

Пр-ла обобщенных краевых 12.02.  
 Пр-ла Гордона

$V \subset \mathbb{R}^n$   $V$  - открытое мн-во  
 ф-ла Гаусса - Остроградского

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dx = \int_{\partial V=S} P \cos(n, x_i) dS \quad (1)$$

где  $P \in C^1(\bar{V})$

$\uparrow$   
 направление с осей  
 внешнее нормаль к  $S$

$v, u \in C_0^\infty(V)$   $u, v|_S = 0$

$$\int_V v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (u v) - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx =$$

$$= \int_S \underbrace{\cos(n, x_i)}_0 u v dx - \int_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) \int_V u(x) v_{x_i} dx = - \int_V v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

$\exists u \in L_1^{loc}(V)$   $\forall$  открытое мн-во  $V: \bar{V} \subset U$

Если  $\exists J \in L_1^{loc}(U) : \forall \varphi \in C_0^\infty(U)$   $\varphi \in U$   
 $\uparrow$   
 пробная ф-ция

сравнению р-ло  $\int_V u(x) v_{x_i} dx = - \int_V \varphi(x) J(x) dx$

Тогда  $J(x)$  наз. первым обобщенным краевым  
 ф-ии  $u(x)$

$\alpha$ -многомерное:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $\alpha_i \geq 0$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = D^{|\alpha|} u$$

$$k \in \mathbb{N}, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad |\alpha| = k$$

$$\int_U u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi D^\alpha u dx \quad (2)$$

где  $u \in C^k(U)$

Дип:  $u, \psi \in C_1^{loc}(U)$  Будем рассуждать по индукции относительно порядка производных  $k$ , если  $\forall \psi \in C_0^\infty(U)$  справедлива формула:

$$\int_U u D^{|\alpha|} \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi(x) \delta(x) dx \quad (3)$$

$C$ - $\delta$ -функция (Ламба). Если обобщенная скалярная функция существует, то она единственная

$f = g$  -  $\delta$ - $\delta$  для всех значений  $\delta$  -  $\delta$  между крестами слева и справа  $\delta$ .

Дип- $\delta$ - $\delta$  (Ламба) (с противностью).

$\exists \tilde{u} \in C_1^{loc}(U)$  :  $\forall \psi \in C_0^\infty(U)$  справедлива

$$\int_U u D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \psi \tilde{u} dx \quad (4)$$

Вспомогательная (3)  $p=0$   $l(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varphi \in C_0^\infty(U)$

$$\int \varphi(x) (\nu - \tilde{\nu}) dx = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

Рассуждение:  $\forall \varphi(x) = \varphi_m(x) \in C_0^\infty(U)$

$$\varphi_m \rightarrow (\nu - \tilde{\nu})$$

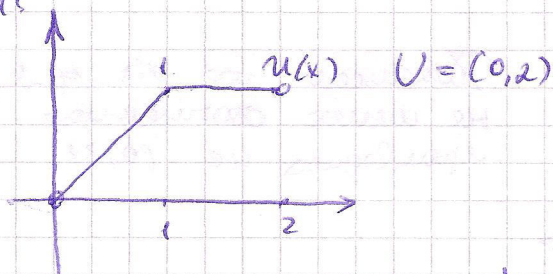
$$\Rightarrow (5) \int \varphi_m(x) (\nu - \tilde{\nu}) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int (\nu - \tilde{\nu})^2 dx = 0 \Rightarrow \nu = \tilde{\nu} \text{ п.п.}$$

$U_3$   $\exists$  разрыв. краевых  $n$ -ого порядка на все

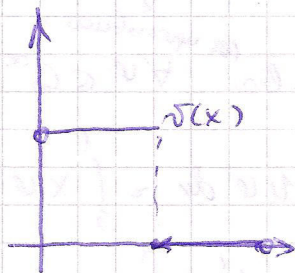
границе  $\exists$  разрыв краевых меньшего порядка

Пример 1:



$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1] \\ 1, & x \in [1, 2) \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



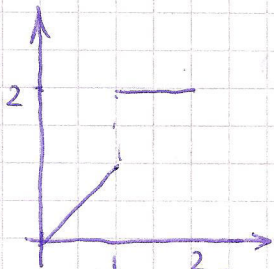
$$\int_0^2 u v' dx \stackrel{?}{=} - \int_0^2 v u' dx \leftarrow \text{голосовая:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u v' dx &= \int_0^1 x v' dx + \int_1^2 v' dx = \\ &= x v \Big|_0^1 - \int_0^1 v dx + \int_1^2 v' dx = \\ &= v(1) + v(2) - v(1) - \int_0^1 v dx = v(2) - \int_0^1 v dx = \\ &= - \int_0^2 v dx. \end{aligned}$$

up  
f

Пример 2:

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$



голосовая, но это  $\neq$  и не имеет discontinuous приращений и  $\in (0, 2)$

Далее-во:  $\forall v \in C_0^\infty(\Omega) \exists \tilde{v}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u v' dx &= \int_0^1 x v' dx + 2 \int_1^2 v' dx = \\ &= x v \Big|_0^1 - \int_0^1 v dx + 2 [v(2) - v(1)] \quad (6) \end{aligned}$$

$$\exists \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \in C_0^{\infty}(U)$$

$$1) 0 \leq \varphi_m \leq 1$$

$$2) \varphi_m(1) = 1$$

$$3) \varphi_m \rightarrow 0, x \neq 1, m \rightarrow \infty$$

Рассмотрим  $\varphi_m$  в п-го 6)

$$\Rightarrow \int_0^2 \varphi_m' u \, dx = -\varphi_m(1) - \int_0^1 \varphi_m \, dx$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(1) = 1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \int_0^2 u \varphi_m \, dx - \int_0^1 \varphi_m \, dx \right] = 0$$

Т.к.  $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(U)$ , то  $\frac{\partial^{k_1} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} =$

$$= \frac{\partial^{k_1} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (\text{однородная операция на}$$

решениях с помощью prop. 1)

Def.  $1 \leq p \leq \infty, k \geq 0, u \in \mathcal{D}'$

$$W_p^k(U) = \{ u \in L_p^{\text{loc}}(U) : D^{\alpha} u \in L_p^{\text{loc}}(U),$$

$$|\alpha| \leq k \}$$

$$\|u\|_{W_p^k} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup} |D^{\alpha} u|, & p = \infty \end{cases}$$

Qup:  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a) \cdot u$   $\xrightarrow{W_p^k} u$   $\xrightarrow{u \rightarrow a}$   
 Если  $\exists \lim_{u \rightarrow \infty} \|u\|_{W_p^k} = 0$

