

В.Б. АНДРЕЕВ

Лекции

по МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(учебное пособие)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

УДК 519.3

Учебное пособие посвящено изложению основных концепций метода конечных элементов (МКЭ). Этот метод завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач механики, математической физики и техники. В данном пособии МКЭ трактуется как специальная "кусочная" реализация метода Галеркина; более широкие трактовки этого метода привлекаются лишь для анализа квадратурных схем и при использовании изопараметрической техники. Все основные понятия сначала излагаются на примере смешанной краевой задачи для обыкновенного линейного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Изложены как технологические вопросы реализации метода, так и математические обоснования его сходимости.

Для студентов, аспирантов, научных сотрудников и инженеров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Лекция 1. Два определения решения	9
1. Введение	9
2. Двухточечная краевая задача	11
3. Классическое решение	12
4. Обобщенные функции и обобщенные производные	14
5. Решение почти всюду	17
6. Упражнения	18
Лекция 2. Обобщенное решение	20
1. Контрпример	20
2. Задача о минимуме квадратичного функционала. Обобщенное решение	22
3. Главные и естественные граничные условия	27
4. Условия на разрыве	29
5. Упражнения	31
Лекция 3. Методы Ритца, Галеркина и конечных элементов	33
1. Методы Ритца и Галеркина	33
2. Пространство конечных элементов	36
3. Конечноэлементная аппроксимация	42
4. Неоднородные граничные условия первого рода	46
5. Упражнения	47
Лекция 4. МКЭ — инженерный подход	48
1. Задача о растяжении стержня	48
2. Сборка	52
3. Пример реализации	54
4. Упражнения	56
Лекция 5. Технология МКЭ	57
1. От элемента...	57
2. Технология сборки	59
3. Пример	63
4. Упражнения	66

Лекция 6. Квадратичные элементы	68
1. Пространство кусочно-квадратичных непрерывных функций	68
2. Матрицы жесткости и массы квадратичного элемента. Вектор нагрузки	69
3. Сборка	76
4. Упражнения	79
Лекция 7. Эрмитовы элементы. Системы уравнений	80
1. Пространство кусочно-квадратичных непрерывно-дифференцируемых функций	80
2. Кубические эрмитовы элементы	83
3. Задача об изгибе балки	85
4. Системы уравнений	87
5. Упражнения	93
Лекция 8. Уравнение Пуассона в многоугольнике	94
1. Постановка задачи	94
2. Конечноэлементная формулировка	95
3. Барцентрические координаты	98
4. Матрица жесткости и вектор нагрузки треугольного элемента	100
5. Инвариантность матрицы жесткости $K^{(i)}$	103
6. Упражнения	104
Лекция 9. Сборка, связь с разностными схемами	107
1. Пример	107
2. Связь с разностными схемами	115
3. Упражнения	118
Лекция 10. Треугольные элементы высокого порядка. Прямоугольные элементы	119
1. Квадратичные и кубические треугольные конечные элементы	119
2. Матрицы жесткости квадратичного элемента	121
3. Прямоугольные конечные элементы	124
4. Матрица жесткости билинейного элемента	128
5. Упражнения	130
Лекция 11. Приготовления к исследованию сходимости .	131
1. Постановка задачи	132
2. Свойства приближенного решения	133
3. Модельная задача	135

4. Вспомогательные оценки	136
5. Оценка квадратичной формы	139
6. Упражнения	140
Лекция 12. Элементы теории интерполяции.	
Сходимость в H^1	142
1. Первая оценка интерполяции	142
2. Оценка линейной интерполяции в L_2 и H^1	144
3. Сходимость в H^1	146
4. Оценка погрешности интерполяции из S_k^h	148
5. Упражнения	150
Лекция 13. Эквивалентная нормировка H^s	152
1. Вспомогательные представления	152
2. Эквивалентная нормировка H^s	157
3. Вторая эквивалентная нормировка	159
4. Пример: аппроксимационные свойства конечноэлементного пространства $S_{3,1}^h$	163
5. Упражнения	165
Лекция 14. Пространства H^{-s}. Сходимость в L_2 и в H^{-s}	166
1. Пространства H^{-s}	166
2. Априорные оценки решения	170
3. Сходимость в L_2	172
4. Сходимость в H^{-s}	173
5. Упражнения	174
Лекция 15. Суперсходимость метода конечных элементов.	
Поточечная сходимость	175
1. Суперсходимость в узлах	175
2. Сходимость в C	178
3. Пример	182
Лекция 16. Элементы теории сходимости в $2D$	184
1. Вложение $W_1^2(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$	184
2. Оценка интерполяции на базисном треугольнике	186
3. Оценка интерполяции на конечном элементе e	188
4. Аппроксимация и сходимость	192
5. Упражнения	194
Лекция 17. Схемы с численным интегрированием	195
1. Постановка задачи и всякая всячина	195
2. Использование квадратур	202
3. Оценки в слабых нормах	211

