G$. Компакт K называется носителем функции $\varphi(x)$.

Для обычной производной порядка m функции $\varphi(x)$ примем обозначение

$$D^m\varphi=\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}, \quad m=\sum_{j=1}^{n} m_j.$$

Рассмотрим заданные в G локально суммируемые (т.е. суммируемые в каждой подобласти δ, $\delta \cup \partial\delta \subset G$) функции $u(x)$ и $v(x)$.

<u>Определение:</u> говорят, что функция $v(x)$ является <u>обобщенной производной порядка m</u> функции $u(x)$, если имеет место тождество

$$\int_G u\, D^m \varphi\, dx = (-1)^m \int_G v \varphi\, dx \tag{84}$$

для любой финитной функции $\varphi(x)$ с компактным носителем в G.

Когда функция $u(x)$ имеет локально суммируемую обычную производную $D^m u$, эта последняя совпадает с обобщенной производной. В этом убеждаемся интегрированием по частям в левой части формулы (84) с учетом финитности функции φ

$$\int_G u\, D^m \varphi\, dz = (-1)^m \int_G D^m u\, \varphi\, dx.$$

B¹

Пусть <u>$L_2(G)$ – гильбертово пространство</u> функций, заданных в G (т.е. функций, суммируемых с квадратом в G). Множество всех таких функций из $L_2(G)$, которые имеют обобщенные производные первого порядка, суммируемые с квадратом в G, обозначим ~~через~~ W_2^1. Для пар функций $u, v \in W_2^1$ определим <u>скалярное произведение</u> по формуле

$u - W$

$$(u \cdot v) = \int_G (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx. \tag{85}$$

Если <u>норму $\|u\|_{W_2^1}$</u> элемента $u \in W_2^1$ ввести как неотрицательное число

$$\|u\|_{W_2^1} = \left(\int_D (\nabla u\, \nabla u + u^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{86}$$

то множество W_2^1 станет сепарабельным банаховым пространством.

Замыкание $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ множества всех финитных функций с компактным носителем в G по норме (86) является собственным подпространством W_2^1.

Скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ вместо (85) можно определить по формуле

$$(u,v) = \int_G \nabla u \cdot \nabla v \, dx .$$

Имеют место следующие два утверждения.

I) Если замкнем множество всех финитных функций с компактным носителем в G по норме

$$\|u\| = \left(\int_G \nabla u \cdot \nabla v \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = [D(u)]^{\frac{1}{2}},$$

то получим снова подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ пространства W_2^1.

2) Каждое ограниченное множество из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ компактно $L_2(G)$.

Справедливость первого утверждения является очевидным следствием легко доказываемого неравенства Пуанкаре-Стеклова

$$\int_G u^2 dx \leq C^2 \int_G (\nabla u)^2 dx$$

где C - постоянная, зависящая только от области G.

На доказательстве второго утверждения мы останавливаться не будем.

Пусть теперь область $G \subset E_n$ ограничена и ее граница $S = \partial G$ представляет собой $(n-1)$-мерную поверхность. Будем считать, что G лежит в области задания равномерно эллиптического линейного уравнения второго порядка

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f(x),\ x\in G. \tag{87}$$

Задача Дирихле для уравнения (87) в классической постановке заключается в требовании определить регулярное в области G решение $u(x)$ уравнения (87) класса $C^{0,0}(\mathcal{D}\cup S)$ по краевому условию

$$u(x)=g(x),\quad x\in S, \tag{88}$$

где $g(x)$ – заданная на S действительная непрерывная функция.

Ниже понятие решения задачи Дирихле будет обобщено в том случае, когда краевое условие (88) однородно, т.е.

$$u(x)=0\ ,\quad x\in S. \tag{89}$$

(11) В предположении, что A_{ij}, e_i, C – ограниченные измеримые функции и $f\in L_2(G)$, под обобщенным решением в пространстве W_2^1 задачи (87),(89) понимается функция $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для которой имеет место тождество

$$\int\limits_G\left(-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+Cuv-fv\right)dx=0 \tag{90}$$

при любой функции $v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, причем под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимаются обобщенные производные функции $u(x)$ первого порядка.

Когда обобщенное решение $u(x)\in C^{2,0}(\mathcal{D})$ и функции A_{ij} достаточно гладки, после интегрирования по частям тождество (90) можно переписать в виде

$$\int_G (Lu - f)\, v\, dx = 0,$$

откуда, требуя нерпрерывности Lu и f, приходим к заключению, что $u(x)$ является классическим решением задачи (87),(89).

В предположении существования сопряженного с L оператора

$$L^* w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w) + c w,$$

обобщенным решением $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ в области G сопряженного однородного уравнения

$$L^* w = 0, \tag{91}$$

удовлетворяющим однородному краевому условию

$$w(x) = 0, \quad x \in S, \tag{92}$$

называется функция $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для которой

$$\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \pm \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e w) v \mp c w v\right) dx = 0 \tag{93}$$

при любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Задача (91),(92) называется сопряженной с (87),(89) задачей.

Повторением приведенного выше рассуждения, на основании тождества (93) убеждаемся в том, что обобщенное решение $w(x)$ задачи (91),(92) из $C^{2,0}(G)$ является классическим решением.

В теории задачи (87),(89) как в классической, так и в обобщенной постановке центральное место занимают следующие утверждения.

а) Однородная задача Дирихле (89) для однородного уравнения

$$Lu = 0 \tag{94}$$

и сопряженная с ней задача (91),(92) имеют одинаковое, не более чем конечное число линейно независимых решений.

б) Для разрешимости задачи (87),(89) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условиям

$$\int_G f w_i \, dx = 0,$$

где w_i, $i=1,\dots \ell$, – все линейно независимые решения задачи (91),(92).

в) В области G достаточно малой меры однородная задача (94),(89) имеет только тривиальное (тождественно равное нулю) решение.

Из утверждений а) и б) непосредственно следует важная теорема: задача (87),(89) для любой f разрешима притом однозначно тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная задача (94),(89) не имеет нетривиальных (отличных от нуля) решений.

На основании этой теоремы и утверждения в) приходим к заключению, что задача (87),(89) в области достаточно малой меры всегда имеет и притом единственное решение.

При наличии главного элементарного решения уравнения (94) и достаточной гладкости S, f и коэффициентов уравнения (87), как уже было отмечено в гл.III, метод потенциала позволяет редуцировать задачу (87),(88) к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и, следовательно, в классической постановке этой задачи справедливость утверждений а), б), в) очевидна. В обобщенной же постановке задачи (87),(89) эти утверждения доказываются функциональными методами.

Говорят, что линейные краевые задачи фредгольмовы, если для них справедливы утверждения а), б), в).

В приведенной выше обобщенной постановке задачи Дирихле (87),(89) от коэффициентов уравнения (87) требуется, чтобы они были ограничены и измеримы, функция $f \in L_2(G)$, а о гладкости границы S области G, в которой ищется решение, ничего не говорится. Поэтому, при существовании решения $u(x)$ этой задачи, кроме того, что оно принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, трудно судить в каком смысле оно удовлетворяет краевому условию (89), если у нас не будут известны дополнительные сведения о гладкости поверхности S.

Обозначим через σ - участок S, представляющий собой ограниченную односвязную область плоскости $x_n = 0$, причем цилиндр C высоты h с образующей, параллельной оси x_n, и основанием σ принадлежит G. Пусть $u(x)$ - финитная функция с компактным носителем в G.

Из очевидного тождества

$$u(x_1, \dots x_{n-1}, x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \dots x_{n-1}, t)}{\partial t} dt, \quad 0 \le x_n \le h,$$

в силу неравенства Шварца

$$\left(\int_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \dots x_n)}{\partial t} \right)^2 \le x_n \int_0^{x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt$$

следует оценка

$$\int_\sigma [u(x_1, \dots x_{n-1}, x_n)]^2 d\sigma \le x_n \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 dx. \tag{95}$$

Эта оценка остается в силе и для функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$.

В силу (95) приходим к заключению, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (87),(89), когда оно существует, вблизи участка σ границы S области G ведет себя так, что имеет место равенство

$$\lim_{x_n \to 0} \int_{\sigma} [u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)]^2 d\sigma = 0.$$

Редукция неоднородного краевого условия Дирихле к случаю, когда оно однородно, при требовании достаточной гладкости границы S области G, в принципе всегда возможна. Для осуществления этой возможности достаточно, например, построить гармоническую в области G функцию $u_0(x)$, удовлетворяющую неоднородному краевому условию (88), и ввести в рассмотрение новую функцию $u_1(x) = u(x) - u_0(x)$, являющуюся решением уравнения

$$L u_1 = f - L u_0.$$

Очевидно, что для функции $u_1(x)$ краевое условие Дирихле однородно.

15 В гл. III мы убедились в том, что для правильной постановки задачи Дирихле в случае гармонических функций нет необходимости требовать, чтобы ее краевые значения представляли собой непрерывную функцию. Наряду с этим, как мы только что убедились, обобщенное решение однородной задачи Дирихле (89) для уравнения (87) в области G даже с достаточно гладкой границей не обязано в каждой точке $x \in S$ принимать значение нуль. По этой причине в постановке задачи Дирихле (87), (88) требование непрерывности от $g(x)$ можно ослабить, заменить это требование, например, требованием $g \in L_2(S)$, и определить обобщенное решение так, чтобы окончательно сформулированная задача сохранила характер фредгольмовости.

В приведенных выше как в классической, так и в обобщенной постановках задачи Дирихле (87), (88) мы требовали, чтобы ограниченная область G, в которой ищется решение этой задачи, лежала в области равномерной эллиптичности оператора L. Выясним на примерах, насколько существенно это требование.

В декартовых ортогональных координатах x, y уравнение

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{96}$$

эллиптично в верхней полуплоскости $y>0$. Пусть G – конечная область, ограниченная лежащей в полуплоскости $y>0$ дугой σ полуокружности $x^2 + \frac{4}{9}y^3 = 1$ в римановой метрике $ds^2 = y\,dy^2 + dx^2$ и отрезком $A(-1,0)B(1,0)$ оси $y=0$.

Поскольку соответствующая уравнению (96) характеристическая форма дается формулой

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = y^2 \lambda_1^2 + y \lambda_2^2,$$

условие равномерной эллиптичности

$$K_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \le Q(\lambda_1, \lambda_2) \le K_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$
$$0 < K_0 = const \le K_1 = const$$

для этого уравнения в области G не соблюдено.

В результате замены переменных

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}},$$

особенной лишь при $y=0$, область G переходит в полукруг $G_1: \xi^2 + \eta^2 = 1,\ \eta>0$, дуга σ – в полуокружность $\sigma_1: \eta \geq 0,\ \xi^2+\eta^2=1$, отрезок AB – в отрезок $A_1(-1,0)\, B_1(1,0)$ оси $\eta \geq 0$, уравнение (96) – в уравнение

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0,$$
$$v(\xi, \eta) = u\left[\xi, \left(\frac{3}{2}\eta\right)^{\frac{2}{3}}\right], \tag{97}$$

а краевое условие Дирихле

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial G, \tag{98}$$

для уравнения (96) – в краевое условие

$$v(\xi,\eta) = g\left(\xi, \left(\tfrac{3}{2}\eta\right)^{\frac{2}{3}}\right), \quad (\xi,\eta) \in \partial G_1, \tag{99}$$

для уравнения (98).

Поскольку задача Дирихле (97),(99) поставлена правильно т.е. корректно (ее решение строится в квадратурах), то правильно поставлена и задача (96),(98).

В конечной области G, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ и ограниченной простой дугой σ Жордана с концами в точках $A(a,0)$, $B(b,0)$, $a<b$ и отрезком AB оси $y=0$, уравнение

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \tag{100}$$

эллиптично, но оно также не удовлетворяет условию равномерной эллиптичности.

Задача определения регулярного в области G решения $u(x,y)$ уравнения (100) класса $C^{\infty}(G\cup\sigma)$, ограниченного при $y\to 0$ и удовлетворяющего краевому условию Дирихле лишь на части σ границы ∂G области G

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \sigma \tag{101}$$

не может иметь более одного решения.

Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно показать, что сформулированная задача с однородным краевым условием

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \sigma \tag{102}$$

нетривиальных решений не имеет.

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (I00),(I02). Введем в рассмотрение функцию $w=-\log y+k$, где под $\log y$ понимается ветвь этой функции, действительная при $y>0$, а положительная постоянная k выбрана так, что $w>0$ при $(x,y)\in G\cup\partial G$.

В каждой точке области G очевидно имеем

$$Lw=-w<0. \tag{I03}$$

Функция $v(x,y)=\varepsilon w\pm u$, где $\varepsilon>0$ - произвольная постоянная, на ∂G неотрицательна. Она не может иметь отрицательного минимума в области G. Действительно, пусть в точке $(x,y)\in G$ функция $v(x,y)$ достигает отрицательного относительного минимума. Так как (x,y) - точка относительного отрицательного минимума, в этой точке мы должны иметь $Lv=v_{xx}+yv_{yy}-v>0$, а это невозможно, ибо в силу (I03)

$$Lv=\varepsilon Lw=-\varepsilon w<0.$$

Следовательно в каждой фиксированной точке $(x,y)\in G$ имеем оценку $\varepsilon w\pm u\geq 0$, т.е. $|u(x,y)|\leq\varepsilon w$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $u(x,y)=0$, и тем самым единственность решения задачи (I00),(I0I) доказана. Можно показать, что эта задача имеет решение при любой непрерывной функции $g(x,y)$.

В любой лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ области G, примыкающей к оси $y=0$, эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{I04}$$

не является равномерно эллиптическим.

В качестве G рассмотрим конечную область, ограниченную параболой $x^2+4y=1$, $y>0$ и отрезком $A(-1,0)$ $B(1,0)$ оси $y=0$.

В результате замены

$$\xi = x,\ \eta = 2y^{\frac{1}{2}},\ v(\xi,\eta) = u\left(\xi, \tfrac{1}{4}\eta^2\right),$$

уравнение (I04) переходит в уравнение Лапласа (97), а область G – в полукруг $\xi^2+\eta^2<1$, $\eta>0$, плоскости переменных ξ, η.

При требованиях, что производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ в области G существует и суммируема с квадратом, в силу равенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

получаем

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \lim_{y\to 0} y^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

В этих предположениях при $u(x,y) \in C^{0,0}(G \cup \partial G)$ приходим к заключению, что гармоническая в G_1 функция $v(\xi,\eta)$ гармонически продолжается через отрезок $A_1(-1,0)\,B_1(1,0)$ в полукруг $\bar{G}_1: \xi^2+\eta^2<1,\ \eta<0$ и, следовательно, краевое условие (I0I) для $u(x,y)$ переходит в краевое условие Дирихле для для функции $v(\xi,\eta)$

$$\begin{aligned} v(\xi,\eta) &= g_1(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in \sigma_1, \\ v(\xi,\eta) &= g_1(\xi,-\eta), \quad (\xi,\eta)\in \bar{\sigma}_1, \end{aligned} \qquad (\text{I05})$$

где

$$g_1(\xi,\eta) = g\left[\xi, \left(\tfrac{1}{2}\eta\right)^2\right],$$

дуга σ_1 является лежащей в полуплоскости $\eta \geq 0$ частью ∂G_1, а дуга $\bar{\sigma}_1$ расположена симметрично дуги σ_1 относительно отрезка $A_1 B_1$.

