

П: [Ф. Кирхгофа] Если в 3. Коши дане волнового уравнения

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3, t > 0 \in E^1 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, то разрешенное решение в т. $(x, t) \in E^4$ и.д.с.д. найдемо по формуле Кирхгофа:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left(t M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t} [t M(\varphi)] \right),$$

где $M(\mu) = \frac{1}{t^2} \int_S \mu(y) dS_y$, S - сфера с центром в т. x и радиусом t .

П: [Ф. Пуассона] Если в 3. Коши дане волнового уравн.

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, x = (x_1, x_2) \in E^2, t > 0 \in E^1, \\ u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^3, \psi(x) \in C^2$, то разрешенное в т. $(x_1, x_2, t) \in E^3$ и.д.с.д. найдемо по формуле Пуассона:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_d \frac{\psi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_d \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

где d - круг: $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$

П: [Идея ф-ла Грина] u - гарм. в $\partial D \subset E^n, S = \partial D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau$$

П: [Идея ф-ла Грина] u, v - гарм. в $\partial D \subset E^n, S = \partial D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial v}{\partial n_s} \right) ds = 0$$

П: [интегральное представление гармонической функции]

u -гарм. в $\mathcal{D} \subset E^n$, $S = \partial \mathcal{D} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left\{ E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_S} - u \frac{\partial E(x,y)}{\partial \bar{n}_S} \right\} dS,$$

$$\text{где } E(x,y) = \begin{cases} -E_n |x-y|, & n=2, \\ \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n>2 \end{cases} \quad \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} ;$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{n/2-1} e^{-x} dx$$

П: [теоремы о среднем для гармонической функции]

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_R} u dS_{S_R} \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(y) dS_y \quad - \text{т.о. среднее по поверхности сферы}$$

$$u(x) = \frac{u}{\omega_n R^n} \int_{S_R} u(y) d\tau_y \quad - \text{т.о. среднее по шару}$$

П: [Ф. Грина для эллиптической опер-ра общего вида]

$u(x), v(x) \in C^2(\mathcal{D}_0)$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0 \subset E^n$

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n e_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

где $A_{ij} = A_{ji}$, $A_{ij} \in C^1$, B_i, c - зад. в $\mathcal{D}_0 \subset E^n$ действ. ф-ции,

$$e_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad e_i(x) \in C^1$$

$$\Delta^* u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (e_i u) + cu$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{D}} (v \Delta u - u \Delta^* v) d\tau_x = \int_S [a(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN}) + b uv] dS_y$$

L ФОРМУЛА ГРИНА,

где N - ед. вектор - нормаль в т. $y \in S$, α и β - косинусы:

$$\cos \widehat{N y_i} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^n A_{ij} \cos \widehat{y_j y_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad a^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} \cos \widehat{y_j y_i} \right)^2, \quad b = \sum_{i=1}^n e_i \cos \widehat{y_i}$$

Опр.: Решением $v(\xi, \eta)$ сопряженного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} (av) - \frac{\partial}{\partial \eta} (bv) + cv = 0, \text{ задан. на характеристиках } \xi = \xi_1, \eta = \eta_1 \text{ условиями: } v(\xi_1, \eta) = e^{\eta_1} \int^{\eta} a(\xi_1, \eta_2) d\eta_2, v(\xi, \eta_1) = e^{\xi_1} \int^{\xi} b(\xi_2, \eta_1) d\xi_2$$

где (ξ_1, η_1) - произв. фиксир. точка области D заданного уравнения $\Delta u = F$, наз. функцией Гюмана.

[при зад. требованиях непр-ты $\frac{\partial a}{\partial \xi}, \frac{\partial b}{\partial \eta}$ и с ф.-е Гюмана \exists -ет]

Опр.: Канонический вид гиперболического уравнения общего вида:

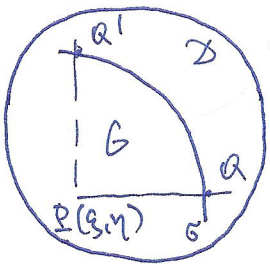
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = F(x, y)$$

$$\xi = x+y, \eta = x-y \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F,$$

$$\text{где } 4a = A+B, 4b = A-B, 4c = C, 4F = F_1$$

$$a, b - \text{гипер.} \Rightarrow \Delta^* - \text{сопр. опер-р: } \Delta^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} (av) - \frac{\partial}{\partial \eta} (bv) + cv$$