Qup:  $W_p^0$  - замкнутое  $C^0$  по норме  $W_p^k$

$$W_p^0(V) \subset W_p^k(V)$$

$$C^k(V) \subset W_p^0(V) \subset W_p^k(V)$$

0.5:  $H_{\mathbb{R}}^k = W_2^k$

Т1: Если  $u, \delta \in W_p^k(V)$   $|a| \leq k$ ,

то 1)  $D^a u \in W_p^{k-|a|}(V)$

$$\Rightarrow D^{\beta}(D^{\alpha}u) = D^{\alpha+\beta}u \quad \forall \alpha, \beta \quad |\alpha|+|\beta|=k$$

2)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda u + \mu \delta \in W_p^k(V)$

3) Если  $V$  открытое многообразие  $V$ , то

$$u \in W_p^k(V)$$

4) Если  $\zeta \in C^{\infty}(V)$ , то

$$(\zeta u) \in W_p^k(V)$$

$$D^{\alpha}(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha! - \alpha!}{\beta! - \beta! (\alpha-\beta)! - (\alpha-\beta)!}$$

Пример 3:  $u = \frac{1}{|x|^\alpha}$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$   
 $x \neq 0$

$\alpha, p, N$ ?  $u \in W_p^\alpha(U)$

$U = B_0^d$  - lg map

$u_{x_i} = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}$

$|u_{x_i}| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$

$\int_{B_\varepsilon^d \setminus B_\varepsilon^0} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{U \setminus B_\varepsilon^0} u u_{x_i} dx + \int_{\partial B_\varepsilon^d} u \varphi(\cos(n, x_0)) ds$

$|\int_{\partial B_\varepsilon^d} u \varphi(\cos(n, x_0)) ds| \leq \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \int_{\partial B_\varepsilon^d} ds = C \omega_N \varepsilon^{N-1-\alpha} \rightarrow 0$   
 при  $N-1-\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha < N-1$

$\Rightarrow \exists$  const.  $\varphi$   $\in L_p$  при  $\alpha < N-1$

$|u_{x_i}| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L_p \quad (\alpha+1)p < N$

$\Rightarrow \alpha < \frac{N-p}{p} \rightarrow u \in W_p^\alpha$

Пример 4:  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  - числа действительные  
 $u \in B_0^1 = \{ |x| < 1 \}$

$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{1}{|x - z_k|^\alpha}$

$$\alpha < \frac{N-p}{p}$$

12.02

$u, \varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  - открытая область

$\varphi(x) \in V^1_{loc}(\Omega)$  наз. обобщенное многочленное

порядка  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , если

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi \delta(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C^{\infty}_0(\Omega)$$

$$W_p^k = \{ u : u \in L^p_{loc}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \\ D^{\alpha} u \in L^p_{loc}(\Omega) \}$$

$$\|u\|_{W_p^k} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right]^{1/p}$$

Л2!  $W_p^k(\Omega)$  - банахово пр-во.  
(полное, линейное, нормированное)

Заи-во:

Проверим основные свойства:

$$1) \| \lambda u \|_{W_p^k} = |\lambda| \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

$$2) \|u\|_{W_p^k(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$3) \|u + v\|_{W_p^k(\Omega)} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u + D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p} \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\text{ker}-\text{to}} \text{Minkoleno} \leq \\
 &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \left( \|D^\alpha u\|_{W_p^k}^p + \|D^\alpha v\|_{W_p^k}^p \right)^p \right)^{1/p} \leq \\
 &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L_p}^p \right)^{1/p} = \\
 &= \|u\|_{W_p^k} + \|v\|_{W_p^k}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$   $W_p$ -то норма  $u$  и  $v$  норма,  $\text{гомоморфизм}$

$\exists \{u_m\}_{m=1}^\infty$  -  $W_p^k$  норма  $u$  норма  $W_p^k(\Omega)$

$\forall \alpha: |\alpha| \leq k \quad \{D^\alpha u_m\}$  -  $W_p^k$  норма  $u$  норма  $L_p(\Omega)$

$L_p(\Omega)$  - норма  $W_p$ -то  $\Rightarrow \exists u_\alpha: D^\alpha u_m \xrightarrow{L_p} u_\alpha$

Значит,  $u_\alpha \in W_p^k$  и  $D^\alpha u = u_\alpha$

Функции  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega \varphi D^\alpha u_m dx = \int_\Omega u_\alpha \varphi dx$$

Значит:  $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  в  $L_p(\Omega)$

$\forall \alpha: |\alpha| \leq k \quad u_m \rightarrow u$  в  $W_p^k(\Omega)$

$W_2^k$  - Гильбертово пр-во

Среднее  $\phi$ -ые и  $\epsilon$ -регуляризованные производные

Сгруппируем усреднение над  $\phi$ -я  $w_h(x)$ ,

$x \in \mathbb{R}^N$ : 1)  $w_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \forall h > 0$

2)  $w_h(x) = 0$  или  $|x| > h$

3)  $w_h(x) \geq 0$  в  $\mathbb{R}^N$

4)  $\int_{\mathbb{R}^N} w_h(x) dx = 1$

Пример:

В качестве ядра усреднения можно брать:

$$w_h(x) = \begin{cases} c e^{-\frac{|x|^2}{h^2}}, & |x| < h \\ 0, & |x| \geq h \end{cases}$$

число  $c$  подбирается соответственно 4).

Применяя правило Лопиталя получим,

что  $w_h(x)$  имеет колебание порядка

на границе ядра

$$c = \frac{1}{\int_{|x| \leq h} e^{-\frac{|x|^2}{h^2}} dx}$$

С помощью ядра усреднения ищется

усредненная  $\varphi$ -я:

$$u_h(x) \in L^p(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y) u(y) dy$$

$\Rightarrow u_h$  - конечно функ-ая,  $\therefore$  усредненная

$\uparrow$ -я «лучше»  $u(x)$

~~Лемма~~

~~Лемма~~  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $u \equiv 0$  при  $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$

Лемма утверждает  $u(x) \in L^1(\Omega)$ ,  $\Rightarrow u_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

ТЗ: Пусть  $\Omega$ -откр. обл. в  $\mathbb{R}^N$ :

1) Если  $u(x) \in L^p(\Omega)$  и  $u = 0$  в  $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ ,  
где  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ , тогда  $u_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \forall h$ :

$h < \delta$ , где  $\delta = \rho(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega)$

2) Если  $u(x) \in C(\bar{\Omega})$  и  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , тогда  
 $u_h(x) \xrightarrow{\Omega} u(x)$  при  $h \rightarrow 0$ .