Поскольку задача Дирихле (97),(I05) однозначно разрешима, то однозначно разрешима и задача (I0I),(I04) при принятых выше предположениях.

Как уже было отмечено, в случае линейного скалярного уравнения в частных производных второго порядка (87) равномерная эллиптичность гарантирует фредгольмовость задачи Дирихле (88) в ограниченных областях. В случае же эллиптических систем второго порядка это обстоятельство может не иметь места.

Действительно, рассмотрим систему двух уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \qquad (106)$$

в матричной записи

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = 0, \qquad (107)$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

а $u = (u_1, u_2)$.

Поскольку для характеристической формы, соответствующей системе (107) имеем

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \det\left(A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2\right) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2$$

и, стало быть,

$$K_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 \leq K(\lambda_1, \lambda_2) \leq K_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2,$$
$$0 < K_0 = \mathrm{const} \leq 1, \quad 0 < K_1 = \mathrm{const} \geq 1.$$

то эта система равномерно эллиптична.

Легко видеть, что в круге $G: |z - z_0|^2 < \varepsilon^2$ при произвольном положении его центра z_0 на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и при любом конечном радиусе $\varepsilon > 0$ однородная задача Дирихле

$$u_1(x,y) = 0, \quad u_2(x,y) = 0, \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2, \qquad (108)$$

для системы (I06) имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w(z) = u_1(x,y) + i\,u_2(x,y) = \left[(z-z_0)(\bar z-\bar z_0) - \varepsilon^2\right]\varphi(z), \tag{I09}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая в круге G функция комплексного переменного z.

□ Действительно, в обозначениях

$$z = x+iy,\quad w(z) = u_1(x,y) + i\,u_2(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

система (I06) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar z^2} = 0,$$

откуда следует, что

$$w(z) = \bar z\,\phi(z) + \psi(z), \tag{II0}$$

где $\phi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные аналитические функции комплексного переменного z в области G.

На основании формулы (II0) заключаем, что представленная формулой (I09) функция $w(z)$ действительно является регулярным решением системы (I06). Функции $u_1(x,y) = \operatorname{Re} w(z)$ и $u_2(x,y) = \operatorname{Im} w(z)$ очевидно удовлетворяют однородным краевым условиям (I08).

Следовательно, задача Дирихле в круге G для системы (I06) не является фредгольмовой.

В настоящее время найдены условия, усиливающие эллиптичность линейных систем уравнений в частных производных второго порядка, выполнение которых гарантирует фредгольмовость задачи Дирихле.

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t), \tag{III}$$

где оператор

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n} e_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x,t)u$$

является равномерно эллиптическим в области Ω своего задания из пространства E_{n+1} точек x,t. Пусть G – ограниченная область пространства E_n точек x, а $Q: \{G \times (0<t<T)\}$ – подобласть Ω с нижним основанием G и боковой поверхностью $S: \{\partial G \times (0<t<T)\}$, $T=const>0$.

Требование определения регулярного в Q решения $u(x,t)$ уравнения (III), непрерывного в $Q \cup \partial Q$ и удовлетворяющего условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu(x), \quad u\big|_S = 0, \tag{II2}$$

называется основной смешанной задачей для уравнения (III).

Рассмотренная выше задача (5),(6),(7) является частным случаем задачи (III),(II2).

Пользуясь понятием обобщенной производной, можно обобщить постановку и этой задачи.

Замыкание по норме $W_2^1(Q)$ гладких в Q функций, обращающихся в нуль вблизи S, обозначим через $W_{20}^1(Q)$.

Обобщенным решением задачи (III),(II2) в пространстве $W_2^1(Q)$ называется функция $u(x,t) \in W_{20}^1$, обращающаяся при $t=0$ в $\tau(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ и удовлетворяющая тождеству

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx\,dt =$$

$$= \int_G \nu(x)\, v(x,0)\, dx + \int_Q f v\, dx\, dt \tag{II3}$$

для любой функции $v(x,t) \in W_{20}^1(Q)$, равной нулю при $t=T$.

Для того, чтобы имело смысл тождество (II3), достаточно потребовать, чтобы A_{ij}, e_i, c были ограничены и измеримы, а $f \in L_2(Q)$, $\nu \in L_2(G)$.

Когда $T(x) \equiv 0$, для классического решения $u(x,t)$ задачи (III),(II2) тождество (II3), очевидно, имеет место при дополнительных предположениях относительно гладкости коэффициентов уравнения (III), функции $\nu(x)$ и границы области Q.

Только что приведенному определению обобщенного решения задачи (III),(II2) исторически предшествовало другое определение.

Пусть $\{f_k(x,t)\}$, $k=1,2,\dots$ – ограниченная последовательность принадлежащих пространству $L_2(G)$ функций, пределом которой в $L_2(G)$ является функция $f(x,t)$ при любом фиксированном t, $0<t<T$.

Если для каждого k задача (III),(II2) при $f=f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x,t) \in L_2(Q)$, и функция $u(x,t)$ является пределом последовательности $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при любом фиксированном t, $0<t<T$, то эту функцию называют обобщенным решением задачи (III),(II2).

Пусть теперь имеется уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t), \tag{II4}$$

где дифференциальный оператор Lu и правая часть f удовлетворяют тем же требованиям, что и в уравнении (III). Как и выше, пусть G – ограниченная область пространства E_n, а $Q:\{G \times (0<t<T)\}$ – подобласть области Ω задания уравнения (II4).

Первая краевая задача для уравнения (II4) в классической постановке заключается в определении функции

$u(x,t)\in C^{2,0}(Q)\cap C^{00}(Q\cup G\cup\partial G)$, $S:\{\partial G\times(0\le t\le T)\}$

являющейся решением уравнения (II4) в области Q, удовлетворяющим краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in G, \tag{II5}$$
$$u(x_0,t)=\psi(t),\quad (x_0,t)\in S. \tag{II6}$$

Обобщенное решение задачи (II4),(II5),(II6) можно определить по разному.

Если скалярное произведение $(u\cdot v)$ функций $u(x,t), v(x,t)\in L_2(Q)$ с обобщенными первыми производными по пространственным переменным из $L_2(Q)$, определить в виде интеграла

$$(u\cdot v)=\int_Q\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+uv\right)dx\,dt,$$

а норму $u(x,t)$ – по формуле

$$\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}},$$

то получим гильбертово пространство W_2^{10}. Замыкание $\overset{\circ}{W}{}_2^{10}$ по норме пространства W_2^{10} всех гладких в $Q\cup\partial Q$ функций, обращающихся в нуль вблизи S, представляет собой подпространство пространства W_2^{10}.

Под обобщенным решением задачи (II4),(II5),(II6) при $\psi(t)\equiv 0$ в пространстве W_2^{10} в предположении, что $\varphi\in L_2(G)$, понимается функция $u(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{10}$, для которой имеет место тождество

$$\int_Q\left(-u\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v-cuv\right)dx\,dt=$$
$$=\int_G\varphi\, v(x,0)\,dx+\int_Q f v\,dx\,dt \tag{II7}$$

при любой функции $v(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{10}$, обращающейся в нуль при $t=T$.

Классическое решение $u(x,t)$ задачи (II4),(II5),(II6) при $\psi(t)\equiv 0$, конечно, удовлетворяет тождеству (II7).

Если $\psi(t)\equiv 0$, функции $f(x,t), \varphi(x)$ являются пределами равномерно сходящихся соответственно в $Q\cup\partial Q$ и $G\cup\partial G$ последовательностей достаточно гладких функций $\{f_k(x,t)\}, \{\varphi_k(x,t)\}, k=1,2,...$ и задача (II4),(II5),(II6), когда f и φ заменены соответственно через $f_k(x,t), \varphi_k(x)$ и $\psi(t)\equiv 0$, имеет единственное классическое решение $u_k(x,t)$ для любого k, то при равномерной сходимости в $Q\cup\partial Q$ последовательности $\{u_k(x,t)\}$ ее предел $u(x,t)$ также называется обобщенным решением задачи (II4),(II5),(II6).

Введение обобщенного решения, таким образом, в первую очередь оправдано тем, что в приложениях (например, в линейной теории теплопроводности) функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ даются, как правило, с определенной точностью.

§4. Краткий обзор методов доказательства существования обобщенных решений

Ниже мы ограничимся рассмотрением конкретных примеров неоднородных уравнений в частных производных с однородными краевыми и начальными условиями. В результате замены искомой функции, в принципе , всегда можно добиться, чтобы краевые и начальные условия стали однородными соответствующим изменением правой части уравнения. Для справедливости этого утверждения следует усилить требования гладкости от коэффициентов уравнений, от данных и от их носителя.

По данному выше определению, в ограниченной области $G\subset E_n$ обобщенным решением однородной задачи Дирихле

$$u(x,0)=0, \quad x\in G \tag{II8}$$

для уравнения Пуассона

$$\Delta u=-f(x), \quad f\in L_2, \tag{II9}$$

называется функция $u(x)$ из гильбертова пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_G (\nabla u \nabla v - f v)\, dx = 0 \tag{120}$$

для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Как уже было отмечено, скалярное произведение в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ можно задать в виде

$$(u \cdot v) = \int_G \nabla u \nabla v\, dx$$

и тогда это пространство получится замыканием всех финитных функций с компактным носителем в G по норме

$$\| u \| = \left(\int_G (\nabla u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение

$$F(v) = \int_G f v\, dx \tag{121}$$

является ограниченным линейным функционалом, определенным в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. В силу известного из функционального анализа утверждения (теорема Рисса о представлении линейного функционала) существует единственная функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ при помощи которой функционал (121) представляется в виде

$$F(v) = (u \cdot v) = \int_G \nabla u \nabla v\, dx \tag{122}$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Из идентичности тождеств (120) и (122) следует существование обобщенного решения задачи (118), (119).

Для обобщенного решения $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ соответствующей (118), (119) однородной задачи (т.е. при $f \equiv 0$) из (120) получаем

$$\int_G (\nabla u_0)^2 dx = 0.$$

Отсюда приходим к заключению, что $u_0(x) \equiv 0$ почти всюду в G. Т.е. и в обобщенной постановке имеет место единственность решения задачи (118), (119).

Мы здесь не останавливаемся на весьма интересном и трудном вопросе о совпадении обобщенных и классических решений задачи (II8),(II9), отметив лишь, что при требовании достаточной гладкости от $f(x)$ и ∂G такое совпадение действительно имеет место.

Пусть $Q:\{G\times(0<t<T)\}$ – введенная в предыдущем параграфе область пространства E_{n+1}, а G – ограниченная область пространства E_n. Обозначим через $\{f_k(x,t)\}$ ограниченную последовательность заданных в Q функций, пределом которой в $L_2(G)$ при любом значении t, $0\le t\le T$, является функция $f(x,t)$. Предположим, что существует единственное классическое решение $u_k(x,t)$ основной однородной смешанной задачи

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x\in G,\ u\big|_S=0,\ S:\{\partial G\times(0\le t\le T)\} \tag{123}$$

в области Q для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f(x,t) \tag{124}$$

каждый раз, когда $f(x,t)=f_k(x,t)$, $k=1,2,\ldots$ Будем считать, что граница ∂Q области Q и функции $u_k(x,t)$ в $Q\cup\partial Q$ обладают степенями гладкости, достаточными для законности использованных ниже интегральных замен.

По приведенному выше определению обобщенным решением задачи (I23),(I24) называется функция $u(x,t)$, являющаяся пределом последовательности $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при любом значении t, $0\le t\le T$. Докажем существование таким образом определенного обобщенного решения задачи (I23), (I24).

С этой целью введем в рассмотрение так называемый интеграл Энергии

$$E_k^2(t) = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right] dx. \tag{125}$$

Легко видеть, что

$$E_k^2(t) = \int_0^t dt_1 \int_G \frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1} f_k(x,t_1)\, dx. \tag{126}$$

Действительно, для $u_k(x,t)$ имеют место тождества

$$u_k(x,0) = u_{kt}(x,0) = 0, \quad x \in G, \quad u_k\big|_S = 0, \tag{123}$$

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t_1)}{\partial t_1^2} - \Delta u_k(x,t_1) = f_k(x,t_1), \quad (x,t) \in Q. \tag{124}$$

Умножая обе части (124) на $\frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}$ и интегрируя по области $Q: \{G \times (0<t<T)\}$ получаем

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1) \frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}\, dx =$$

$$= \int_0^t dt_1 \int_G \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + \nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] dx, \tag{127}$$

где оператор ∇ берется по пространственным переменным $x_1, \dots x_n$.

После перестановки порядка интегрирования и применения формулы (60) равенство (127) принимает вид

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1) \frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}\, dx = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]_{t_1=0}^{t_1=t} dx$$

$$- \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x}\, dS_x, \tag{128}$$

где N_x – единичный вектор внешней нормали к ∂G в точке x.

В силу первых двух из условий (123) при $t_1=0$ имеем

$$\frac{\partial u_k}{\partial t_1} = 0, \quad \nabla u_k = 0, \quad x \in G, \tag{129}$$

а на основании последнего из этих же условий приходим к заключению, что

$$\int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = \int_S \frac{\partial u_k}{\partial t_1} \frac{\partial u_k}{\partial N_x} dS_x = 0. \qquad (130)$$

С учетом (129) и (130) равенство (128) переходит в равенство (126).

В результате дифференцирования по t из (126) получаем

$$2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t) = \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} f_k(x,t)\,dx,$$

откуда в силу неравенства Шварца приходим к оценке

$$2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t) \leq \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \, \| f_k \|, \qquad (131)$$

где

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|^2 = \int_G \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right)^2 dx, \quad \| f_k \|^2 = \int_G (f_k)^2 dx.$$

Из (125) непосредственно получается оценка

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{2}\, E_k(t). \qquad (132)$$

На основании (132) из (131) имеем

$$\frac{dE_k(t)}{dt} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| f_k \|.$$

Отсюда в результате интегрирования следует оценка

$$E_k(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \| f_k(t_1) \| \, dt_1, \qquad (133)$$

ибо $E_k(0)=0$ в силу первых двух из условий (123) и равенства (125).

С учетом (133) оценка (132) принимает вид

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \leq \int_0^t \| f_k(t_1) \| \, dt_1 . \qquad (134)$$

Так как для любого t, $0 \le t \le T$,

$$\|u_k(t)\|^2 = \int_G u_k^2 dx , \tag{135}$$

то

$$2\|u_k\| \cdot \frac{d}{dt}\|u_k\| = 2\int_G u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} dx \le 2\|u_k\| \cdot \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| . \tag{136}$$

Пользуясь оценкой (134) из (136) получаем

$$\frac{d}{dt}\|u_k\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\| dt_1$$

или, учитывая то обстоятельство, что $\|u_k(0)\|=0$ в силу первого из условий (123) и (135),

$$\|u_k(t)\| \le \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \|f_k(t_2)\| dt_2 = \int_0^t (t-t_1)\|f_k(t_1)\| dt_1 \tag{137}$$

Отсюда, в частности, в силу ограниченности $\{f_k(x,t)\}$ следует ограниченность последовательности $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при любом t, $0 \le t \le T$.