4. Примеры квадратурных формул и квадратурных схем	216
5. Замечания о квадратурных схемах в $2D$	218
6. Упражнения	221
Лекция 18. Области с криволинейной границей	222
1. Простейшая аппроксимация криволинейной границы ..	224
2. Квадратичные треугольные элементы в криволинейной области	228
3. Изопараметрические конечные элементы	230
4. Изопараметрические четырехугольники	239
5. Неоднородная задача Дирихле	242
Литература	245
Предметный указатель	247
Обозначения	250

Предисловие

Книга основана на курсе лекций, читаемых автором на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, начиная с 1978 года. За прошедшие двадцать пять с лишним лет понимание автором излагаемого предмета претерпело существенные изменения и к настоящему времени приняло вид, предлагаемый читателю.

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач механики, математической физики и техники. В данной книге рассматривается лишь ограниченная трактовка МКЭ; под МКЭ понимается специальная – ”кусочная” – реализация метода Галеркина, а более широкое понимание МКЭ привлекается лишь для анализа квадратурных схем и при использовании изопараметрической техники.

Большая часть книги посвящена изложению МКЭ применительно к смешанной краевой задаче для линейного обыкновенного самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Хотя эти задачи и не являются тем объектом, где наиболее полно проявились достоинства МКЭ – безусловно, пальма первенства здесь принадлежит двумерным и трехмерным задачам – однако двухточечные краевые задачи представляют собой простую, но достаточно содержательную модель, на примере которой можно осветить многие основные аспекты МКЭ.

Тесная связь формулировки МКЭ с приближенным решением заставила нас подойти к понятию решения с большим вниманием, чем это было бы необходимо при изложении метода конечных разностей. Рассмотрены линейные и полиномиальные конечные элементы, лагранжевы и эрмитовы, МКЭ для одного уравнения и систем.

Двумерные задачи в основном тексте представлены только уравнением Пуассона. Для него наряду с простейшими линейными треугольными элементами рассмотрены полиномиальные треугольные и биполиномиальные прямоугольные. Исследование сходимости МКЭ для одномерного случая проведено с большой подробностью и в различных нормах, зато двумерный случай рассмотрен лишь схематично. Надеюсь, что то внимание, которое уделено технологическим аспектам

МКЭ, позволит ее читателям решать при помощи МКЭ существенно более сложные задачи, чем изложенные в книге.

Первое издание данного учебного пособия вышло в 1997 году весьма ограниченным тиражом (150 экз.) и в продажу не поступало. В настоящем издании исправлены обнаруженные ошибки, внесены небольшие изменения в имевшийся текст, добавлены три новых лекции и немного пополнен список литературы.

Автор приносит искреннюю благодарность И.Г.Белухиной за ее труд по оформлению книги.

В.Б.Андреев

Лекция 1

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ

1. Введение

Так уж устроена природа, что большое число явлений в различных областях естествознания, таких как физика, химия, биология, экология, инженерное дело и др. достаточно полно может быть описано лишь с привлечением дифференциальных уравнений. Области, где только такое описание и возможно, постоянно расширяются. Однако, нахождение решений краевых задач для дифференциальных уравнений, к которым изучаемые явления сводятся, оказывается далеко не простым делом. Точные решения, обычно в виде ряда или интеграла, удается найти только для очень узкого класса задач. Как правило, это задачи для довольно простых уравнений, задаваемых (что более существенно) в областях простой геометрической формы. Среди методов, которые позволяют найти такие решения, отметим метод разделения переменных, метод интегральных преобразований, метод функции Грина. Были потрачены значительные усилия на подходящую модификацию подобных методов и на создание новых методов, которые давали бы решение в замкнутой форме для более широкого класса задач. Однако все эти усилия не смогли обеспечить запросов практики в решении все более сложных задач, что в конечном счете привело к необходимости разработки приближенных методов.

Сегодня среди приближенных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений самыми распространенными являются сеточные методы. Причиной тому служит их большая универсальность и относительная простота реализации. Применительно к дифференциальным уравнениям термин "сеточные методы" часто используется в качестве синонима терминов "метод конечных разностей" и "разностные методы", однако нам представляется вполне оправданной более широкая трактовка этого понятия, включающая в него и метод конечных элементов (МКЭ).