3) Если  $u(x) \in L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , то  $\|u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$

и  $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{L^p(\Omega)} = 0$

Дока-ло:

$$u_h(x) = \int_{|x-y| \leq h} u(y) w_h(x-y) dy$$

1)  $\int (x, \partial\Omega) \leq \delta - h$ , so  $w_h = 0$   $|x| > h \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_h(x) = 0, \text{ так } w_h(x-y) u(y) = 0$$

$$u_h \in \Omega$$

2)  $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$  и  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , тогда

$$u_h(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w_h(x-y) u(y) dy - u(x) = 1 =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} w_h(x-y) (u(y) - u(x)) dy$$

$$|u_h(x) - u(x)| \leq \sup_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)| \int_{\mathbb{R}^n} w_h(x-y) dy =$$

$$= \sup_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)|$$

по Т. Коши - Вейерштрасса функция  
для равн. вып.  $\Rightarrow$  при  $h \rightarrow 0$

$$\sup_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)| \rightarrow 0$$

3)  $u \in L_p(\Omega)$   $u=0$  вне  $\Omega$ , тогда  
 где  $p \geq 1$  (где  $p=1$  для абсолютного)

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y) u(y) dy \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} (w_h(x-y))^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = 1} |u(y)| dy \leq$$

$$\leq \text{норм-го Тейлора} \leq 1 \cdot f = |w_h|^{\frac{1}{p}},$$

$$g = |w_h|^{\frac{1}{q}} |u| \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |w_h(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow |u_h(x)|^p \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p} \cdot p}$$

↑  
 интегрируем по  $dx$  и интегрируем

$$\Rightarrow \|u_h(x)\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}$$

При  $p=1$  применяем норм-го, тогда  
 интеграл  $\leq$  интеграл тогда

$\forall u \in L_p, p > 1, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x) \in C(\Omega):$

$$\|u - \delta\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\delta(x) = 0$  в некотором окр.  $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} &\leq \|u^h - \delta^h\|_{L_p(\Omega)} + \|\delta^h - \delta\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \|u - \delta\|_{L_p(\Omega)} + \|\delta^h - \delta\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad + \underbrace{\|\delta^h - \delta\|_{L_p(\Omega)}}_{\frac{1}{3} \omega_3(\alpha)} + \underbrace{\|\delta - u\|_{L_p(\Omega)}}_{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  эр

Теорема Пугача  $K$  - компактное подмножество в  $\mathbb{R}^n$ ,

тогда  $\exists \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); 0 \leq \psi \leq 1$

и  $\psi(x) = 1$  в некотором окр  $K$

Доказательство:  $K_\delta = \delta$  окр.  $K$  с расстоянием  $\delta$  к  $K$

тогда не дальше, чем на  $\delta > 0$

~~$\delta = \rho(K, \partial\Omega)$~~   $0 < 3\delta < \delta$

$$\delta = \rho(K, \partial\Omega)$$

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{2\delta} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{2\delta} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) w_\varepsilon(x-y) dy$$

Примеры:  $u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

где  $f(x)$  — ч-я беспрерывная:

$$f(x), |x| \leq 1$$

Контр. и кт. гур-ая нн в фнкс. контр. доказана, но  $u$  имеет вторую смешанную производную

$$D_{x_1} D_{x_2} u = 0 \quad \text{в определенном смысле}$$

$$\int_{\Pi} (f(x_1) + f(x_2)) D_{x_1} D_{x_2} \varphi dx_1 dx_2$$

$$\{ \varphi(x_1, x_2) \in C^\infty(\Pi) \}$$

$$\int_{\Pi} f(x_1) D_{x_1} D_{x_2} \varphi dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 f(x_1) [D_{x_1}'' \varphi(x_1+1) - D_{x_1}'' \varphi(x_1-1)] dx_1 = 0$$

$$\int_{\Pi} f(x_2) D_{x_1} D_{x_2} \varphi dx_1 dx_2 = 0$$

T5: Если  $u(x) \in L_1(\Omega)$  и  $\exists$  односторонняя производная  $D^\alpha_x u \in L_1(\Omega)$ , то

$\forall \Omega_1: \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$  и  $\forall h < \delta$ , где

$$\delta = \rho(\Omega_1, \partial\Omega) :$$

$$D^\alpha_x u^h(x) = (D^\alpha_x u(x))^h$$

Доказ-во:

$$D^\alpha_x u^h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha_x w_h(x-y) u(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{D^\alpha_x w_h(x-y)}_{\text{производная по } x} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y w_h(x-y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y w_h(x-y) u(y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y) D^\alpha u(y) dy = (D^\alpha_x (u(x)))^h$$

T6: Если  $u \in L_1(\Omega)$  и  $D^\alpha_{x_i} u = 0$   $i=1, \dots, N$ , то  $u = \text{const}$ .

Доказ-во: По T5  $\forall \Omega_1: \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$

$$D^\alpha_{x_j} u^h = (D^\alpha_{x_j} u)^h = 0 \Rightarrow u^h = C_h$$

$$\forall h < \delta = \rho(\Omega_1, \partial\Omega) \Rightarrow \text{по T2 } u^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$$

$$\left. \begin{array}{l} c_h \rightarrow c \\ u^h \rightarrow c \end{array} \right\} \Rightarrow u = \text{const.}$$

27

Пространства  $W_2^1(\Omega)$  и  $W_2^0(\Omega)$ ,  
 $H_2^1(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$ ,  $H_2^0(\Omega) \equiv W_2^0(\Omega)$

$W_2^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \text{ и все соответствующие } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \}$   
 $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\}$

$$\|u\|_0^2 = \int_{\Omega} u^2(x) dx, \quad (u, v) = \int_{\Omega} u v dx$$

$W_2^1(\Omega)$  - гильбертово ср-во

$$[u, u]_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx$$

$$[u, v]_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_0 + \|\nabla u\|_0$$

$W_2^0(\Omega)$  - это замкнутое  $C_0^{\infty}(\Omega)$  по норме  $W_2^0(\Omega)$

$$C_0^{\infty}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) \subset W_2^0(\Omega) \subset L_2(\Omega)$$

Т7 (Кер-По Фрунгуца - Гренида):

$$u(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{Тогда}$$

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} \nabla u^2 dx$$

$$\Omega \subset \{x: |x_i| < R\}$$

$$u = 0, \text{ где } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

$$u(x) = \int_{-R}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \quad \leftarrow R \leq x_i \leq R$$

$$|u(x)|^2 = \left( \int_{-R}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \right)^2 \stackrel{\text{к.Б.}}{\leq} \left( \int_{-R}^{x_i} dx_i \right) \times$$

$$\times \int_{-R}^{x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \leq 2R \int_{-R}^R \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_i$$

$\times dx_2 \dots dx_n$  и интегрируем

$$\int_{(x_i=x_i) \cap \Omega} u^2(x) dx \leq 4R^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq$$

$$\leq 4R^2 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx$$

т.е.