Опр.: Задача Коши для гиперболического уравнения общего вида:



Γ - разомкнутое дуга Жордана с непрерывной кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками

Q', Q - точки пересечения характеристик с кривой

$$\begin{cases} \Delta u = F, \\ u(p) = \Phi(p) \\ \frac{\partial u(p)}{\partial \nu} = \Psi(p) \end{cases} \quad p \in \Gamma \quad - \text{з. Коши}$$

Опр.: Задача Гурса для гиперболического уравнения общего вида:

$$\begin{cases} \Delta u = F, \\ u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi), \\ u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta) \end{cases} \quad - \text{з. Гурса,} \quad \text{где } \varphi(\xi), \psi(\eta) - \text{непр. гип.}$$

$$\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$$

Опр.: Первая вариационная задача - это задача о нахождении среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле минимален:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in G \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in S, \varphi(x,y) - \text{непр. в } S \end{cases}$$

$$D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \text{интеграл Дирихле}$$

П [принцип Дирихле] Если заданы на S φ -е $u(x,y)$ таковы, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

Опр.: Функции, непр. в $G \cup S$ и имеющие неискл. непр. производные первого порядка в G , т.е. где имеет место интеграл Дирихле \uparrow , и они удовлетв.ют краевым усл-ю, наз. допустимыми функциями.

Опр.: Вторая вариационная задача - это задача нахождения в классе допустимых φ -й минимума φ -я $\psi(u) = \frac{D(u)}{K(u)}$, где $D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy$, $K(u) = \int_G u^2(x,y) dx dy$ и построенная соответствующей минимизирующей функцией.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in G, \lambda = \text{const} \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in S \end{cases}$$

- з. ие собств. зн-е: λ и u при час λ и произв. ф-е

Утв.: При определенных доп. предположениях, при нахождении решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$ - минимизирующая φ -я, то $\lambda = \psi(u)$ явл. наименьшим собственным числом задачи на собств. зн-е, а $u(x,y)$ - соотв. λ собств. φ -ей.

[Метод Бэ́делова - Галё́ркина]

[где 1-й вариацион. задача]

$$\text{задача на соедоб. экстр. : } \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{в } G, \\ u(x, y) = 0 & \text{в } \Sigma = \partial G \end{cases}$$

Треб-ие минимиз-ть ф-ии $J(u) = \frac{Z(u)}{H(u)}$,

$$Z(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad H(u) = \int_G u^2(x, y) dx dy, \quad H(u) = 1$$

$\{v_n\}, n=1, 2, \dots$ — нормане с-на гранич. ф-ии

u_n ищется в виде $u_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k, n=1, 2, \dots, c_k = \text{const}$

c_k ищется из СЛАУ $\sum_{k=1}^n H(\Delta v_k + \lambda v_k, v_m) c_k = 0, m = \overline{1, n}$

$\Rightarrow u_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k \rightarrow$ ищем λ

[Метод Рунса где 1-й и 2-й вариационной задачи]

$J(u) = \frac{Z(u)}{H(u)}$ — треб-ие минимиз-ть ф-ии,

$$Z(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad H(u) = \int_G u^2(x, y) dx dy, \quad H(u) = 1$$

$\{u_{nm} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_{kl} \sin kx \sin ly\}, n, m = 1, 2$ — нормане с-на граничных ф-ии где ф-ия $J(u)$

[under construction]

Опр.: Функция $v = D^k u \in L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ - гом. гладкая, наз. обобщённой производной порядка k от функции $u \in L^p(\Omega)$, если для $\forall \varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ выполнено равенство:

$$\int_{\Omega} D^k u \varphi d\Omega = (-1)^{|k|} \int_{\Omega} u D^k \varphi d\Omega \quad D^k - \text{частн. произв. порядка } k$$

Опр.: Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ - гом. гладкая наз. пополнение пр-ва l раз непрерыв. дифф. ф-ий $C^l(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_p^l} = \left[\int_{\Omega} (|u|^p + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} |D^\alpha u|^p) d\Omega \right]^{1/p}, \quad p \geq 1$$

D^α - частн. произв. порядка $|\alpha|$.