Поскольку последовательность $\{f_k(x,t)\}$ при любом t, $0 \le t \le T$ сходится в $L_2(G)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что

$$\| f_{N+p} - f_N \| < \varepsilon \tag{138}$$

при любом $p \geq 0$.

На основании (138) из (137) получаем

$$\| u_{N+p}(x,t) - u_N(x,t) \| \le \frac{\varepsilon}{2} t^2 \tag{139}$$

для любого t, $0 \le t \le T$.

Оценка (139) означает, что последовательность $\{u_k(x,t)\}$ для любого t, $0 \le t \le T$, является фундаментальной в $L_2(G)$ Следовательно, в силу известной из функционального анализа теоремы Фишера-Рисса эта последовательность в $L_2(G)$ сходится и ее пределом в $L_2(G)$ для любого t, $0 \le t \le T$, является вполне определенная функция $u(x,t)$. По данному выше определению $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (I23),(I26). Единственность решения очевидна.

Пусть, теперь,

$$\{f_k(x,t)\}, \quad k=1,2,\dots \tag{I40}$$

является равномерно сходящейся последовательностью непрерывных в $Q\cup\partial Q$ функций, предел которой обозначим через $f(x,t)$.

Будем считать, что для любого k существует единственственное классическое решение $u_k(x,t)$ первой краевой задачи

$$u_k(x,0)=0, \quad x\in G, \quad u_k\Big|_S=0 \tag{I41}$$

для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}-\Delta u_k=f_k(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{I42}$$

непрерывное в $Q\cup\partial Q$.

Покажем, что последовательность

$$\{u_k(x,t)\}, \quad k=1,2,\dots \tag{I43}$$

равномерно сходится в $Q\cup\partial Q$ и, следовательно, ее предел $u(x,t)$ является обобщенным решением первой краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad u(x,0)=0, \; x\in G, \; u\Big|_S=0$$

в приведенной в конце предыдущего параграфа постановке.

Прежде всего заметим, что для решения $u_k(x,t)$ задачи (I41),(I42) в каждой точке $(x,t)\in Q\cup\partial Q$ имеет место оценка

$$|u_k(x,t)|\leqslant TM_k, \tag{I44}$$

если только

$$\max_{(x,t)\in Q\cup\partial Q}|f_k(x,t)|<M_k. \tag{I45}$$

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, допустим обратное и сперва предположим, что существует точка (x_0, t_0), лежащая в области Q или на верхнем ее основании, в которой

$$u_K(x_0, t_0) > TM_K. \tag{146}$$

Это допущение приводит к противоречию. Действительно, в силу (146) функция

$$v(x,t) = u_K(x,t) + M_K(T-t)$$

обязательно достигает своего максимума в $Q \cup \partial Q$ в некоторой точке (x,t), лежащей в области Q или на ее верхнем основании, а это невозможно, ибо в точке (x,t) в силу (145)

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -f_K(x,t) + M_K > 0.$$

Допущение $u_K(x,t) < -TM_K$ также приводит к противоречию.

Так как последовательность (140) является фундаментальной, для любого $N > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $(x,t) \in Q \cup \partial Q$ и положительном p

$$|f_{N+p} - f_N| < \varepsilon. \tag{147}$$

Ввиду того, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(u_{N+p} - u_n) = f_{N+p} - f_N$$

и

$$u_{N+p}(x,0) - u_N(x,0) = 0, \; x \in G,$$

в силу доказанного выше утверждения и оценки (147) следует, что для всех $(x,t) \in Q \cup \partial Q$ при произвольном $p > 0$ имеет место оценка

$$|u_{n+p}(x,t) - u_N(x,t)| \leq T\varepsilon,$$

т.е. последовательность (I43) является фундаментальной в пространстве $C^{0,0}(Q \cup \partial Q)$. Следовательно, эта последовательность сходится равномерно, и ее предел $u(x,t)$ является непрерывной функцией, которая по определению представляет собой обобщенное решение задачи (I4I),(I42).

Приведенное здесь рассуждение не позволяет судить о дифференцируемости функции $u(x,t)$.

При изучении вопроса о гладкости обобщенных решений гиперболических и параболических уравнений возникают трудности, которые не всегда удается преодолеть.

Глава V

Некоторые классы нелинейных уравнений в частных производных

§I Общие замечания

Во всех предыдущих главах, кроме первой /вводной/, речь шла исключительно о линейных уравнениях в частных производных и о линейных задачах /Дирихле, Неймана, Коши, характеристической и смешанной/ для них. Выписанные в первой главе основные уравнения гидромеханики /уравнения Навье-Стокса /24/ и уравнение неразрывности /25//, также как уравнения общей теории относительности /уравнения Ейнштейна /32// являются нелинейными уравнениями в частных производных. Они переходят в линейные уравнения при весьма сильных не всегда оправданных допущениях. В указанной же главе были сформулированы предположения, на основании которых были выведены линейные уравнения, описывающие распространение звука, передачу тепла, равновесное /статическое/ напряженное состояние упругой среды, электростатическое поле, а также линейные задачи / Коши, Дирихле, Неймана и разные смешанные/ для этих уравнений. Порой обстоятельства вынуждают вводить в рассмотрение и нелинейные задачи. Так, например, в §4 гл. II было показано, что плоское стационарное безвихревое движение невязкой сжимаемой среды в терминах потенциала скорости $\varphi(x_1,x_2)$ и функции тока $\psi(x_1,x_2)$ описывается системой нелинейных уравнений в частных производных первого порядка /38/.

Для системы /38/ на физической плоскости ставятся задачи двух типов: с фиксированной границей и со свободной границей. Пусть $\mathcal{D}_0$ – бесконечная область плоскости переменных x_1, x_2, представляющая собой: а/ либо внешность замкнутого кусочно-гладкого жорданова контура S_0 /этот случай возникает при изучении обтекания крыла воздушным потоком /, б/ либо часть этой плоскости, лежащую по одну сторону от кривой S_0, уходящей обоими концами в бесконечность, в/ либо полосу с двумя граничными компонентами S_1, S_2.

Простейшая задача с фиксированной границей заключается в требовании определения в области $\mathcal{D}_0$ решения φ, ψ системы /38/, когда известно, что через S_0 нет протекания, т.е.

$$\frac{\partial \varphi(x_1,x_2)}{\partial \nu}\Big|_{S_0} = 0, \quad (x_1,x_2) \in S_0, \qquad (1)$$

где ν – нормаль к S_0 в точке (x_1, x_2). В силу /38/ из /I/ следует, что

$$\psi(x_1,x_2) = Const, \quad (x_1,x_2) \in S_0. \qquad (2)$$

Наряду с условием /I/ или /2/ предполагается, что на бесконечности задано значение модуля скорости

$$|q| = \frac{\rho_0}{\rho}|\nabla\psi|$$

и, кроме того, в случае а/ имеет место равенство

$$\int_C d\varphi = 0$$

где интеграл берется по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру C, лежащему в $\mathcal{D}_0$ и окружающему S_0.

Задачи /I/ и /2/ очевидно линейны.

Может оказаться, что наперед известен только определенный участок S_1 границы $\partial\mathcal{D}_0$ движущейся части $\mathcal{D}_0$ сжимаемой среды, а остальной участок S_2, $S_1 \cup S_2 = \partial\mathcal{D}_0$, должен быть найден вместе с решением системы /38/. Требование отыскания участка S_2 границы области $\mathcal{D}_0$ и решения φ, ψ системы /38/ в области $\mathcal{D}_0$ по краевым условиям

$$\psi(x_1,x_2) = Const, \ (x_1,x_2) \in S_0, \quad q = Const, \ (x_1,x_2) \in S_2$$

называется задачей со свободной границей.

При помощи замены независимых переменных, порождаемой из равенства /4I/ /преобразование годографа/, нелинейная система /38/ хотя и переходит в линейную систему /45/, но для того, чтобы иметь формулы перехода $x_1 = \varphi(q,\vartheta)$, $x_2 = \psi(q,\vartheta)$, мы должны знать заранее образы области $\mathcal{D}_0$ и ее границы S_0 на плоскости годографа. Поэтому линейные краевые условия /I/ и /2/ для функций φ и ψ порождают нелинейные краевые условия для решений $u_1(v,\vartheta)$ и

$u_2(v,\vartheta)$ системы /45/ на образе $\partial \mathcal{D}_0$ и, стало быть, нам приходится иметь дело с нелинейной краевой задачей для системы /45/ или для уравнения Чаплыгина

$$k(v)\,u_{\vartheta\vartheta} + u_{vv} = 0, \quad u = u_2 \qquad /3/$$

в области плоскости переменных v, ϑ, представляющей собой образ области $\mathcal{D}_0$ при преобразовании годографа.

Далеко не каждому решению $u(\vartheta, v)$ уравнения /3/ будет соответствовать реальное движение на физической плоскости. В этом отношении особенно большие трудности возникают при исследовании трансзвукового движения, ибо области $\mathcal{D}_0$, занятой движущей средой, должна соответствовать область $\mathcal{D}$ на плоскости переменных ϑ, v, пересечения которой как с верхней полуплоскостью $v > 0$, так и с нижней полуплоскостью $v < 0$ не являются пустыми /ϑ и v интерпретируются как декартовые ортогональные координаты/. В области $\mathcal{D}$ уравнение /3/ принадлежит к классу уравнений смешанного типа. При $k(v) = |v|^m \operatorname{sgn} v$, где m – неотрицательное число, уравнение /3/ принято называть модельным уравнением смешанного типа.

Модельные уравнения смешанного типа в настоящее время достаточно хорошо исследованы. В порядке краткого обзора остановимся на одном классе краевых задач для этих уравнений.

При $v < 0$ модельное уравнение /3/ гиперболично, причем оно имеет два семейства характеристических кривых, определяемых уравнениями

$$d\vartheta \pm \sqrt{-k(v)}\, dv = 0.$$

Пусть $\mathcal{D}$ – конечная односвязная область плоскости переменных ϑ, v, ограниченная простой дугой Жордана σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, лежащей в верхней полуплоскости $v > 0$, и отрезками AC и BC характеристик разных семейств уравнения /3/, выходящими из фиксированной точки $C(\vartheta_0, v_0)$ нижней полуплоскости $v < 0$.

Задача определения регулярного в области $\mathcal{D}$ решения $u(\vartheta, v)$ уравнения /3/ по заданным его значениям на σ и на одном из характеристических отрезков AC или BC носит название задачи Трикоми. Когда носителем данных вместо AC / или BC / берется кривая γ, лежащая в характеристическом треугольнике ACB, монотонно опускающаяся вниз и вогнутая относительно оси $v=0$, соответствующую задачу принято называть общей смешанной задачей.

Сформулированные задачи являются линейными. Даже при наличии решений этих задач изучение вопроса существования реального движения на физической плоскости сталкивается с принципиальными трудностями. Выяснение роли задачи Трикоми и ее разных обобщений при исследовании рассматриваемой гидромеханической задачи до сих пор является предметом глубоких размышлений.

Ниже речь пойдет о некоторых классах нелинейных уравнений в частных производных и простейших классических задачах, правильно /корректно/ поставленных для них.

§ 2. Уравнения Коши-Ковалевской

Как и в § I гл. II, будем считать, что равенство

$$F(x,\dots,p_{i_1\dots i_n},\dots)=0, \qquad /4/$$

где

$$\dots_{i_n}=\left(p^1_{i_1\dots i_n},\dots,p^N_{i_1\dots i_n}\right)=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}},\ \sum_{j=1}^{n} i_j=k,\ k=0,\dots,m,$$

представляет собой систему N уравнений в частных производных с N неизвестными функциями $(u_1,\dots,u_N)=u$, причем порядок каждого уравнения равен m, $m\geq 1$.

Дополнительно будем предполагать, что функции F_i, $i=1,\dots,N$ непрерывны относительно всех своих аргументов в окрестности их фиксированных значений x_0, $p^0_{i_1\dots i_n}$, непрерывно дифференцируемы относительно $p_{m0\dots0}=\left(p^1_{m0\dots0},\dots,p^N_{m0\dots0}\right)$ и функциональный детерминант

$$\det\left\|\frac{\partial F_l}{\partial p^j_{m0\dots0}}\right\|\neq 0,\ j,l=1,\dots,N. \qquad /5/$$

Тогда в силу известной теоремы о неявных функциях систему /4/ можно записать в виде

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1{}^m} = f\left(x,\dots,\frac{\partial u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}},\dots\right), \qquad /6/$$

где заданный N -мерный вектор $f=(f_1,\dots,f_N)$ уже не зависит от $\frac{\partial^m u}{\partial x_1{}^m}$.

Систему /6/ принято называть системой Коши-Ковалевской. Очевидно, что далеко не каждая система /4/ относится к типу систем Коши-Ковалевской. Например для линейной системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0 \qquad /7/$$

условие /5/ не выполнено и, стало быть, она не является системой Коши-Ковалевской в предложенной записи. Однако, в результате неособой замены независимых переменных $x_1+x_2=y_1$, $x_1-x_2=y_2$ система /7/ переходит в систему Коши-Ковалевской

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=-\frac{\partial v_1}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y_1}=\frac{\partial v_2}{\partial y_2}, \quad v_k=u_k\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right), k=1,2 \qquad /8/$$

в переменных y_1, y_2.

Пусть в определенной области G гиперплоскости $x_1=0$ евклидова пространства E_n точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1,\dots,x_n$ заданы достаточно гладкие N-мерные векторы

$$\varphi^{(k)}(x_2,\dots,x_n),\ k=0,\dots,m-1.$$

Задача отыскания регулярного в некоторой n -мерной окрестности G решения $u=(u_1,\dots,u_N)$ системы /6/, удовлетворяющего условиям

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_1{}^k}\right|_{x_1=c}=\varphi^{(k)}(x_2,\dots,x_n),\ k=0,\dots,m-1,\ c=\mathrm{const}, \qquad /9/$$

называется задачей Коши. Когда переменная x_1 выступает в роли времени, условия /9/ принято называть начальными условиями.

В главе II характеристическая форма $K(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, соответствующая системе /4/, была определена по формуле /2/. В области D_0 пространства E_n, в которой задана система /4/, рассмотрим $(n-1)$ - мерную поверхность S, записанную в виде $\Phi(x_1,\dots,x_n)=0$. Как и в § I гл. IУ будем говорить, что

S является характеристической поверхностью для системы /4/, если в каждой ее точке x выполняется равенство $k(\phi_{x_1},\dots,\phi_{x_n}) = 0$. Очевидно, что носитель данных $x_1 = C$ в задаче Коши /9/ не может быть характеристической поверхностью для системы /5/ настоящего параграфа даже тогда, когда эта система имеет действительные характеристические поверхности.