Замечание: Т7 справедлива в  $W_2^1(\Omega)$

Задача на упрощение

26.02

Классическое ур-ние

Пример:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 & \text{на } 0 < x < \pi, t \geq 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Анализ: при малых  $u$  на  $y$   $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , при больших  $u$ .

$$\text{Положим } S(t) = \int_0^\pi (S \sin x - u(t, x)) dx$$

$$\frac{dS}{dt} = \int_0^\pi S \sin x u_t(t, x) dx = \int_0^\pi S \sin x (u_{xx} + u^3) dx =$$

$$= -S + \int_0^\pi S \sin x - u^3(t, x) dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  по Гельфанду, где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_a^b x(t) y(t) dt \leq \left( \int_a^b |x|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_a^b |y|^q dt \right)^{1/q}$$

Bündelung  $p = \frac{3}{2}, q = 3 \Rightarrow$   
 $s(t) \approx 2^{2/3} \left( \int_0^t u^3 \sin x dx \right)^{1/3}$

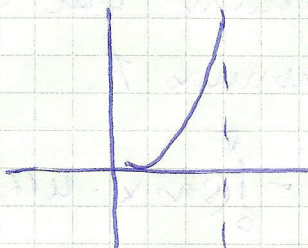
$$\frac{ds}{dt} \approx -s + \frac{1}{4}s^3, t \geq 0$$

$$\frac{ds}{dt} = s e^t$$

$$\frac{ds}{dt} = s^2$$

$$-\frac{1}{s} = t - c$$

$$s = \frac{1}{c-t}$$



$$t = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s(t)+2}{s(t)-2} \right)$$

Решим в обратном направлении

$$u_t = (k(u)u_x)_x$$

При каких  $k$  будет обратным направлением  
возрастание температуры.

Будем искать  $\zeta = x - \lambda t$  в виде функции  
( $\lambda > 0$ )

волны

Тогда при най абелевом направлении

$$\frac{d}{d\zeta} \left( k(f_a) \frac{df_a}{d\zeta} \right) + \lambda \frac{df_a}{d\zeta} = 0$$

$$k(f_a) \frac{df_a}{d\zeta} + \lambda f_a = C$$

Для определенности  $C = 0$ .

$$\frac{k(f_a)}{f_a} \frac{df_a}{d\zeta} = -\lambda \quad \int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$$

$$\text{Введем } \Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta \quad u \geq 0$$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(f_a(\zeta)) = -\lambda(\zeta - \zeta_0)$$

$$f_a(\zeta) = \Phi^{-1}(-\lambda\zeta)$$

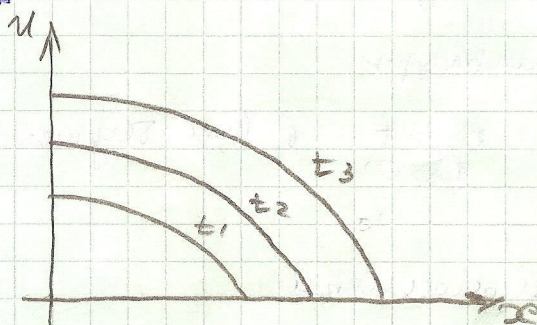
$$u_A(t, x) = \Phi^{-1}[\lambda(x - t)]$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi \neq 0 \quad \lambda t - x \geq 0 \\ \Phi = 0 \quad \lambda t - x < 0 \end{array} \right\} \leftarrow \text{о.д. злыгомоса (*)}$$

Рассеи  $K(u) = u^\sigma \quad \sigma = \text{const}$

$$\Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma}$$

$$u_\#(t, x) = [\sigma \lambda (\lambda t - x)^\sigma]^{1/\sigma}$$

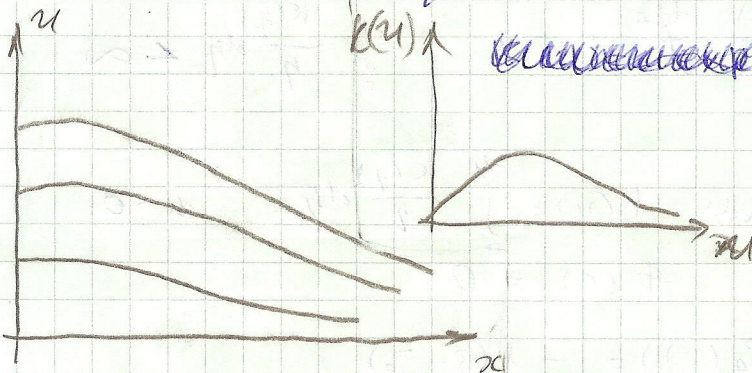


Рассеи  $K(u) = |\ln u|^{-1} \quad x \in (0, 1/2)$

$$K(u) > 0, \quad K(0) = 0$$

В) Замкнутой области

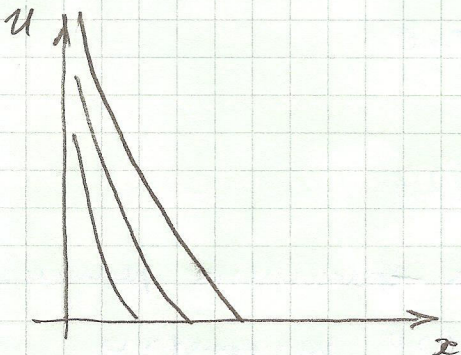
$$\int_0^1 \frac{K(u)}{u} du$$



$$u_\#(t, x) = \begin{cases} -\ln [1 - \lambda(\lambda t - x)] & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0 & x > \lambda t \end{cases}$$

$$K(u) = u \exp(-u)$$

$$u_0(t, 0) = -\ln(1 - \alpha t^2)$$



05-03

$$u_t = \nabla \cdot (u^\beta \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx = E_0$$

$$u(t, x) = t^\alpha \theta(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{t^\beta}$$

$$\alpha t^{\alpha-1} \theta = \sqrt{\beta} t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_i} \zeta_i = t^{\alpha(\beta+1)-2\beta} \nabla_\zeta \cdot (\theta^\beta \nabla_\zeta \theta)$$