Опр.: Функция Леви:

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{\sigma(x, y)^{\frac{2-n}{2}}}{(n-2)\sqrt{A(y)} \omega_n}, & n > 2 \\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}} \ln \sigma, & n = 2 \end{cases}$$

ω_n - площадь ед. сферы в E_n

$$A = \det \|A_{ij}\|$$

$$\sigma(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (x_i - y_i)(x_j - y_j), \quad a_{ij} = \frac{a_{ij} \det \|a_{ij}\|}{\det \|A_{ij}\| = A}$$

где эллипс. ур-е: $\Delta u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

Гр [принцип экстремума] Если в области D всегда $c(x) < 0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-я $\Delta u = 0$ не в одной точке $x \in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Опр.: [обобщенные решение уравнений]

• эллиптич. типа : $\Delta u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x)$
 $x \in G, G \subset E_n$ - о.р., $S = \partial G \subset E^{n-1}$

↳ В предположении A_{ij}, e_i, c - о.р., измеримые функции, $f \in L_2(G)$, под обобщ. решением з-чи $\Delta u = f$ в пр-ве W_2^1 понимается ф-я $u(x) \in \dot{W}_2^1$, где попарно справедливо:

$$\int_G (-\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv - fv) dx = 0, \forall v \in \dot{W}_2^1,$$

где $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ - обобщ. производ-ые $u(x)$ и v попарно

• гиперболич. типа : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t), \Delta u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [A_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}] +$
 $+ \sum_{i=1}^n e_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u$

$G \subset E_n$ - о.р., $S = \{ \partial G \times (0 \leq t \leq T) \}, T = \text{const} > 0$

$u(x,0) = \tau(x), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nu(x), u|_S = 0$

↳ В предположении A_{ij}, e_i, c - о.р., измеримые функции, $f \in L_2(G)$, под обобщ. решением з-чи $\Delta u = f$ в пр-ве W_2^1 понимается ф-я $u(x,t) \in W_2^1$, удовл. изв. условиям T и тождеству:

$$\int_Q (-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv) dx dt =$$

$$= \int_G \nu(x) \tau(x,0) dx + \int_Q f v dx dt, \forall v(x,t) \in \dot{W}_2^1(Q), v(x,T) = 0,$$

$Q = \{ G \times (0 < t < T) \} \subset \Omega \subset E_{n+1}$

Ⓢ ↳ - равномерно эллиптичный оператор в $\Omega \subset E_{n+1}$

• параболич. типа : $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \Delta$ - равн. эллиптич. в $\Omega \subset E_{n+1}$
 $G \subset E_n$ - о.р. область, $Q = \{ G \times (0 < t < T) \} \subset \Omega, S = \{ \partial G \times (0 \leq t \leq T) \},$
 $T = \text{const} > 0, u(x,0) = \varphi(x) \in G, u(x_0, t) = \psi(t), (x_0, t) \in S.$ ↴

↳ В предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, под обобщенным решением 3-кут понимаются φ -функции $u(x,t) \in \dot{W}_2^1$, т.е.

$$\int_Q \left(-u \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \ell_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv \right) dx dt =$$

$$= \int_G \varphi v(x,0) dx + \int_Q f v dx dt, \text{ где } \forall v(x,t) \in \dot{W}_2^1, v(x,T) = 0.$$

Опр. Оператор \mathcal{L} называется эллиптическим

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x),$$

но опр-ю, обладает свойством равномерной эллиптичности, если для соотв. ему квадратичной формы $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$ $\exists k_0, k_1 > 0$, т.е.: $k_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

[пример Адамара некорректно поставленной задачи]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = v(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad (2)$$

рассм. $u(x, y) = \frac{\sinh ny \sin nx}{n^2}$ - решение (1), устр. (2).

Л.т.о. где гос. большой n φ -ю $v(x)$ можно сделать сколь угодно малой, в то время как соотв. реш-е з. Коши для ур-я (1) неограничено при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ полученное решение - неустойчиво \Rightarrow данная задача НЕ является корректно поставленной.