Введением новых неизвестных функций система /6/ может быть приведена к системе Коши-Ковалевской первого порядка

$$v_{x_1} = f(x, v, p_{i_1\dots i_n}) = 0, \qquad /10/$$

$$p_{i_1\dots i_n} = (p^1_{i_1\dots i_n},\dots,p^{N_1}_{i_1\dots i_n}) = \frac{\partial v}{\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}},\ i_1 = 0,\ \sum_{j=2}^{n} i_j = 1,$$

а начальные условия /9/ - к начальным условиям

$$v(0, x_2,\dots,x_n) = \varphi(x_2,\dots,x_n), \qquad /11/$$

где f, φ - заданные, а v - искомый N_1 - мерные векторы, $N_1 > N$.

Более того, системе /10/ можно придать вид квазилинейной системы. Мы здесь покажем, как это делается в случае, когда $N=1$, $m=2$ и $n=2$, т.е. на примере одного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$u_{x_1x_1} = f(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}), \qquad /12/$$

$$u(0, x_2) = \varphi^{(0)}(x_2),\ u_{x_1}(0, x_2) = \varphi^{(1)}(x_2). \qquad /13/$$

Примем обозначения

$$u_1 = u(x_1, x_2),\ u_{1x_1} = u_2,\ u_{1x_2} = u_3. \qquad /14/$$

Из последних двух равенств / 14/ имеем

$$u_{2x_2} = u_{3x_1}. \qquad /15/$$

Из /12/, /14/, и /15/ следует, что u_1, u_2, u_3 являются решениями системы Коши-Ковалевской

$$u_{1x_1} = u_2,\ u_{3x_1} = {}^{-}_{+}u_{2x_2},\ u_{2x_1} = f(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_{2x_2}, u_{3x_2}), \qquad /16/$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$u_1(0,x_2)=u(0,x_2)=\varphi^{(0)}(x_2),$$
$$u_2(0,x_2)=u_{1x_1}\Big|_{x_1=0}=u_{x_1}\Big|_{x_1=0}=\varphi^{(1)}(x_2),$$
$$u_3(0,x_2)=u_{1x_2}\Big|_{x_1=0}=u_{x_2}\Big|_{x_1=0}=\frac{d}{dx_2}\varphi^{(0)}(x_2). \qquad /17/$$

Вводя три новые функции

$$u_4=u_{2x_2},\ u_5=u_{3x_2},\ u_6=u_{2x_1} \qquad /18/$$

на основании /15/,/16/ и /18/ заключаем, что функции $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ должны составлять решение системы Коши-Ковалевской

$$u_{1x_1}=u_2,\ u_{2x_1}=u_6,\ u_{3x_1}=u_4,\ u_{4x_1}=u_{6x_2},$$
$$u_{5x_1}=u_{4x_2},\ u_{6x_1}=f_{x_1}+\sum_{\ell=1}^{5}f_{u_\ell}\,u_{\ell x_1}, \qquad /19/$$

где

$$u_6=f(x_1,x_2,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5). \qquad /20/$$

В силу /18/ и /20/ эти же функции должны удовлетворять наряду с /17/ еще и начальным условиям

$$u_4(0,x_2)=u_2(0,x_2)_{x_2}=\varphi^{(1)}(x_2)_{x_2},\ u_5(0,x_2)=u_3(0,x_2)_{x_2}=$$
$$=\varphi^{(0)}(x_2)_{x_2x_2},\ u_6(0,x_2)=f(0,x_2,\varphi^{(0)},\varphi^{(1)},\varphi^{(0)}_{x_2},\varphi^{(1)}_{x_2},\varphi^{(0)}_{x_2x_2}). \qquad /21/$$

Следовательно, задача /12/,/13/ редуцирована к задаче Коши /17/,/21/ для квазилинейной системы Коши-Ковалевской /19/.

В задачи /12/,/13/ в равной мере, как и в задачах /16/, /17/ и /19/,/17/,/21/, носителем начальных данных является интервал G прямой $x_1=0$. Когда G является интервалом прямой $x_1=x_1^0$, то заменой независимого переменного $x_1=t+x_1^0$ добьемся того, что носитель данных будет лежать на прямой $t=0$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что в условиях /13/ начальные функции $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ тождественно равны нулю. Поэтому задачу /6/,/8/ естественно исследовать в следующей постановке: найти решение $u=(u_1,\dots,u_N)$ системы Коши-Ковалевской

$$u_t = f(x,t,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}),$$

удовлетворяющее начальному условию /22/

$$u(x,0)=0, \qquad /23/$$

где f - действительный N - мерный вектор, заданный в $(n+1)(N+1)$ -мерной области $\mathcal{D}_{(n+1)(N+1)}$ пространства переменных $x_1,\ldots,x_n$, t, u, $u_{x_1},\ldots,u_{x_n}$, а u -действительный N - мерный вектор, искомый в некоторой $(n+1)$ - мерной окрестности $\mathcal{D}_n$ пространства E_{n+1} переменных $x_1,\ldots,x_n,t$. Здесь через $\mathcal{D}_n$ обозначена область пространства E_n переменных $x_1,\ldots,x_n$.

В приложениях задачи /22/,/23/ часто переменное t выступает в роли времени, а $x_1,\ldots,x_n$ — в роли пространственных переменных.

Задачу /22/,/23/ будем называть задачей Коши с аналитическими данными, если вблизи каждой точки области $\mathcal{D}_{(n+1)(N+1)}$ своего задания вектор f может быть представлен в виде суммы степенного ряда с неотрицательными целыми показателями

$$f=\sum A_{kmsl_1\ldots l_n}(x-x_0)^k(t-t_0)^m(u-u_0)^s(p_1-p_1^0)^{l_1}\ldots(p_n-p_n^0)^{l_n},$$

где

$$a_k=a_{k_1\ldots k_n},\quad \sum_{j=1}^{n}k_j=k,\quad (x-x_0)^k=(x_1-x_1^0)^{k_1}\ldots(x_n-x_n^0)^{k_n},$$

$$A_{kmsl_1\ldots l_n}=A_{k_1\ldots k_n m s_1\ldots s_n, l_{11}\ldots l_{1N}\ldots l_{n1}\ldots l_{nN}},$$

$$\sum_{j=1}^{nN}s_j=s,\quad \sum_{j=1}^{nN}l_{ij}=l_i,\ i=1,\ldots,n.$$

Справедливо следует важное утверждение, известное под названием теоремы Коши-Ковалевской: для каждой точки $x^0\in\mathcal{D}_n$ имеется $(n+1)$ -мерная окрестность изменения переменных x,t, в которой существует и притом единственное аналитическое решение $u(x,t)$ задачи Коши /22/,/23/ с аналитическими данными.

В доказательстве теоремы Коши-Ковалевской обычно используются некоторые хорошо известные понятия и факты из теории аналитических функций действительных переменных.

Пусть $f(y),\ y=(y_1,\dots,y_p)$, – аналитическая в некоторой p -мерной области D_p переменных $y_1,\dots,y_p$ функция. Если $y^*=(y_1^*,\dots,y_p^*)$, $y_j^*\neq y_j^0,\ j=1,\dots,p$, является точкой абсолютной сходимости степенного ряда

$$f(y)=\sum a_k(y-y_0)^k, \qquad /24/$$

$$a_k=a_{k_1\dots k_p},\ \sum_{j=1}^{p}k_j=k,\ k=0,1,\dots,\ y^0=(y_1^0,\dots,y_p^0),$$

$$(y-y^0)^k=(y_1-y_1^0)^{k_1}\cdots(y_p-y_p^0)^{k_p},$$

то существует положительное число M такое, что для всех индексов k имеют место оценки

$$|a_k|\leq\frac{M}{\prod_{j=1}^{p}|y_j^*-y_j^0|^{k_j}},\ \sum_{j=1}^{p}k_j=k. \qquad /25/$$

Говорят, что аналитическая в D_p функция $\varphi(y)$ является мажорантой функции $f(y)$, если все коэффициенты разложения

$$\varphi(y)=\sum b_k(y-y^0)^k \qquad /26/$$

положительны и $|a_k|\leq b_k$ для всех значений индекса k.

На основании оценок /25/ заключаем, что в качестве мажоранты представленной формулой /24/ функции $f(y)$ может служить функция

$$\varphi(y)=M\sum\frac{(y-y^0)^k}{\prod_{j=1}^{p}|y_j^*-y_j^0|^{k_j}}=\frac{M}{\prod_{j=1}^{p}\left(1-\frac{y_j-y_j^0}{|y_j^*-y_j^0|}\right)} \qquad /27/$$

при $|y_j-y_j^0|<|y_j^*-y_j^0|,\ j=1,\dots,p$.

Наряду с /27/ мажорантой $f(y)$ является и функция

$$\varphi_1(y)=\frac{M}{1-\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0)},$$

где $a=\min_{1\leq j\leq p}|y_j^*-y_j^0|$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что при $\sum_{j=1}^{p}|y_j^*-y_j^0|<a$ имеем

$$\varphi_1(y)=M\sum_{\ell=0}\frac{1}{a^\ell}\left[\sum_{j=1}(y_j-y_j^0)\right]=$$

$$=M\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{a^\ell}\sum\frac{\ell!}{k_1!\dots k_p!}\prod_{s=1}^{p}(y_s-y_s^0)^{k_s},\ \ell=\sum_{s=1}^{p}k_s \qquad /28/$$

и, кроме того,

$$\ell!\geqslant\prod_{s=1}^{p}k_s!,\quad \frac{1}{a^\ell}\geqslant\frac{1}{\prod_{s=1}^{p}|y_s^*-y_s^0|^{k_s}}.$$

Очевидно, что $\varphi_1(y)$ остается мажорантой $f(y)$, если в выражении /23/ вместо $y_1-y_1^0$ написано $\frac{1}{\alpha}(y_1-y_1^0)$, $0<\alpha<1$, $\alpha=\mathrm{const}$.

При отсутствии пространственных переменных $x_1,\dots,x_n$ задача /22/, /23/ представляет собой задачу Коши

$$u(0)=0 \qquad /29/$$

для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt}=f(t,u) \qquad /30/$$

с аналитической правой частью $f(t,u)$.

В окрестности точки $(0,0)$ пространства E_2 переменных t,u представим функцию $f(t,u)$ в виде суммы степенного ряда

$$f(t,u)=\sum_{k,\ell=0}^{\infty}a_{k\ell}t^k u^\ell. \qquad /31/$$

Для простоты записи будем считать, что радиусы сходимости ряда /31/ как по t, так и по u равны единице.

Построим аналитическую в окрестности точки $t=0$ функцию $u(t)$, являющуюся решением задачи /29/, /30/.

Допуская ее существование /впоследствии она будет найдена/, при помощи последовательного дифференцирования тождества /30/ с учетом /29/ мы можем вычислить в точке $t=0$ значения всех производных $\frac{d^n u}{dt^n}$

$$\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)_0=\omega_n(a_{00},\dots,a_{ij},\dots),\ n=1,\dots;\ i+j\leq n-1, \qquad /32/$$

где ω_n представляют собой полиномы своих аргументов с положительными коэфициентами. Легко видеть, что радиус сходимости степенного ряда

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)_0 t^n \qquad /33/$$

отличен от нуля.

Действительно, в силу сходимости ряда /31/ существует положительное число $\mathcal{M}$ такое, что

$$a_{kl}\leq\frac{\mathcal{M}}{2},\ k,l=0,1\ldots \qquad /34/$$

Поэтому, в качестве мажоранты для $f(t,u)$ можно брать функцию

$$F(t,u)=\frac{\mathcal{M}}{2(1-t)(1-u)}. \qquad /35/$$

Обозначим через $U(t)$ - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dt}=F(t,U), \qquad /36/$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(0)=0. \qquad /37/$$

Применяя метод разделения переменных, находим единственное решение уравнения /36/

$$U=1-\sqrt{1+\mathcal{M}\log(1-t)}, \qquad /38/$$

удовлетворяющее условию /37/. Под $\log(1-t)$ понимается ветвь этой функции, обращающаяся в нуль при $t=0$.

Так как выражение $1+\mathcal{M}\log(1-t)$ обращается в нуль при $t=1-e^{-1/\mathcal{M}}$ и оно по модулю меньше единицы при

$$|t|<1-e^{-1/\mathcal{M}},$$

то представленная по формуле /38/ функция является аналитической относительно t и u с радиусом сходимости, равным, по меньшей мере, $1-e^{-1/\mathcal{M}}$. Таким образом $U(t)$ является мажорантой $u(t)$ и, стало быть, эту последнюю можно представить в виде суммы своего ряда Тейлора /33/ с радиусом сходимости не меньше чем $1-e^{-1/\mathcal{M}}$. Следовательно, функция $u(t)$, представленная в виде суммы степенного ряда /33/ с коэффициентами, вычисленными по формулам /32/, представляет собой решение задачи /29/,/30/. Среди аналитических решений оно очевидно единственно.

Переходим к доказательству теоремы Коши-Ковалевской в приведенной выше формулировке, причем ограничимся рассмотрением случая, когда /22/ представляет собой одно уравнение с одной неизвестной функцией $u(x,t)$ с аналитической правой частью f в окрестности нулевых значений всех ее аргументов.

В указанной окрестности имеем

$$f(x,t,u,p_1,\dots,p_n)=\sum a_{kms l_1\dots l_n} x^k t^m u^s p_1^{l_1}\dots p_n^{l_n}, \qquad /39/$$

$$p_i=u_{x_i}, \; i=1,\dots,n.$$

Без ограничения общности будем считать, что $a_{00\dots0}=0$. Этого всегда можно добиться заменой искомой функции по формуле $u=a_{00\dots0}t+v$. Кроме того, как и выше будем предполагать, что радиусы сходимости ряда /39/ по всем переменным равны единице.

В качестве мажоранты функции f может служить функция

$$F=M\left\{\frac{1}{\left[1-\left(\frac{t}{\alpha}+u+\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right]\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_k\right)}-1\right\}, \qquad /40/$$

где M и α – некоторые положительные числа, причем $0<\alpha<1$.

В результате почленного дифференцирования тождества /22/ с учетом /23/ мы можем вычислить в точке $(x=0,t=0)$ частные производные всех порядков аналитического решения $u(x,t)$ задачи /22/,/23 и составить степенной ряд

$$u(x,t)=\sum b_{kl}x^k t^l. \qquad /41/$$

Мажорантой определенной по формуле /41/ функции $u(x,t)$ является решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F, \qquad /42/$$

удовлетворяющее условию

$$u(x,0)=0. \qquad /43/$$

Аналитическое вблизи точки $(x=0,t=0)$ решение $v(x,t)$ уравнения /42/ с положительными коэффициентами в его представлении в виде суммы степенного ряда будет мажорантой для аналитического решения $u(x,t)$ задачи /42/,/43/. Будем искать $v(x,t)$ в виде

$$v(x,t)=w(z), \qquad /44/$$

где

$$z=\frac{t}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n}x_k. \qquad /45/$$

Поскольку в силу /44/ и /45/ имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{\alpha}\frac{dw}{dz},\ \frac{\partial v}{\partial x_i}=\frac{dw}{dz},\ i=1,\dots,n,$$

на основании /40/ и /42/ заключаем, что функция $w(z)$ должна быть решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dw}{dz}=\mathcal{M}\left[\frac{1}{(1-z-w)\left(1-n\frac{dw}{dz}\right)}-1\right],$$

т.е.