Monero comparison, wenn  $\alpha-1 = \alpha(\beta+1)-2\beta$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha \theta(\zeta) dx = t^{\alpha+N\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\zeta) d\zeta$$

$$\Rightarrow \alpha + N\beta = 0 \quad (\text{von unserer comparison})$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^{N-1} \theta^\beta \theta' + \frac{1}{N\beta+2} \theta^{N+2} = 0 \quad \zeta > 0$$

$$\theta^\beta \theta'(0) = 0$$

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x \quad \sigma = \text{const} \quad t > 0 \quad x > 0$$

$$u(0, x) = u_0 \quad x > 0$$

$$u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbb{R}_+)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \quad t > 0$$

- Возьмем следующие граничные условия:

$$u_1(t) = (1+t)^m \quad t > 0 \quad m = \text{const} > 0$$

Будем искать автомодельное решение в виде:

$$u_A(t, x) = (1+t)^m \theta_A(\xi),$$

$$\text{где } \xi = x / (1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}$$

$$t \rightarrow \frac{t}{\alpha}, \quad x \rightarrow \alpha \frac{x}{1+m\sigma}, \quad u \rightarrow \alpha^m u \quad t > 0$$

Можно сразу заметить уравнение сократится

$$(\theta_A^\sigma \theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2} \theta_A' \xi - m \theta_A = 0$$

$$\theta_A(0) = 1, \quad \theta_A(\infty) = 0$$

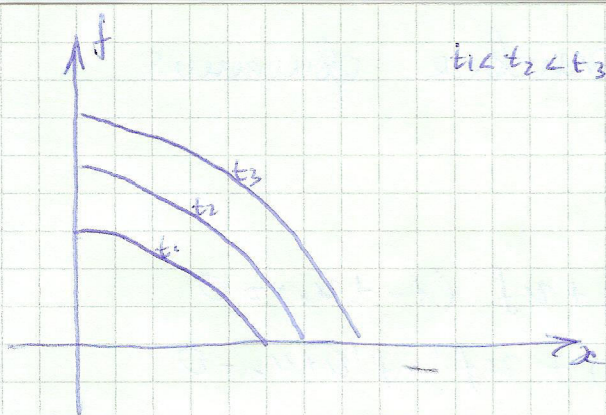
- Возьмем следующие граничные условия

$$u_1(t) = e^t, \quad t > 0$$

$$u_A(t, x) = e^t f_A(\eta), \quad \eta = \frac{x}{\exp(\frac{\sigma t}{2})}$$

$$(f_A^\sigma f_A')' + \frac{\sigma}{2} f_A' \eta - f_A = 0 \quad \eta > 0$$

$$f_A(0) = 1, \quad f_A(\infty) = 0$$



$$t_1 < t_2 < t_3$$

Рассеяние  $u_t = (u^T u_x)_x + u^\beta$   $t > 0, x \in \mathbb{R}$   
 $\sigma > 0, \beta > 1$

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}} \Theta_A(\xi)$$

$$\xi = \frac{x}{(T_0 - t)^m} \in \mathbb{R} \quad \Theta_A(\xi) \geq 0$$

Возьмем  $m = [\beta - (\beta - 1)] / [2(\beta - 1)]$

Будем считать начальные условия нулевыми:

$$u_0(-\infty) = u(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Theta(t, \xi) = (T_0 - t)^{\frac{1}{\beta-1}} u(t, \xi (T_0 - t)^m)$$

$$\Theta(t, \xi) \quad t \rightarrow T_0 \quad t \in [0, T_0]$$

$$\Rightarrow (\Theta_A^\sigma \Theta_A')' - m \Theta_A' \xi - \frac{1}{\beta-1} \Theta_A = 0$$

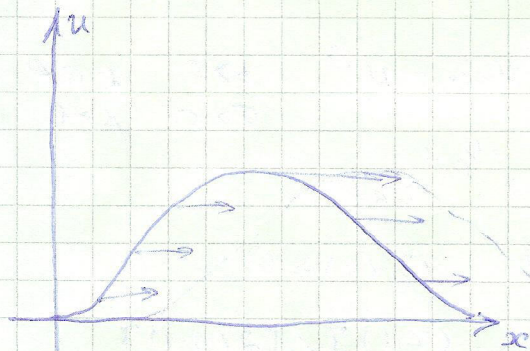
# Волновые уравнения

$$u_{tt} + u u_x = 0$$

$$u = f(x - ut)$$

$$f'(-u - tu_x) + u f'(1 - tu_x) = 0$$

$$f'(-u + tu_x) + u f' - f' u t u_x = 0$$



$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$f_1(x - ut) + f_2(x + ut)$$

## Уравнение КЭФ

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + (\bar{\sigma} \nabla) \bar{\sigma} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + f$$

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{уп-ние неразрывности})$$

$$\bar{\sigma}(z, t) \Big|_{t=0} = \bar{\sigma}_0(z)$$

$$\bar{\sigma}(z, t) = 0$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \dot{z}$$

$\bar{\sigma} \cdot \bar{v} / c = 0$     $\bar{\sigma} \cdot \bar{n} / c = 0$    уа непрерывности  
на поверхности    $\rho / s^+ = \rho / s^-$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{f}, \quad \text{div } \bar{\sigma} = 0$$

$$\bar{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla U$$

Умножив уравне Ланграна на  $\bar{\sigma}$  и  
интегрируем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |\bar{\sigma}|^2 \right) + \bar{\sigma} \nabla p + \bar{\sigma} \nabla U = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |\bar{\sigma}|^2 + U \right) + \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho |\bar{\sigma}|^2 + U$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \bar{\sigma} \nabla |\bar{\sigma}|^2 + \bar{\sigma} \nabla p + \bar{\sigma} \nabla U = 0$$

$$\left\{ \bar{\sigma} \nabla \varphi = \text{div } (\rho \varphi) - \varphi \text{div } \bar{\sigma} \right\}$$

$$\bar{\Pi} = \bar{\sigma} \left( p + \frac{1}{2} \rho |\bar{\sigma}|^2 + U \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \text{div } \bar{\Pi}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon d\tau + \int_S \bar{\Pi} \bar{n} ds = 0 \quad - \text{закон сохранения энергии}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 + U + p \right) = 0 \quad - \text{интегрируем по времени}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 + U + p = \text{const}$$