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\mathcal{M}n\right)\frac{dw}{dz}=\frac{n}{\alpha}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\frac{\mathcal{M}}{1-z-w}-\mathcal{M}. \qquad /46/$$

Подбирая α так, чтобы число $\frac{1}{\alpha}-\mathcal{M}n$ было положительным, запишем уравнение /46/ в виде

$$\frac{dw}{dz}=\alpha^0\left(\frac{dw}{dz}\right)^2+\beta(z,w), \qquad /47/$$

где α^0 - положительное число, а $\beta(z,w)$ - сумма абсолютно сходящегося ряда

$$\beta(z,w)=\sum\beta_{k\ell}z^k w^\ell,\ \beta_{00}=0, \qquad /48/$$

с положительными коэффициентами.

Из двух значений $\frac{dw}{dz}$, удовлетворяющих равенству /47/, выберем то, которое обращается в нуль при $z=0,\ w=0$. Это означает, что $w(z)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\gamma(z,w),\ \gamma(0,0)=0, \qquad /49/$$

удовлетворяющего начальному условию

$$w(0)=0. \qquad /50/$$

Как уже было показано выше, аналитическое решение задачи /49/.

/50/ существует и оно представляется в виде суммы степенного ряда

$$w(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{d^k w}{dz^k}\right)_0 \frac{z^k}{k!}, \qquad /5I/$$

с отличным от нуля радиусом сходимости.

В положительности коэффициентов степенного ряда /5I/ легко убеждаемся при помощи последовательного дифференцирования равенства /47/ с учетом /49/,/50/.

Поскольку представленная формулой /5I/ функция w является мажорантой для $U(z,t)$ и, стало быть, для $u(x,t)$, степенной ряд /4I/ имеет положительные радиусы сходимости как по x, так и по t. Следовательно, сумма этого ряда является аналитическим решением задачи /22/,/23/ вблизи точки $(x=0, t=0)$.

Приведенное здесь доказательство существования в малом /вблизи данной точки/ аналитического решения задачи /22/,/23/ в случае одного /скалярного/ уравнения с аналитическими данными непосредственно обобщается на случай системы /с аналитическими данными/, причем единственность аналитического решения этой задачи следует из процесса его построения. При этом не имеет значения тип этой системы. Существенным является то обстоятельство, что носитель $x_1=0$ данных /23/ не является характеристикой для системы /22/. Для расщепленной системы /7/ прямая $x_1=Const$ является характеристикой и, как мы уже знаем /см. § I гл. I/, она не может быть носителем начальных данных. В записи же /8/ этой же системы прямая $y_1=x_1+x_2=Const$, очевидно, не является характеристикой.

Задача с начальными данными: $u(0,y)=0, u_x(0,y)=0$ для уравнения Монжа-Ампера

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=0 \qquad /52/$$

в качестве решений имеет функции $u_1=0, u_2=x^2$. Это уравнение, записанное в виде

$$u_{xx}=\frac{u_{xy}^2}{u_{yy}}$$

хотя и можно относить к типу уравнений Коши-Ковалевской, но его правая часть перестает быть аналитической функцией по u_{yy} вдоль

u_1 и u_2. К тому же, соответствующая уравнению /52/ характеристическая квадратичная форма $u_{yy}dx^2-2u_{xy}dxdy+u_{xx}dy^2$ при $u=u_1$ и $u=u_2$ параболически вырождается.

Единственность решения задачи /22/,/23/ можно показать и в классе неаналитических решений. Однако эта задача не всегда имеет неаналитические решения. В этом легко убеждаемся на примере системы Коши-Римана

$$u_t=v_x,\ v_t=-u_x,\ x+it=z, \qquad /53/$$

представляющей собой систему Коши-Ковалевской. В самом деле, допустим, что в области D плоскости переменных x,t, содержащей внутри себя отрезок ab оси $t=0$, существует регулярное решение $u(x,t)$ системы /53/, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ v(x,0)=0. \qquad /54/$$

Принимая во внимание второе из условий /54/, на основании принципа симметрии Римана-Шварца заключаем, что функция $u(x,t)+iv(x,t)=F(z)$ аналитична в области D, включая открытый отрезок ab, т.е. функция $\varphi(x)$ в первом из условий /54/ должна быть аналитической по переменному x. Следовательно, если наперед известно, что $\varphi(x)$ этим свойством не обладает, то задача /53/, /54/ не будет иметь решения.

Легко видеть также, что даже аналитические решения задачи /53/ /54/ могут оказаться неустойчивыми. Действительно, непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что функции

$$u_k(x,t)=\frac{1}{k^2}\operatorname{sh}kt\sin kx,\ v_k(x,t)=\frac{1}{k^2}\operatorname{ch}kt\cos kx$$

представляют собой аналитическое решение системы /53/, удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$u_k(x,0)=0,\ v_k(x,0)=\frac{1}{k^2}\cos kx, \qquad /55/$$

но оно не удовлетворяет требованию устойчивости, ибо при $k\to\infty$ во втором из условий /55/ имеем, что $\lim\limits_{k\to\infty}v_k(x,0)=0$, в то время как $u_k(x,t)$ и $v_k(x,t)$ при $k\to\infty$ не остаются даже ограниченными

§3 Начальная и характеристическая задачи Коши для некоторых классов квазилинейных гиперболических уравнений

Частным случаем системы Коши-Ковалевской /22/ является система

$$u_t + \lambda u_x = f(x,t,u), \qquad /56/$$

где $\lambda(x,t)$ - заданная действительная непрерывно дифференцируемая диагональная матрица с элементами $\lambda_k(x,t),\ k=1,\dots,N$,а действительный вектор $f=(f_1,\dots,f_N)$ задан в некоторой односвязной области изменения независимых переменных x,t и для всех значений искомого вектора $u=(u_1,\dots,u_N)$.

По данному в §4 гл.II определению система /56/ является нормально гиперболической. Для нее рассмотрим задачу Коши

$$u(x,0)=0, \quad x\in I, \qquad /57/$$

где носителем данных является отрезок I прямой $t=0$.

Эта задача в предыдущем параграфе была исследована при предположении, что f является аналитическим вектором относительно всех своих аргументов.

Семейство кривых C_k , $x_k = x_k(t),\ k=1,\dots,N$,на плоскости переменных x,t , определенных из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \lambda_k(x,t),\ k=1,\dots,N, \qquad /58/$$

называется семейством характеристических кривых системы /56/. Обозначим через E множество точек (x,t) плоскости переменных x,t , обладающих тем свойством, что все кривые характеристического пучка, выходящих из точки (x,t) в направлении прямой $t=0$, пересекаются с отрезком I . Обозначим через G область, содержащуюся в E и охватывающая I .

Поскольку в силу /58/ вдоль кривой C_k от точки $[\xi_k(x,t),0]$ до $(x,t)\in G$ для решения $u(x,t)$ системы /56/ имеют место тождества

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_k(x,t)\frac{\partial u_k}{\partial x},\ k=1,\dots,N,$$

равенству /56/ в силу /57/ можно придать вид

$$u(x,t)=\int_{[\xi_k(x,t),0]}^{(x,t)} f(\xi_k,\tau,u)\Big|_{\xi_k=\xi_k(\tau)} d\tau , \qquad /59/$$

где $[\xi_k(x,t),0]$ — точка пересечения характеристической кривой $\xi_k=\xi_k(\tau)$, выходящей из точки (x,t) с отрезком I.

Интегральный оператор T в правой части формулы /58/ каждому непрерывно дифференцируемому в области G вектору $u(x,t)$, удовлетворяющему условию /57/, ставит в соответствие непрерывно дифференцируемый в этой же области вектор $v(x,t)$, удовлетворяющий этому же условию.

Задача /56/,/57/ будет решена, если нам удастся найти неподвижную точку преобразования $v=Tu$, т.е. вектор $u(x,t)$, удовлетворяющий уравнению

$$u=Tu. \qquad /60/$$

Решение уравнения /60/ можно построить методом последовательных приближений. Действительно, потребуем дополнительно непрерывность по x,t и непрерывную дифференцируемость по $u_1,\dots,u_N$ всех компонент вектора f с конечной верхней гранью M для модулей $\left|\frac{\partial f}{\partial u_k}\right|, k=1,\dots,N$. За нулевое приближение уравнения /60/ примем вектор $u^{(0)}=0$, а последующие приближения определим по формулам

$$u^{(n)}=Tu^{(n-1)}.$$

Будем считать, что $t<h$, где h - положительная постоянная.

Для разности $u^{(2)}-u^{(1)}$ в силу теоремы конечных приращений имеем

$$|u^{(2)}(x,t)-u^{(1)}(x,t)|=\left|\int_{(\xi,0)}^{(x,t)}[f(\xi,\tau,u^{(1)})-f(\xi,\tau,0)]d\tau\right|\le$$

$$\le\int_{(\xi,0)}^{(x,t)}\left|\sum_{k=1}^{N}\tilde{f}_k^{(1)}u_k^{(1)}\right|d\tau ,$$

где $\tilde{f}_k^{(1)}$ - средние значения $\frac{\partial f}{\partial u_k^{(1)}}$

Повторением этого рассуждения находим, что для любого натурального n имеем место оценка

$$\left|u^{(n+1)}(x,t)-u^{(n)}(x,t)\right| \le \theta \left|u^{(n)}(x,t)-u^{(n-1)}(x,t)\right|, n=1,2,\dots, \qquad /61/$$

где $\theta = MNh$. При достаточно малом h можно считать, что $\theta<1$. Следовательно, последовательность $u^{(n)}, n=1,2,\dots$ равномерно сходится и ее предел $u(x,t)$ является решением уравнения /60/. Можно показать, что $u(x,t)$ имеет непрерывные производные по x и t, т.е. $u(x,t)$ представляет собой решение задачи /56/,/57/. Единственность решения очевидна.

Задача Коши

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0$$

для квазилинейного уравнения гиперболического типа

$$u_{xx}-u_{tt}=f(x,t,u_x,u_t)$$

в обозначениях $u_x=u_1$, $u_t=u_2$ приводится к системе вида /56/

$$u_{1t}-u_{2x}=0, \quad u_{2t}-u_{1x}=f(x,t,u_1,u_2)$$

с начальными условиями $u_1(x,0)=0$, $u_2(x,0)=0$. Следовательно, ее решение, по крайней мере в малом, существует и является единственным.

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{xy}=f(x,y,u,p,q), \qquad /62/$$

где f -заданная функция $x, y, u, p=u_x, q=u_y$.

Характеристиками уравнения /62/ являются прямые $x=\mathrm{const}$ и $y=\mathrm{const}$. Эти прямые очевидно не годятся насителями начальных данных Коши, для уравнения /62/, но они могут служить в качестве носителей данных характеристической задачи Коши или, как еще принято говорить, задачи Гурса.

Обозначим через $\mathcal{D}$ прямоугольную область плоскости переменных x, y, ограниченную прямыми $x=0, y=0, x=a, y=b$. Будем предполагать, что в правой части уравнения /62/ функция f подчинена требованиям : I/ она непрерывна относительно всех своих аргументов при $(x,y)\in D$ и

$$|u|<A_1,\ |p|<A_2,\ |q|<A_3, \qquad /63/$$

где A_1, A_2, A_3 – определенные положительные числа, и 2/ удовлетворяет условию Липшица по u, p, q, т.е. существуют положительные числа k_1, k_2, k_3 такие, что для любых $u', p', q', u'', p'', q''$, удовлетворяющих условиям /63/, при $(x,y)\in D$ имеет место оценка

$$|f(x,y,u',p',q')-f(x,y,u'',p''q'')|\le$$

$$\le k_1|u'-u''|+k_2|p'-p''|+k_3|q'-q''|. \qquad /64/$$

Под задачей Гурса для уравнения /62/ понимается требование определить непрерывное в $D\cup\partial D$ и регулярное в D его решение $u(x,y)$, когда наперед заданы значения $u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le a$, $u(0,y)=\psi(y),\ 0\le y\le b$, $\varphi(0)=\psi(0)$.

При непрерывной дифференцируемости функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ заменой $u(x,y)$ через $u(x,y)-\varphi(x)-\psi(y)+\varphi(0)$ добьемся того, что в условиях задачи Гурса

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le a,\ u(0,y)=0,\ 0\le y\le b. \qquad /65/$$

Для получения решения задачи /62/, /65/ опять будем пользоваться методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем $u_0(x,y)=0$, а за последующие приближения –

$$u_k(x,y)=\int_0^x d\xi\int_0^y f\left(\xi,\eta,u_{n-1},\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi},\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}\right)d\eta.\ n=1,2,\dots \qquad /66/$$

Обозначим через α, β положительные числа, не превышающие a, b соответственно, причем

$$\alpha\beta<\frac{A_1}{M},\ \alpha<\frac{A_3}{M},\ \beta<\frac{A_2}{M}, \qquad /67/$$

где M – максимум f, когда ее аргументы подчинены требованиям /63/.

В силу /67/ очевидно, что, когда $(x,y)\in D_1$, $D_1=$

$\{0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \beta\}$,определенные из формулы /66/ значения

$$U_n(x,y),\ \frac{\partial U_n(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial U_n(x,y)}{\partial y},\ n=1,2,\dots$$

удовлетворяют условиям /63/.

Покажем, что сумма $U(x,y)$ ряда

$$U_1(x,y)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[U_n(x,y)-U_{n-1}(x,y)\right] \qquad /68/$$

является решением задачи /62/,/65/, если f удовлетворяет требованиям I/ и 2/.

Примем обозначения

$$A=\max(A_1,A_2,A_3),\ K=\max(k_1,k_2,k_3),\ N=\max\left[3A,\ A\left(2+\frac{x+y}{n}\right)\right].$$

В силу /66/ и первого из неравенств /67/ имеем

$$|U_1(x,y)|\le A,\ |U_{1x}|\le A,\ |U_{1y}|\le A. \qquad /69/$$

Далее, пользуясь /64/ на основании /66/ и /69/ получаем

$$|U_2(x,y)-U_1(x,y)|\le\int_0^x d\xi\int_0^y\left(k_1|U_1|+k_2|U_{1\xi}|+k_3|U_{1\eta}|\right)d\eta\le$$

$$\le KN\frac{(x+y)^2}{2!},\ |(U_2-U_1)_x|\le KN(x+y),\ |(U_2-U_1)_y|\le KN(x+y).$$

Продолжая этот процесс, находим, что для любого натурального n

$$|U_n-U_{n-1}|\le K^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$|(U_n-U_{n-1})_x|\le K^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (70)$$

$$|(U_n-U_{n-1})_y|\le K^{n-1}N^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

На основании оценок /70/ заключаем, что ряд /68/ сходится абсолютно и равномерно и его почленно можно дифференцировать по x и y. Очевидно, что сумма этого ряда $U(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x,y)$.

На основании этого из /66/ предельным переходом убеждаемся, что $u(x,y)$ является решением задачи /62/,/65/. Эта задача не может иметь более одного решения. В самом деле, допуская существование двух ее решений

$$u(x,y)=\int_0^x d\xi\int_0^y f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\eta,\quad v(x,y)=\int_0^x d\xi\int_0^y f(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)\,d\eta$$

для разности $w=u-v$ получаем

$$w(x,y)=\int_0^x d\xi\int_0^y\left[f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)-f(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)\right]d\eta. \quad /71/$$

Отсюда в силу /64/ имеем

$$|w|\le kN\frac{(x+y)^2}{2!},\quad |w_x|\le kN(x+y),\quad |w_y|\le kN(x+y), \quad /72/$$

где k и N –введенные выше положительные постоянные.

На основании /72/ из /71/ снова получаем

$$|w|\le k^2N^2\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$|w_x|\le k^2N^2\frac{(x+y)^2}{2!},\quad |w_y|\le k^2N^2\frac{(x+y)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что для любого натурального n

$$|w(x,y)|\le k^nN^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что $w(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=v(x,y)$.

Единственность решения задачи /62/, /65/ может не иметь места, когда нарушено требование /64/. В этом легко убедиться на примере уравнения

$$u_{xy}=u^{1/2}, \quad (73)$$

которое имеет регулярные решения $u_1=0$, $u_2=\frac{1}{16}x^2y^2$, удовлетворяющие условиям /65/. Причиной этого факта является то обстоятельство, что правая часть f уравнения /73/ не удовлетворяет требованию /64/.

В дополнение к сказанному заметим, что для уравнения Монжа-Ампера

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=-1\,, \qquad /74/$$

гиперболического вдоль любого его решения, тоже может не иметь место единственность решения задачи /65/. Гиперболичность уравнения /74/ следует из положительности дискриминанта соответствующей ему характеристической формы $Q=u_{yy}dy^2+2u_{xy}dxdy+u_{xx}dx^2$ вдоль любого действительного решения $u(x,y)$. В частности вдоль решений $u_1=xy,\ u_2=-xy$ имеем $Q=\pm dxdy$. Следовательно, прямые $x=0$, $y=0$ являются характеристиками уравнения /74/, вдоль его решени $u_1, -u_1$, которые обращаются в нуль при $x=0,\ y=0$. Это означает, что задача Гурса /65/ для уравнения /74/ не поставлена корректно. Уравнение /74/, конечно, не относится к классу уравнений вида /62/.

§ 4. Задача Дирихле для нелинейных уравнений эллиптического типа

Будем считать, что нелинейное уравнение в частных производных второго порядка

$$F(x,\dots,p_{i_1\dots i_n},\dots)=0, \qquad /75/$$

$$x=(x_1,\dots,x_n\,,\ \sum_{j=1}^{n} i_j=k,\ k=0,1,2\,,\ p_{i_1\dots i_n}=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}},$$

задано для всех значений независимых переменных $x_1,\dots,x_n$ из области D евклидова пространства E_n точек x и для всех значений $p_{i_1\dots i_n}$.

Предположим, что уравнение /75/ равномерно эллиптично, т.е. существуют постоянные k_0 и k_1 одинакового знака такие, что для всех значений x и $p_{i_1\dots i_n}$ имеют место оценки

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\le k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \qquad /76/$$

где

$$Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\sum\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\dots i_n}}\lambda_1^{i_1}\dots\lambda_n^{i_n},\ \sum_{j=1}^{n} i_j=2 \qquad /77/$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\le 0 \qquad (78)$$

при положительной определенности формы Q и

$$\frac{\partial F}{\partial u} \geqslant 0$$

при ее отрицательной определенности.

Нетрудно видеть, что задача Дирихле

$$u(x) = \varphi(x),\ x \in S,\ u(x) \in C^{0,0}(\mathcal{D} \cup S) \qquad /79/$$

в области $\mathcal{D}$ с $(n-1)$-мерной границей S не может иметь более одного решения.

Действительно, для разности $u(x)$ двух решений u_1, u_2 задачи /75/, /79/ в силу теоремы о конечных приращениях имеем

$$F(x, \ldots, p^1_{i_1 \ldots i_n} \ldots) - F(x, \ldots, p^2_{i_1 \ldots i_n} \ldots) =$$

$$= \sum \tilde{f}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

где

$$p^m_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \quad m = 1, 2,$$

а $\tilde{f}_{i_1 \ldots i_n}$ - средние значения функций

$$f_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}},\ \sum_{j=1}^{n} i_j = k,\ k = 0, 1, 2. \qquad /80/$$

Следовательно, для $u(x)$ тождественно выполняется равенство

$$\sum \tilde{f}_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0,\ \sum_{j=1}^{n} i_j = k,\ k = 0, 1, 2. \qquad /81/$$

Повторяя рассуждение, приведенное в §8 гл. 3 при доказательстве единственности решения задачи Дирихле для равномерно эллиптического линейного уравнения второго порядка с учетом /78/, /79/, /80/, /81/ убеждаемся в том, что $u(x) = 0$, т.е. $u_1(x) = u_2(x)$ всюду в области $\mathcal{D}$.

Заметим, что при применении сформулированного утверждения об единственности решения задачи /75/, /79/ мы должны быть внимательны. Так, например, уравнение Монжа-Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4 \qquad /82/$$

эллиптично вдоль любого его решения, ибо дискриминант соответствующей ему характеристической формы /77/ равен -4. Вдоль решений $u_1 = x^2+y^2-1$ и $u_2 = -u_1$ эта форма имеет вид

$$Q(dx,dy) = u_{k\,yy}dy^2 + u_{k\,xx}dx^2 \;, k=1,2 \qquad /83/$$

и, стало быть, она положительно определена вдоль u_1 и отрицательно определена вдоль u_2. Тем не менее уравнение /82/ в круге $D: \{x^2+y^2<1\}$ имеет в качестве регулярных решений функции $u_1(x,y)$ и $-u_1(x,y)$, которые обращаются в нуль на окружности $S: \{x^2+y^2=1\}$. В рассматриваемом случае форма /77/ не сохраняет знак вдоль всевозможных решений $u(x,y)$ уравнения /82/.

При достаточно гладкой правой части условие /79/ можно сделать однородным. В случае уравнения

$$\Delta u = f(x,y,u), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad /84/$$

задача Дирихле

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S \qquad /85/$$

в области с достаточно гладкой границей непосредственно приводится к нелинейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$u(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_D G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta,u)\, d\xi\, d\eta = 0, \qquad /86/$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ - функция Грина задачи Дирихле для гармонических в области D функций.

Если последовательные приближения определить по формулам

$$u_0(x,y) = 0, \quad u_n(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_D G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta,u_{n-1})\, d\xi\, d\eta \qquad /87/$$

и потребовать ограниченность $/f_u/$, то можно показать, что в случае области D достаточно малой меры предел последовательности /87/ существует, и он дает решение задачи /84/,/85/. Когда же дополнительно известно, что $f_u \geq 0$, то доказывается, что при требовании ограниченности области D, последовательность /87/ равномерно сходится в D и ее предел $u(x,y)$ является искомым решением этой задачи.

§ 5. Задача Коши для одного класса квазилинейных уравнений первого порядка

В настоящем параграфе речь идет о квазилинейных уравнениях первого порядка вида

$$a \nabla u = 0, \qquad /88/$$

где ∇ - оператор градиента по переменным $x_1, \ldots, x_n$, $a(u) = [a_1(u), \ldots, a_n(u)]$ - заданный отличный от нуля n-мерный нерперывно дифференцируемый вектор, определенный для всех значений искомого решения $u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $\alpha(u) = [\alpha_1(u), \ldots, \alpha_n(u)]$ - произвольный непрерывно дифференцируемый вектор, ортогональный вектору $a(u)$

$$a(u)\alpha(u) = 0. \qquad /89/$$

Легко видеть, что, если непрерывно дифференцируемая функция $g(\alpha x)$ скалярного аргумента $\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ удовлетворяет условию

$$g'(\alpha x)(\alpha' x) \neq 1, \qquad /90/$$

то функция $u(x)$, определенная из тождества

$$u - g(\alpha x) = 0, \qquad /91/$$

является решением уравнения /88/.

Действительно, в силу /90/ существует неявная функция $u(x)$, определенная из тождества /91/, причем

$$\nabla u = \frac{g'(\alpha x)\alpha}{1 - g'(\alpha x)(\alpha' x)}. \qquad /92/$$

Подставляя выражение ∇u из /92/ в левую часть /88/, в силу /89/ убеждаемся в справедливости сформулированного утверждения.

В частности, решением уравнения

$$a(u)u_x - b(u)u_t = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \qquad /93/$$

где $a(u)$ и $b(u)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции, является функция $u(x,t)$, определенная из тождества

$$u - g(at + bx) = 0, \qquad /94/$$

где $g(\eta)$, $\eta = at + bx$; - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$(a't+b'x)g'\neq 1.$$

Уравнение

$$u_t+a(u)u_x=0, \qquad /95/$$

именуемое в приложениях кинематическим волновым уравнением, является частным случаем уравнения /93/ при $b\equiv -1$.

В силу /94/ наиболее общее решение уравнения /95/ получается из формулы /95/

$$u=F[x-a(u)t], \qquad /96/$$

где F - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$F'(\omega)a'(u)t\neq 1, \quad \omega=x-a(u)t.$$

Формула /96/ позволяет исчерпывающим образом исследовать задачу Коши в следующей постановке: найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения /95/ по начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), -\infty<x<\infty, \qquad /97/$$

где $u_0(x)$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Требуя, чтобы определенная по формуле /96/ функция $u(x,t)$ удовлетворяла начальному условию /97/, получаем, что для всех значений x, $-\infty<x<\infty$

$$F(x)=u_0(x),$$

т.е.

$$u(x,t)=u_0(x-at). \qquad /98/$$

Формула /98/ позволяет особенно прозрачно представить себе картину нарушения единственности и появления особенностей решения задачи /95/,/97/. В частности, при $a(u)=u$, $u_0=x$ решением этой задачи является функция

$$u(x,t)=\frac{x}{t+1}$$

всюду на плоскости переменных x,t кроме прямой $t=-1$, вдоль которой она претерпевает разрыв.

На нарушении единственности и появлении разрывов решения задачи /95/,/97/ может сказаться снижение порядка гладкости функций $a(u)$ и $u_0(x)$.

Для наглядности остановимся на двух примерах.

Сперва будем считать, что $a(u)=u,\ u_0(x)=\operatorname{sgn} x$, $-\infty<x<\infty$. В силу /96/ и /97/ имеем

$$u=\operatorname{sgn}(x-ut). \qquad /99/$$

Поэтому из обыкновенного дифференциального уравнения характеристик, соответствующих уравнению в частных производных /95/

$$dx-u\,dt=0 \qquad (100)$$

следует, что вдоль полученного из /99/ решения $u(x,t)$ задачи /96/,/97/ через каждую точку $(x_0,0)$ проходит по одной характеристической прямой $x+t=x_0$ при $x_0<0$ и $x-t=x_0$ при $x_0>0$. Прямые $x+t=0$ и $x-t=0$ любую окрестность $\mathcal{D}$ точки $(0,0)$ делят на четыре части, для которых примем обозначения $\mathcal{D}_{\operatorname{sgn}(t-x)}^{\operatorname{sgn}(t+x)}$. Очевидно, что в $\mathcal{D}_-^+$ и $\mathcal{D}_+^-$ имеется по одному решению $u(x,t)=1$ и $u(x,t)=-1$ задачи /96/,/97/, в $\mathcal{D}_+^+$ решения не существуют, а в $\mathcal{D}_-^-$ имеются два решения $u_1(x,t)=1$, $u_2(x,t)=-1$.

Пусть теперь $a(u)=u$, $u_0(x)=x\operatorname{sgn} x$, $-\infty<x<\infty$. Поскольку в силу /98/

$$u(x,t)=\omega\operatorname{sgn}\omega,\quad \omega=x-ut$$

сразу получаются решения

$$u_1(x,t)=x-u_1(x,t)t,\quad u_2(x,t)=-x+u_2(x,t)t$$

задачи /95/, /97/ в рассматриваемом случае. Т.е.

$$u_1(x,t)=\frac{x}{t+1},\quad u_2(x,t)=\frac{x}{t-1}. \qquad /101/$$

Подставляя полученные выражения /101/ в левую часть уравнения /100/ вместо $u(x,t)$, убеждаемся в том, что решениям $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ задачи /95/,/97/ соответствуют характеристические прямые $x=C(t+1)$, $x=C(t-1)$, где $C=\mathrm{Const}>0$. Следовательно, в полосе $\mathcal{D}$ между прямыми $t=1$, $t=-1$ имеем непрерывную функцию

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x}{t+1}, & x\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x}{t-1}, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

удовлетворяющую начальному условию $u(x,0)=x\,sgn\,x$ и являющуюся решением уравнения

$$u_t+uu_x=0 \qquad /102/$$

как внутри правой полуполосы $x>0$, так и внутри левой полуполосы $x<0$. Через каждую точку части $\mathcal{D}_1$ полуплоскости $x>0$ над прямой $t=1$ и части $\mathcal{D}_2$ полуплоскости $x<0$ под прямой $t=-1$ проходит по одной прямой из обоих семейств характеристических прямых $x=c(t+1)$, $x=c(t-1)$. Ни одна из указанных прямых не проходит в части $\mathcal{D}_3$ полуплоскости $x<0$ над прямой $t=1$ и в части $\mathcal{D}_4$ полуплоскости $x>0$ под прямой $t=-1$. Таким образом, в областях $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ имеем по два решения уравнения /102/, принесенных из $\mathcal{D}$ указанными характеристическими прямыми, в то время как в $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_4$ решение из $\mathcal{D}$ не распространяется.

§ 6 Линеаризация одного класса квазилинейных уравнений.

Квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[u_{x_ix_j}-b(u)u_{x_i}u_{x_j}\right]+\sum_{i=1}^{n}c^{i}(x)u_{x_i}+d(x,u)=0, \qquad /103/$$

где $a^{ij}(x), b(u), c^{i}(x), d(x,u)$ - заданные функции, в результате преобразования искомой функции

$$u=\omega(v), \qquad /104/$$

где $\omega(v)$ и $v(x)$ - новые неизвестные функции, принимает вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left[\omega''-b(\omega)\omega'^2\right]v_{x_i}v_{x_j}+\omega'\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}v_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}c_i v_{x_i}\right)+d=0, \qquad (105)$$

$$\omega'=\frac{d\omega}{dv},\quad \omega''=\frac{d^2\omega}{dv^2}.$$

Выбирая $\omega(v)$ как решение обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\omega''-b(\omega)\omega'^2=0, \qquad /106/$$

из /105/ для определения функции $v(x)$ получаем уравнение в частных производных, линейное относительно ее частных производных второго и первого порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} c^i(x) v_{x_i} + \frac{1}{\omega'} d(x,\omega) = 0. \qquad /107/$$

Следовательно, если функции $\omega(v)$ и $v(x)$ являются соответственно решениями уравнений /I06/ и /I07/, то определенная по формуле /I04/ функция $u(x)$ будет решением уравнения /I03/.

Решение уравнения /I06/ выписывается в квадратурах

$$v = \alpha \int_0^u \exp\left(-\int_0^\tau b(t)dt\right) d\tau + \beta, \qquad /108/$$

где α и β -произвольные постоянные. Что же касается уравнения /I07/, в случае, когда

$$\frac{1}{\omega'} d[x, \omega(v)] = d_1(x) v + d_2(x),$$

оно является линейным

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} c^i(x) v_{x_i} + d_1(x) v + d_2(x) = 0. \quad /109/$$

По целому ряду случаев краевые, начальные и другие задачи, поставленные для уравнения /I03/ в зависимости от типа, порождают по формуле /I08/ соответствующие задачи для уравнения /I09/ и, кроме того, из равенства /I08/ однозначно можно определить $u(x)$ как функцию $v(x)$, то исходная задача, очевидно, будет корректно поставленной. Следует особо отметить, что изучение ветвимости /бифуркации/ решений уравнения /I03/ сводится к изучению римановой поверхности функциональной зависимости /I08/ между u и v.

В качестве первого примера уравнения вида /I03/ рассмотрим уравнение

$$\Box u + \frac{1}{2}\mu^2 u \Box u^2 = 0, \qquad /110/$$

где μ - действительная постоянная, $\Box$ — даламбериан

$$\Box = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

в четырехмерном пространстве переменных x_1, x_2, x_3, x_4 с линейным элементом

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

а $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$- искомая действительная функция пространственных переменных x_1, x_2, x_3 и времени $t = x_4$.

Поскольку в рассматриваемом случае уравнения /I06/ и /I09/ принимают вид соответственно

$$(1+\mu^2\omega^2)\omega''+\mu^2\omega\omega'=0 \qquad /III/$$

и

$$\Box v=0, \qquad /II2/$$

наиболее общее решение уравнения /II0/ в силу формулы /I08/ можно записать в виде

$$\varphi(u,v)=0, \qquad /II3/$$

где

$$\varphi=\omega\sqrt{1+\mu^2\omega^2}+\frac{1}{\mu}\,\mathrm{arcsh}\,\mu\omega-v, \qquad /II4/$$

$u=\omega(v)$ – общее решение уравнения /III/, а $v(x_1,x_2,x_3,t)$ – общее решение уравнения /II2/.

Задаче Коши для уравнения /II0/ с любыми достаточно гладкими начальными данными

$$u(x,t_0)=\tau(x),\ u_t(x,t_0)=\nu(x),\ x=(x_1,x_2,x_3), \qquad /II5/$$

в силу /II3/,/II4/,/II5/ соответствует задача Коши для уравнения /II2/ с начальными данными

$$v(x,t_0)=\tau\sqrt{1+\mu^2\tau^2}+\frac{1}{\mu}\,\mathrm{arcsh}\,\mu\tau,\ v_t(x,t_0)=2\nu\sqrt{1+\mu^2\tau^2}. \qquad /II6/$$

Записывая уравнение /II0/ в виде

$$\Box u+\frac{\mu^2 u}{1+\mu^2u^2}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_i x_j}=0$$

и учитывая, что величины μ и u действительны, убеждаемся в том, что в случае гиперболичности оператора $\Box$ оно типа Коши-Ковалевской, заключаем, что задача /II2/,/II6/ поставлена корректно. Исходя из этого и принимая во внимание то обстоятельство, что в силу /II3/ и /II4/ достаточное условие существования u как неявной функции v соблюдено

$$\varphi_\omega=2\sqrt{1+\mu^2\omega^2}\neq 0,$$

приходим к заключению о представимости любого регулярного решения u уравнения /II0/ по формуле /II3/. При аналитичности данных /II5/ это утверждение остается в силе и тогда, когда $\Box$ является эллиптическим оператором с аналитическими коэффициентами. Следовательно , в этих преположениях задача /II0/,/II5/ во всяком случае в малом всегда имеет, и притом единственное, решение.

Рассмотрим теперь уравнение эллиптического типа

$$\Delta u - \frac{1}{u}(\nabla u)^2 = 0, \qquad /II7/$$

где ∇ - оператор градиента по переменным $x_1, \dots, x_n$, а $\Delta = \nabla\nabla$.

В силу /I08/ связь между функциями u и v на этот раз дается формулой

$$u = e^{v}, \qquad /II8/$$

где v - произвольная, вообще говоря, комплексная гармоническая функция переменных $x_1, \dots, x_n$.

В ограниченной области D с $(n-1)$-мерной границей $S=\partial D$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x) = f(x), \; x \in S, \qquad /II9/$$

где $f(x)$ - заданная действительная непрерывная функция.

На основании формулы /II8/ заключаем, что задача /II7/,/II9/ всегда имеет, и притом единственное, регулярное в области D решение, знакопостоянное /без ограничения общности можно считать положительное/ и непрерывное в $D \cup S$.

Если отказаться от требования знакопостоянства искомого решения $u(x)$ задачи /II7/, /II9/, оно может оказаться не единственным.

Действительно, рассмотрим случай, когда $n=2$, область D представляет собой круг $|x|<1$, а $f(x)=1$ на окружности $S: |x|=1$. Из формулы /II8/ следует, что наряду с $u_1(x)$ и $u_2(x)$ решением уравнения /II7/ является и функция $u_1(x)u_2(x)$. Поэтому очевидно, что решением задачи /II7/,/II9/ в рассматриваемом случае является семейство функций

$$u(x) = |F(z)|^2 \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_S \frac{1-|z|^2}{|t-z|^2} \log|F(t)|\, ds\right), \quad t = e^{is},$$

где $F(z)$ - произвольная аналитическая в D функция комплексного переменного $z = x_1 + i x_2$, непрерывная в $D \cup S$ и отличная от нуля на S .

Заметим, что уравнение /II7/ хотя и относится к типу уравнений рассмотренных в § 4 настоящей главы, но условие /78/ не только не соблюдено, но левая часть этой формулы не остается ограниченной при $u \to 0$.

Уравнение гиперболического типа

$$u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - \frac{1}{u}\left(u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2\right) = 0 \qquad /I20/$$

очевидно имеет вид /I03/.

В силу формулы /I08/ решения этого уравнения могут быть представлены по формуле

$$u(x_1,x_2) = f_1(x_1+x_2) f_2(x_1-x_2), \qquad /I2I/$$

где f_1 и f_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

В треугольнике $A(-1,0)B(1,0)C(0,1/2)$ на плоскости декартовых ортогональных координат x_1,x_2 знакопостоянное решение $u(x_1,x_2)$ задачи Коши

$$u(x_1,0) = \tau(x_1),\ u_{x_2}(x_1,0) = \nu(x_1),\ -1<x<1 \qquad /I22/$$

для уравнения /I20/ в силу /I2I/ дается формулой

$$u(x_1,x_2) = \sqrt{\tau(x_1+x_2)\tau(x_1-x_2)}\, exp\left(1/2 \int_{x_1-x_2}^{x_1+x_2} \frac{\nu(t)}{\tau(t)}\, dt\right),$$

причем оно единственно.

Без требования знакопостоянства искомого решения задача /I20/, /I22/ может оказаться некорректно поставленной.

Б-31

§ 7. Некоторые другие классы нелинейных уравнений в частных производных.

В приложениях часто встречаются уравнения вида

$$\Delta u - G(u) = 0, \qquad /I23/$$

где G - действительная функция, заданная для всевозможных значений искомого решения u .

Ниже мы будем рассматривать частные случаи уравнения /I23/.

Квазилинейное уравнение

$$u_{xy} = k e^{u},\ k = const \qquad /I24/$$

называется уравнением Лиувилля.

В результате исключения ke^u из уравнения /I24/ и из равенства

$$u_{xxy} = k u_x e^u$$

получаем

$$z_{xy} - z z_y = 0, \qquad /I25/$$

где

$$z = u_x . \qquad /I26/$$

Уравнение /I25/, очевидно, равносильно уравнению Риккати

$$z_x^2 - \frac{1}{2} z^2 = f(x), \qquad /I27/$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменного x .

Функция $f(x)$ называется <u>производной Шварца</u> или <u>дифференциальным инвариантом функции $\varphi(x)$</u> , если

$$f(x) = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{3}{2}\frac{\varphi''^2(x)}{\varphi'^2(x)} .$$

Непосредственной проверкой легко убеждаться в том, что выражение

$$z(x,y) = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x)+\psi(y)} , \qquad /I28/$$

где $\psi(y)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения /I27/.

Подставляя $z(x,y)$ из /I28/ в /I6I/, после интегрирования получим решение уравнения /I24/

$$u(x,y) = \log \varphi'(x) - 2\log\left[\varphi(x)+\psi(y)\right] + \log \psi'(y) + \log\frac{2}{k}$$

или

$$e^u = \frac{2}{k}\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{\left[\varphi(x)+\psi(y)\right]^2} . \qquad /I29/$$

Формула /I29/ впервые была получена Лиувиллем.

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 4ke^u, \quad k = const. \qquad /I30/$$

Записывая уравнение /I30/ в переменных

$z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy,\ v(z,\bar{z})=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$

в виде

$$v_{z\bar{z}}=ke^{v},$$

на основании /I29/ приходим к заключению, что его решением является определенная из равенства

$$e^{u}=e^{v}=\frac{2}{k}\frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(z)}}{[\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}]^2}$$

функция $u(x,y)$ при любой аналитической функции $\varphi(z)$ комплексного переменного z .

Уравнения /I24/ и /I30/ важную роль играют в теории поверхностей.

Уравнение

$$u_{xy}-\sin u=0 \qquad /I31/$$

носит название синус Гордона уравнения.

Построение сколько-нибудь широкого класса точных решений уравнения /I31/ затруднительно. Однако, если искать его решение в виде

$u(x,y)=\varphi(\alpha x+\beta y),\ \alpha=\mathrm{Const}\neq 0,\ \beta=\mathrm{Const}\neq 0,$

то для определения функции φ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''(z)=\frac{1}{\alpha\beta}\sin\varphi, \qquad /I32/$$

где $z=\alpha x+\beta y$.

Умножая /I32/ на $2\varphi'$ и интегрируя, будем иметь

$$\varphi'^2=-\frac{2}{\alpha\beta}\cos\varphi+\frac{2C}{\alpha\beta}, \qquad /I33/$$

где C - произвольная постоянная.

Легко проверить, что решением уравнения /I33/ является функция $\varphi(z)$, определенная из равенства

$$\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{C-\cos t}}=\pm\sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\,z+C_1,$$

где C_1 -произвольная постоянная. В предположениях, что $C\geqslant 1$, $\alpha\beta>0$, полученная таким образом функция $u=\varphi(\alpha x+\beta y)$

будет действительным решением уравнения /I3I/.

Так называемому классу Лоренц-ковариантных уравнений / $\mathfrak{S}$ - модели/ относится уравнение

$$\Box q + \left(q_t \bar{q}_t - \sum_{k=1}^{m} q_{x_k} \bar{q}_{x_k}\right) q = 0, \qquad /I34/$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, а $q = (q_1, \dots, q_m)$ -искомый, вообще говоря, комплексный вектор.

Вслучае $m=1$, $n=3$ и действительного $q(t,x)$ в обозначениях $x = x_1 + t$, $y = x_1 - t$, $q\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p(x,y)$, уравнение /I34/ можно записать в виде

$$p_{xy} - (p_x \cdot p_y) p = 0. \qquad /I28/$$

Построение точных решений уравнения /I28/ в предположениях $p^2 = p_x^2 = p_y^2 = 1$ сводится к синус Гордона уравнению /I24/, в котором $\cos u = p_x \cdot p_y$.

Рассмотрим, теперь, вариант уравнения Максвелла

$$\gamma u u_{xx} + \gamma^3 v u_{yy} = u_x^2 + \gamma^4 v_y^2 \qquad /I29/$$

в предположении, что

$$u = v. \qquad /I30/$$

При $\gamma = 1$ можно использовать предложенный в §6 настоящей главы метод линеаризации уравнения /I29/. В этом случае вместо /I29/ будем иметь

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{u}\left(u_x^2 + u_y^2\right) = 0 \qquad /I3I/$$

и в силу /I08/ получаем, что

$$u = e^{v}, \qquad /I32/$$

где v -произвольная гармоническая функция.

При

$$v = \mathrm{Re}\left[\log 2 \left(\mathrm{ch}\frac{z}{2}\right)^2\right], \; z = x + iy$$

из /I32/ получаем регулярное решение $u_0 = \mathrm{ch}\, x + \cos y$ уравнения /I3I/, которое неотрицательно в полосе $\Pi: 0 < I_m z < \pi$, обращается в нуль в точке $z = \pi i$, стремится к $+\infty$ при

$|x| \to \infty$ и удовлетворяет краевым условиям

$$u_0(x,0) = ch\,x+1, \quad u_0(x,\pi) = ch\,x-1.$$

Регулярное в полосе Π решение уравнения /I3I/, удовлетворяющее всем этим требованиям не является единственным. Этим требованиям удовлетворяют, например, функции

$$u(x,y) = u_0(x,y)\left(\frac{ch\,x - \sin y}{ch\,x + \sin y}\right)^n, \quad n=1,2,\ldots$$

В справедливости этого утверждения можем убедиться легко, если учесть, что модуль аналитической функции $\Phi(z)$ комплексного переменного $z = x+iy$ является регулярным решением уравнения /I3I/ и

$$\frac{ch\,x - \sin y}{ch\,x + \sin y} = \left|\frac{e^z - i}{e^z + i}\right|^2.$$

При $\gamma > 1$ непосредственными вычислениями проверяется, что если функция $\varphi(x,y)$ является решением уравнения

$$\varphi_{xx} - \gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)_{yy} = 0, \qquad /I33/$$

то функции

$$u = \varphi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad v = \varphi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

удовлетворяют равенствам /I29/,/I30/.

В результате замены переменных

$$y = \sqrt{\gamma}\,z, \quad \varphi(x, \sqrt{\gamma}\,z) = \omega(x,z)$$

уравнение /I33/ записывается в виде

$$\omega_{xx} - \left(\frac{1}{\omega}\right)_{zz} = 0. \qquad /I34/$$

В отличие от уравнения /I29/ построение широкого класса решений уравнения /I39/ затруднительно.