↑ интеграл Бернулли

Прогнозируем,  $\Rightarrow$  функции потенциалов

$$\vec{v} = \nabla \phi \quad \phi - \text{потенциал скорости}$$

$$\Rightarrow \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\rho}{2} |\nabla \phi|^2 \right) + (\nabla \phi \nabla) \nabla \phi = f$$

$$\nabla f = -\frac{1}{\rho} \nabla U$$

$$(\nabla \phi \nabla) \nabla \phi = \nabla \left( \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} = c(t)$$

↑ интеграл Бернулли - константа

Уравнение неразрывности  $\rightarrow \nabla \phi = 0$



$$z = -h(x, y)$$

уравнение неразрывности  
 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z + p = 0$$

$$\zeta = \eta(x, y, t) - z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \eta + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z / 2 = \eta(x, y, t) = 0$$

Zammenfassend geschrieben

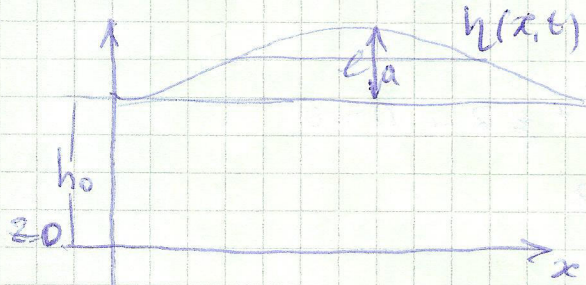
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g \eta(x, y, t) \Big|_{z=\eta(x, y, t)} = p_0(x, y, t)$$

$$\phi|_{t=0} = \eta_0(x, y, z)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x, y)$$

12.03

Теория мелкого слоя.

Среднее по  
горизонтальному сечению

Введем безразмерные переменные:

$$\alpha = \frac{a}{h_0} \quad (\text{в зависимости } \alpha \ll 1)$$

$a$  — характерная амплитуда волны (высота)  
 $l$  — (на среднем уровне) длина волны /  $2\pi$

$$\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$$

$$\frac{z}{l} \approx \frac{z}{h_0}, \quad t \sqrt{g h_0} / l, \quad (\eta - h_0) / a, \quad \sqrt{\frac{g h_0}{g l a}} \varphi$$

Об  $x, z, t, \eta, \varphi$ 

$$\Rightarrow \beta \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad (\text{внезо уравнение Лапласа})$$

$$0 < z < 1 + \alpha \eta$$

$$\varphi_z \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{условие непротекания})$$

$$\eta_t + \alpha \varphi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \varphi_z = 0$$

$$\varphi_t + \eta + \frac{1}{2} \alpha \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi_z^2 = 0 \quad \left. \vphantom{\varphi_t + \eta} \right\} \text{при } z = 1 + \alpha \eta$$

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \int \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x, t)$$

$$f_1(x, t) = f_0(x, t) ?$$

$$\Rightarrow \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha \eta) f_x] - \frac{1}{6} (1 + \alpha \eta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f +$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha \eta)^2 \eta_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f \Big|_{\beta} + O(\beta^2) = 0 \quad (*)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha \eta)^2 \Big|_{\beta} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{\beta} +$$

$$+ \alpha f_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f - \alpha f_{xx} \Big|_{\beta} + O(\beta^2) = 0$$

Будем считать, что  $0 < \beta \ll 1$

$$\eta_t + [(1 + \alpha \eta) f_x]_x = 0$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 = 0$$

$$f_x + \varphi_x = u$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \eta_t + [(1 + \alpha \eta) u]_x &= 0 \\ u_t + u u_x + \eta \eta_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{уравнения Burgers}$$

Рассмотрим  $\alpha \ll 1$

$$\eta_t + u \eta_x = 0$$

$$f_x = u$$

$$u_t + \eta u_x = 0$$

$$\eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx}$$

$$c_0^2 g h_0$$

— распространение волны

Ур-ние ~~кдв~~ КдВ

$$\exists \alpha = 0(\alpha, \beta)$$

$$(*) \Rightarrow \eta_t + \alpha (1 + \alpha \eta) \eta \eta_x - \frac{1}{6} \beta \eta_{xxx} = 0$$

$$\eta_t + \alpha \eta \eta_x + \eta_x - \frac{1}{2} \beta \eta_{xxt} = 0$$

Треуго бурало

$$u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2)$$

Решение в ур-нии:

$$\eta_t + \alpha [A_0]_x + \alpha [(A_1)_x] +$$

$$+ \beta [(B_1)_x - \frac{1}{6} (A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$[A_0]_t + \eta_x + \alpha [(A_1)_t + A_0 (A_0)_x] +$$

$$\beta [(B_1)_t - \frac{1}{2} (A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \alpha [(A_0)_x + 2\eta \eta_x] +$$

$$+ \beta [(A_1)_x - \frac{1}{6} \eta_{xxx}] = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha [(A_1)_t + \eta \eta_x] +$$

$$+ \beta [(A_1)_t - \frac{1}{2} \eta_{xxt}] = 0$$

$$\eta_x = -\eta_t + O(\alpha + \beta)$$

Ур-ние имеет решение, ~~тогда~~  $\Rightarrow$

$$A_1 = \eta^2 \sigma, \quad \sigma = -\frac{1}{4}$$

$$B_1 = \sigma \eta_{xx}, \quad \sigma = \dots$$

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2} \eta \eta_x + \frac{1}{6} B \eta_{xxx} = 0$$

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right) \eta_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$$

$$\boxed{u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0} \quad u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u(x,t) = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \alpha (x - \alpha^2 t) \right] \quad \text{коническое течение}$$

Уравнение KDV (уравнение) 19.03

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) dx = \text{const} \quad \leftarrow \text{интеграл функции}$$

3 4-е из условия, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (1+|x|) dx < \infty$$

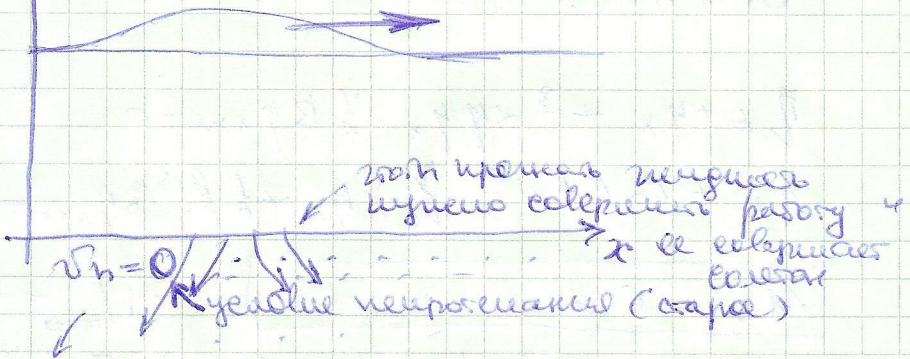
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t) dx = \text{const}$$

↑ сохраняется максимум энергии

Теория интегрируемых течений

3 как организовать работу, чтобы работа с теорией  
была эффективнее своей аналитики?

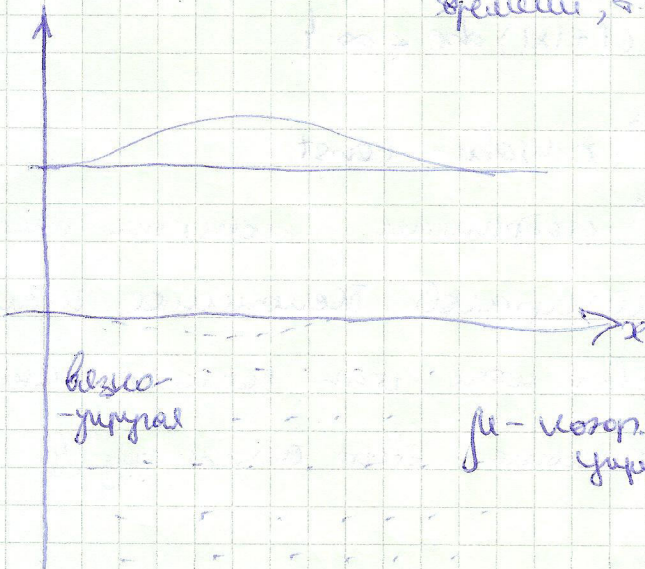
$$u_t - \sigma u_{xx} + u_{xxx} = \mu F(u, u_x, u_t, t)$$



отражение от него и рассеивание энергии среды и условия заданы с помощью функции  $\mu$

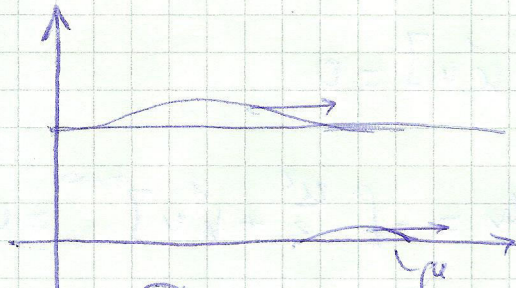
$$\Rightarrow \dot{I}_1 = 0 \text{ (барьер)}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 = \underline{0}(\mu) \Rightarrow \text{величина которой зависит от величины функции, в x зоне } \leq 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (f(u)) \quad (\text{огранич}) \Rightarrow \text{состояние упрощается}$$

Это макс. может возникнуть в виде уравнения



Это распространяется вверх с постоянной  
и гаснет в том же направлении  
 $\Rightarrow$  очень мощ. выходящая часть.

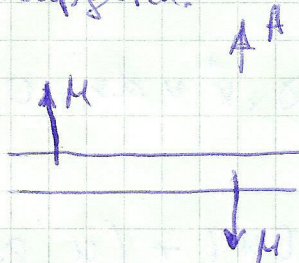
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (f(u)) < 0$$

Управление уравнения.

$$u_{tt} = u u_{xx} + \sin u$$

$$u = f(x - \lambda t)$$

$$f'' = \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2}$$



$$u_t + u u_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) u_s(s, t) ds = 0$$

↑  
Уравнение Казорка

1) Решим задачу для  $K(x) = K(-x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s) u_s(s, t) ds$$

$$(k^T u, v) = (u, k^T v)$$

$$2) \partial_x k^T = k^T \partial_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^2}{2} + k^T u \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{u^2}{2} + k^T u \right] dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const} = I_1$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u^2(x, t) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \left( \frac{u^3}{3} \right) dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_x k^T u dx = 0 \quad // \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx$$

$$\frac{d}{dt} I_2[u] + (u, \partial_x k^T u) = 0$$

$$(u, \partial_x k^T u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_x k^T u dx =$$

$$= u k^T u \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u k^T u dx =$$

$$= - (k^T u, \partial_x u) = - (u, k^T \partial_x u) =$$

$$= - (u, \partial_x k^T u) = 0$$

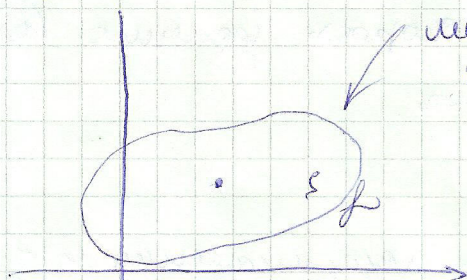
$$\Rightarrow I_2 = \text{const}$$

$$u I_3 [u] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{u^3}{3} + u k^1 u \right] dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x u(x, t) dx - t I_2 [u] - C(0) t I_1 [u] =$$

$$= \text{const} \quad , \text{ где } C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx \leftarrow \text{среднее значение } K \text{ в } \Omega$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x f u(x, t) dx = I_2 + C(0) I_1$$

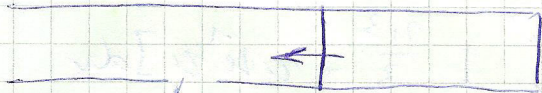


среднее значение  $K$  в  $\Omega$

$$x_{gr} = \frac{\int_{\Omega} x f(x) dx}{\int_{\Omega} dx}$$

$$v_{gr} = \frac{I_2 [u]}{I_1 [u]} + C(0)$$

# Разрешение решения 1/4 П.



Возраст поодраит еще, этот луч отра-  
 тает в камеру  $\Rightarrow$  на пленке с  
 ацидическим рассеивателем засветка  
 $\Rightarrow$  рассеиватель сгорел ударом волны

меньше отмерять

$$p_0 p_0 \neq p_1 p_1$$

Отрабатываю на теорию координатных и  
 на закон сохранения энергии.