Формула

$$\omega(x,z) = \frac{\alpha(x)}{\beta(z)}, \qquad /I35/$$

где функции α и β даются в неявной записи

$$F(\log\alpha, \log b, a; \lambda) - x = 0 \qquad /I36/$$

и

$$F(\log\beta, \log d, c; \lambda) - y = 0, \qquad /I37/$$

где a, b, c, d, λ - произвольные постоянные, $b \neq 0$, $d \neq 0$ и

$$F(\zeta,\delta,\xi;\lambda)=\int_{\delta}^{\zeta}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\lambda^2 t}}\,e^{t}\,dt\,, \qquad /I38/$$

дает класс точных решений уравнения /I34/. При $\lambda=0$ из /I35/, /I36/,/I37/,/I38/ получаем очевидное решение

$$u(x,z)=\frac{ax+b}{cz+d}$$

уравнения /I34/.

Другой, отличный от /I35/ класс точных решений этого уравнения имеет вид

$$\omega(x,z)=\eta(x,z)+\sqrt{\eta^2(x,z)+b^2}\,, \qquad /I39/$$

где

$$\eta(x,z)=ax+abz+c. \qquad /I40/$$

В справедливости утверждения о том, что при выполнении равенств /I36/, /I37/, /I40/ определенные по формулам /I35/ и /I39/ функции действительно удовлетворяют уравнению /I34/ всюду, где они определены, легче всего убедиться непосредственной проверкой.

§ 8 О характере гладкости решений уравнений в частных производных

По определению регулярным решением уравнения в частных производных называется функция, обладающая непрерывными частными производными всех порядков, входящих в уравнение и обращающая его в тождество.

В §2 настоящей главы было показано, что решение задачи Коши для уравнений Коши-Ковалевской с аналитическими данными является аналитической функцией. Отсюда, если воспользоваться единственностью решения этой задачи в классе регулярных решений, заключаем, что регулярное решение уравнения Коши-Ковалевской с аналитическими данными является аналитической функцией. Аналогичное обстоятельство в общем случае уравнений в частных производных не всегда имеет место. В этом отношении исключение представляют собой уравнения эллиптического типа. В самом деле, пусть $u(x,y)$ –регулярное решение уравнения Лапласа, т.е. гармоническая функция в некоторой области $\mathcal{D}_0$ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$. Покажем, что $u(x,y)$ является аналитической функцией действительных переменных x,y в области своей регулярности. В круге $\mathcal{D}: |z-z_0|< R$ с центром в произвольно фиксированной точке $x_0+iy_0=z_0\in\mathcal{D}$, лежащем в $\mathcal{D}_0$, функцию $u(x,y)$ представим по формуле Шварца

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{u(t)\,dt}{t-z}-u(z_0),\ \gamma: |t-z_0|=R, \quad /141/$$

где $u(t)$ –краевые значения $u(z)=u(x,y)$ на окружности γ.

Поскольку при $|z-z_0|<R=|t-z_0|$ справедливо разложение

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}},$$

из формулы /141/ имеем

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\,(z-z_0)^k, \quad /142/$$

где
$$\beta_0 = -u(z_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u(t)dt}{t-z_0}dt,\quad \beta_k=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}},\ k=1,2,\dots$$

Группируя члены в правой части формулы /I42/ соответствующим образом /такое право мы имеем из-за абсолютной сходимости степенного ряда в круге $\mathcal{D}$ /, получаем ряд по неотрицательным целым степеням $x-x_0$ и $y-y_0$

$$u(x,y)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\gamma_{kl}(x-x_0)^k(y-y_0)^l, \qquad /I43/$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$\gamma_{kl}=\frac{1}{k!\,l!}\,\frac{\partial^{k+l}u(x_0,y_0)}{\partial x_0^k\,\partial y_0^l}.$$

Так как радиус сходимости степенного ряда в правой части формулы /I42/ во всяком случае не меньше R, то степенной ряд /I43/ сходится в параллелепипеде $|x-x_0|<r_1$, $|y-y_0|<r_2$, где $r_1^2+r_2^2<R^2$. Следовательно, вблизи каждой точки z_0 своей регулярности гармоническая функция $u(x,y)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда, т.е. она является аналитической функцией переменных x, y.

Справедливо следующее более общее утверждение: если равенство /I/ гл.I представляет собой эллиптическую систему уравнений в частных производных и вектор F аналитически зависит от всех своих аргументов, то решения этой системы являются аналитическими функциями в области их регулярности.

В §8 гл.II было показано, что решение $u(x,t)$ модельного уравнения параболического типа /II9/ ,/уравнения теплопроводности/ в области своей регулярности имеет производные любого порядка по всем независимым переменным.

Пусть теперь $u(x,t)$ -регулярное в некоторой области $\mathcal{D}$ плоскости переменных x,t решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt}-u_{xx}=0. \qquad /I44/$$

Нельзя утверждать, что вблизи точки $(x_0,t_0)\in\mathcal{D}$ регулярности решения $u(x,t)$ уравнения /I44/ непрерывными являются производные

$u(x,t)$ выше второго. Действительно, пусть отрезок ab оси $t=t_0$ лежит в $\mathcal{D}$ и

$$\mathcal{U}(x,t_0)=\tau(x),\ \mathcal{U}_t(x,t_0)=\nu(x). \qquad /145/$$

Функция $\mathcal{U}(x,t)$ как решение задачи Коши /I44/,/I45/ единственным образом определяется в некоторой окрестности точки (x_0,t_0) по формуле Даламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+t-t_0)+\tau(x-t+t_0)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t+t_0}^{x+t-t_0}\nu(\xi)\,d\xi. \qquad /146/$$

Поскольку регулярность решения $u(x,t)$ уравнения /I44/ означает, что оно непрерывно дифференцируемо до второго порядка включительно, то в силу /I46/ мы не можем утверждать о наличии высокой степени гладкости $\mathcal{U}(x,t)$ чем два.

в частных производных является изолированной особой точкой

Говорят, что точка x области G задания уравнения для его решения $u(x)$, если это решение регулярно в окрестности x^0 всюду, кроме, может быть, самой точки x^0, в которой оно может вовсе и не определено. Поведение решения уравнения в частных производных вблизи изолированной особой точки существенно зависит от типа рассматриваемого уравнения.

Пусть центр α круга $\mathcal{D}: |z-\alpha|<\delta$, на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ является изолированной особой точкой гармонической в $\mathcal{D}$ функции $\mathcal{U}(x,y)\equiv\mathcal{U}(z)$. Функция $V(z)\equiv$ $\equiv V(x,y)$, гармонически сопряженная с $\mathcal{U}(z)$ дается формулой

$$V(z)=\int_{z_0}^{z}-\mathcal{U}_\eta d\xi+\mathcal{U}_\xi d\eta+C,\ \xi+i\eta=t, \qquad /147/$$

где C – произвольная действительная постоянная, а путь интегрирования, соединяющий фиксированную точку $z_0\in\mathcal{D}, z_0\neq\alpha$, с переменной точкой $z\in\mathcal{D}$, $z\neq\alpha$, лежит в $\mathcal{D}$ и не проходит через α.

Когда путь интегрирования в правой части /I47/ обходит точку α ровно N -раз, функция $V(z)$ может получить приращение $2k\pi N$, где k -действительное число. Очевидно, что функция

$$kF(z)=u(z)+iV(z)-k\log(z-\alpha) \qquad /148/$$

является однозначной и аналитической в $\mathscr{D}$ всюду, кроме точки $z=\alpha$, в которой она имеет особенность, причем выражение

$$\phi(z)=(z-\alpha)e^{F(z)} \qquad /I49/$$

представляет собой однозначную аналитическую в $\mathscr{D}$ функцию комплексного переменного z с изолированной особенностью в точке $z=\alpha$. В силу /I48/ и /I49/ имеем

$$u(z)=k\log|\phi(z)|. \qquad /I50/$$

Сперва будем считать, что вблизи особой точки $z=\alpha$ функция $u(z)$ ограничена. На основании /I50/ заключаем, что для функции $\phi(z)$ точка $z=\alpha$ не может быть ни полюсом, ни существенно особой точкой. Следовательно, для $\phi(z)$ точка $z=\alpha$ является устранимой особой точкой, и доопределяя ее при $z=\alpha$ как $A=\lim\limits_{z\to\alpha}\phi(z)\neq 0$, она станет аналитической всюду в $\mathscr{D}$. Отсюда в силу /I48/ следует, что функция $u(z)$, доопределенная в точке α как $\lim\limits_{z\to\alpha}u(z)=k\log A$ является гармонической всюду в $\mathscr{D}$, т.е. $z=\alpha$ как особая точка стирается.

Пусть, теперь известно, что при стремлении z к точке α по любому пути

$$\lim_{z\to\alpha}u(z)=\infty. \qquad /I5I/$$

При предположении /I5I/ в силу /I50/ точка $z=\alpha$ для $\phi(z)$ может быть либо нулем, либо полюсом определенного порядка, т.е.

$$\phi(z)=(z-\alpha)^m\psi(z), \qquad /I52/$$

где функция $\psi(z)$ аналитична в $\mathscr{D}$ и отлична от нуля в точке $z=\alpha$, а m – отличное от нуля целое число. Из /I50/ и /I52/ следует, что вблизи точки $z=\alpha$ функция $u(z)$ имеет вид

$$u(z)=k^*\log|z-\alpha|+u^*(z),$$

где $k^*=km$, $u^*=k\log|\psi(z)|$.

Остается рассмотреть случай, когда $u(z)$ не ограничена вблизи точки $z=\alpha$ и не имеет места равенство /I5I/. Ясно, что на этот раз $z=\alpha$ является существенно особой точкой для $\phi(z)$ и, стало быть, в силу известной теоремы Сохоцкого-Вейерштрасса для любого действительного числа B существует последовательность точек $\{z_k\}, k=1,2,\dots$, такая что

$$\lim_{z_k \to \alpha} u(z_k) = B.$$

Указанное выше свойство гармонических функций имеет место и тогда, когда число независимых переменных $x_1,\dots,x_n$ больше двух. В частности, если $x=(x_1,\dots,x_n)$ является изолированной особой точкой для гармонической функции $u(x)$ и, кроме того,

$$\lim_{x\to\alpha} u(x) = \infty$$

при стремлении x к $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ любым путем, то вблизи точки α имеет место представление

$$u(x)=k^*|x-\alpha|^{2-n}+u^*(x),$$

где k -постоянная и $u^*(x)$ -гармоническая функция.

В области $\mathcal{D}$ своего определения решение $u(x,t)$ уравнения гиперболического типа /I44/ не может иметь изолированной особенности. В самом деле, допуская, что $u(x,t)$ является регулярным решением уравнения /I44/ в области $\mathcal{D}$ всюду, кроме точки (x_0,t_0), мы можем утверждать, что начальные данные $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в условиях /I45/ непрерывно дифференцируемы соответственно дважды и один раз на интервале (a,b) оси $t=t_0$ всюду кроме точки $x=x_0$. В силу формулы /I46/ нарушение гладкости этих функций при $x=x_0$ влечет за собой нарушения гладкости $u(x,t)$ не только в точке (x_0,t_0), но и во всех точках прямых $x+t=x_0+t_0$ и $x-t=x_0-t_0$, проходящих через точку (x_0,t_0). Эти прямые являются характеристиками уравнения /I44/. Следовательно, особенность решения $u(x,t)$ в точке (x_0,t_0) распространяется вдоль характеристик уравнения /I44/, проходящих через эту точку.

Повторением только что приведенного рассуждения на основании формулы /I46/ приходим к заключению: если решение $u(x,t)$ уравнения /I44/ непрерывно в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathcal{D}$, и в этой точке претерпевает разрыв по крайней мере одна из производных u_x, u_t, то этот разрыв распространяется вдоль характеристик $x+t=x_0+t_0$, $x-t=x_0-t_0$.

Пусть теперь, решение $u(x,t)$ уравнения /I44/ таково, что в каждой точке (x,t) гладкой кривой σ, лежащей в области $\mathcal{D}$ оно непрерывно продолжимо вместе со своими производными первого порядка, т.е.

$$\lim u(x,t)=\tau, \ \lim \frac{\partial u}{\partial \ell}=\nu, \qquad /I53/$$

где ℓ -заданный на σ единичный вектор, не касающийся σ. Когда σ является кривой Ляпунова, $\tau\in C^{2,0}(\sigma)$, $\nu\in C^{1,0}(\sigma)$ и, кроме того, σ ни в одной своей точке не касается характеристик уравнения /I44/, регулярное решение задачи Коши /I44/,/I53/ вблизи σ можно выписать в квадратурах. Отсюда приходим к заключению, что, если в области $\mathcal{D}$ определения решения уравнения /I44/ вдоль кривой σ вторые производные этого решения претерпевают разрыв, то σ обязана быть характеристикой уравнения /I44/.

Решения не только волнового уравнения, но и, вообще уравнений гиперболического типа иногда принято называть волнами. Как и в случае уравнения /I44/ в области распространения /определения/ волн возможны "сильные" разрывы, когда разрыв претерпевает само решение, и "слабые" разрывы, когда рвутся его частные производные первого порядка, причем в случае линейных гиперболических уравнений распространение разрывов происходит вдоль характеристик рассматриваемого уравнения и причиной их возникновения является наличие разрывов у начальных данных и у их носителя При существовании разрывов у решения уравнения гиперболического типа говорят, что дело имеет с "ударными" волнами.

В отличие от линейных гиперболических уравнений разрывы нелинейных гиперболических уравнений могут возникнуть при достаточно гладких данных далеко от их носителя, как это уже было показано в §5 настоящей главы на примере задачи /95/,/97/ при $a(u)=u$, $u_0(x)=x$.

Из формулы Пуассона, дающей решение задачи Дирихле для гармонических функций в круге видно, что нарушение гладкости искомой функции на окружности не влечет за собой нарушения ее гладкости внутри круга /как мы уже знаем гармоническая функция является аналитической функцией независимых переменных в области ее регулярности/.

Пусть теперь функция $u(z)=u(x,y)$ является гармонической в области $\mathcal{D}$ всюду, кроме кривой σ, лежащей в $\mathcal{D}$ и известно, что $u\in C^{1,0}(\mathcal{D})$. Ввиду того, что выражение $u_x - i u_y$ как функция комплексного переменного $z=x+iy$ аналитически продолжается в $\mathcal{D}$ всюду через σ, функция $u(x,y)$ является гармонической в $\mathcal{D}$. Когда σ стягивается в точку $z_0\in\mathcal{D}$, как мы уже знаем эта точка стирается как особая для $u(x,y)$. По этой причине лежащие в области $\mathcal{D}$ изолированные точки как граничные компоненты не могут быть носителями произвольно заданных непрерывных граничных условий. Доказывается, что внутренняя граничная компонента σ размерности меньше $n-1$ ограниченной области $\mathcal{D}$ евклидова пространства E_n не может быть носителем данных для гармонической в $\mathcal{D}$ всюду вне σ функции $u(x)$ при требовании что $u(x)\in C^{0,0}(\mathcal{D}\cup\sigma)$.