Если волна  $\parallel \parallel \parallel$ , то засветка  
 меньше не  $\parallel \parallel \parallel$

# Адиабатное расширение

02.04

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p\dot{v}) = 0 \quad (\text{уравнение неразрывности})$$

$$\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \rho \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{уравнение движения})$$

$$p = f(\rho, T) \quad (\text{уравнение состояния газа})$$

$$E = \frac{\rho \dot{v}^2}{2} + \rho \varepsilon$$

↑  
кинетическая энергия объема,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия объема

Для идеального газа  $\varepsilon = C_V T$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \dot{v}^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \dot{v}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho \dot{v}^2}{2} \right) = \frac{\dot{v}^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{v}^2}{2} \right) =$$

$$= - \frac{\dot{v}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{v}) - \dot{v} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \dot{v}^2 \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} =$$

$$= - \frac{\dot{v}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{v}) - \dot{v} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \dot{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\dot{v}^2}{2} \right)$$

$$dQ = d\varepsilon + p d\tau$$

↑  
увеличение объема

Процесс адиабатический  $\Rightarrow dQ = 0$

$$\Rightarrow d\varepsilon = -p d\tau = -p d \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

$$d(\rho \varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho} d\rho =$$

$$= \left( \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) dp$$

$W$  - work

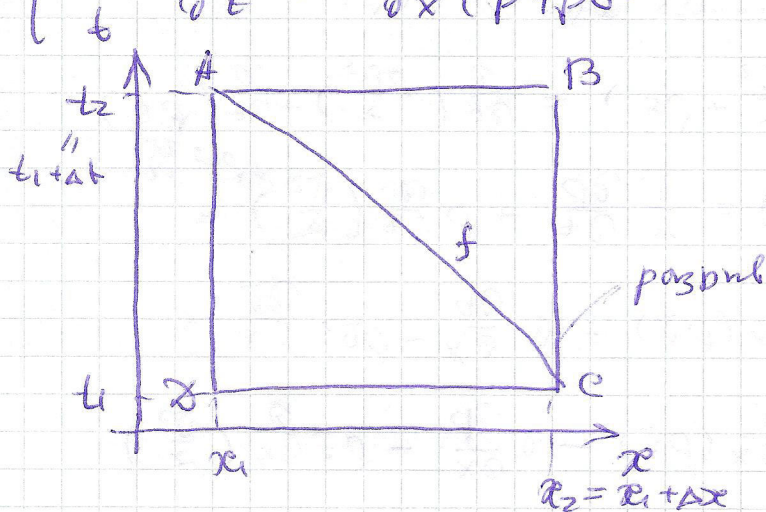
$$\rho \delta \frac{\partial W}{\partial x} = \delta \frac{\partial p}{\partial x}$$

$\Rightarrow$  закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v)$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2)$$



Применяем по уравнению  
второе уравнение

$$\int_x^{x_2} [\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_x_2 - (\rho v)_x_1] dt$$

$$[\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1] \frac{\Delta x}{\Delta t} = - (\rho v)_x_2 + (\rho v)_x_1$$

Переходим к пределу при  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$(\rho_2 - \rho_1) u = -(\rho v)_x_1 + (\rho v)_x_2$$

Переходим в систему координат движущегося с постоянной

$$u_1 = u - v_1, \quad u_2 = u - v_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

Из принципа сохранения

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

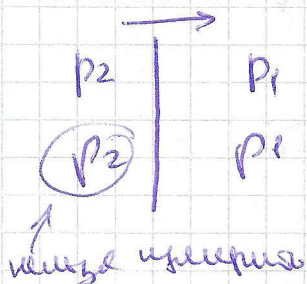
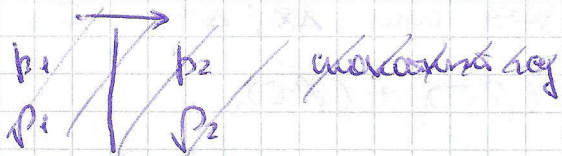
$$p = \rho R T, \quad c = c_v T$$

$$w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} R T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\sigma+1)p_2 + (\sigma-1)p_1}{(\sigma-1)p_2 + (\sigma+1)p_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\sigma+1)p_2 - (\sigma-1)p_1}{(\sigma+1)p_1 - (\sigma-1)p_2}$$



$$\text{Результатом} = \frac{7}{5}$$

малый взрыв  $p_2 \gg p_1$

$$p_2 = p_1 \frac{\sigma+1 + (\sigma-1) \frac{p_1}{p_2}}{\sigma-1 + (\sigma+1) \frac{p_1}{p_2}}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 \frac{\sigma+1}{\sigma-1} = p_1 \cdot 6$$

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\sigma+1}{2} \frac{p_2}{p_1}}$$

↑ ускорение

$$u_2 = \sqrt{\frac{(\sigma-1)^2}{2(\sigma+1)} \frac{p_2}{p_1}}$$

не поддается заме-  
нению, их можно  
тогда считать

Если угол наклона  $\alpha = 0 \Rightarrow$

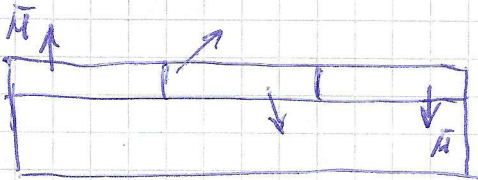
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Привлечено к урне все время,  
увеличился угол

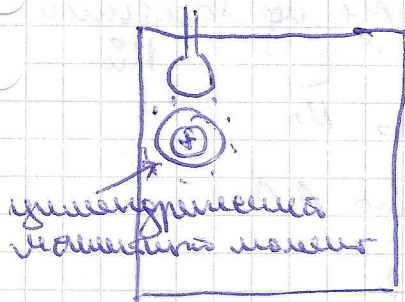
- Газовая разность потенциалов  
в ламинатах

- Химические процессы в ламинатах

② Тонкие ламинатные панели



Область колорита - газовая граница



Уменьшилась  
толщина панели

Этот процесс  
некоторое время  
будет происходить  
до тех пор, пока  
останется

$$\int_V \left[ (\nabla H)^2 \alpha + (M_{\perp})^2 A + (MH)^2 \beta \right] dV$$

↑
↑
↑
↑

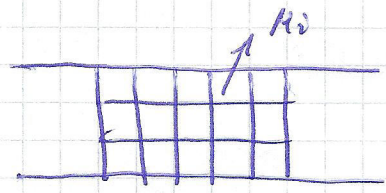
Объемная
энергия
энергия
энергия

плотности
анизотропии
взаимодействия
во взаимодействиях

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla [M H] + \alpha [M [M H]]$$



Лагранж - Миксина



1. Видер  $M_0$
2. По  $M_0$  соединяя  $H_{in}$
3. По ур-нию Л.Л. получ.  $M_1$  из лангмюв  $H_{in}$
4. Соемная  $H_{in}^1$  в расур  $M_1$
5. Соемная  $M_2$  по ур-нию Л.Л.

и.т.д.