Метод конечных элементов завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач механики,

математической физики и техники. Такая популярность метода объясняется целым рядом причин, среди которых на первое место должны быть поставлены его большая универсальность, общая для всех сеточных методов, простота физической интерпретации и алгоритмичность. Однако мы не разделяем часто высказываемое мнение о том, что схемы МКЭ лучше разностных схем. Не разделяем мы и противоположную точку зрения. Не представляет большого труда доказать, что хорошая разностная схема лучше плохой схемы МКЭ, а хорошая схема МКЭ лучше плохой разностной схемы. Но ведь целесообразно проводить сравнение лишь в сопоставимых ситуациях, а это требует большей квалификации. Видимо, различные подходы должны разумно дополнять друг друга. И, тем не менее, мы должны отметить, что, если для построения традиционно используемыми методами хорошей разностной схемы требуется сравнительно высокая квалификация исследователя, то, зачастую, для построения схемы МКЭ аналогичного качества достаточно выполнить последовательность вполне формальных процедур.

Так что же представляет собой МКЭ? Если не побояться обрушить на свою голову священный гнев рыцарей МКЭ, то очень грубо и неточно можно было бы сказать, что МКЭ — это хороший способ построения хороших разностных схем. Однако лучше было бы сказать, что МКЭ — это способ построения дискретных моделей континуальной среды, описываемой краевыми задачами для дифференциальных уравнений, сохраняющий важнейшие свойства последней. Но и это определение не отражает полностью существа дела. Если смотреть шире, то МКЭ — это технология решения краевых задач для дифференциальных уравнений на ЭВМ.

Напрашивается следующая параллель между эволюцией понятий решения и разностной схемы. На первых этапах исследования дифференциальных уравнений под решением понималась функция, задаваемая аналитически, и, тем самым, поддающаяся полному анализу. По мере усложнения уравнений и задач для них права гражданства обрели решения, задаваемые рядами или интегралами. И, наконец, в настоящее время под решением чаще всего понимают численное решение. Чтобы проанализировать какое-либо явление, теперь уже нужно провести серию расчетов при различных значениях входящих в уравнения и граничные условия параметров. С другой стороны, с момента зарождения понятия разностной схемы и до недавнего времени используемая в расчетах разностная схема должна была быть выписана в явном виде. Это

было необходимо не только для того, чтобы иметь возможность проводить непосредственные вычисления или программировать на ЭВМ, но и чтобы оценить такие качества схемы как симметрия, аппроксимация, устойчивость, сходимость и др. Лишь с развитием технологии МКЭ от этого требования удалось отказаться и довольствоваться алгоритмом построения системы алгебраических уравнений, вместо явного их вида. При этом основные свойства схемы оказываются не зависящими от ее явного вида.

Мы постоянно подчеркиваем близость метода конечных разностей и МКЭ, однако имеется принципиальное различие между этими методами в подходе к приближенному решению — в первом из них аппроксимируется уравнение и граничные условия, а во втором — само искомого решение. Такая тесная связь формулировки МКЭ с приближенным решением обязывает нас подойти к понятию решения с бóльшим вниманием, чем это было бы необходимо при изложении метода конечных разностей.

2. Двухточечная краевая задача

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений не являются тем объектом, где наиболее полно проявились достоинства метода конечных элементов — безусловно, пальма первенства здесь принадлежит двумерным и трехмерным задачам. Однако двухточечные краевые задачи представляют собой простую, но достаточно содержательную модель, на примере которой можно осветить многие основные аспекты метода конечных элементов.

Рассмотрим задачу о нахождении функции $u \equiv u(x)$, $0 \leq x \leq 1$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению *второго порядка*

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия (2) называются *однородными граничными условиями первого рода*. Будем предполагать, что для коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) выполнены условия

$$p(x) \geq c_0 = \text{const} > 0, \quad q(x) \geq 0. \quad (3)$$

Уравнением (1) описывается целый ряд установившихся физических процессов, зависимость которых от двух других пространственных переменных либо несущественна, либо вовсе отсутствует. Если ввести в рассмотрение величину

$$w(x) \equiv -p(x) \frac{du}{dx}, \quad (4)$$

называемую *потоком*, то уравнение (1) можно рассматривать как выраженный в дифференциальной форме закон сохранения этой величины, а (4) тогда есть математическое выражение того конкретного физического закона, который лежит в основе описываемого процесса.

3. Классическое решение

Пусть $\bar{I} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ — замкнутый отрезок, а $I = \{x | 0 < x < 1\}$ — его внутренняя часть. Обозначим через $C^m(\bar{I})$, $m = 0, 1, \dots$ множество функций, заданных на \bar{I} и имеющих там непрерывные производные до порядка m .

О п р е д е л е н и е 1. Решением (*классическим*) задачи (1), (2) называется такая непрерывная на замкнутом отрезке \bar{I} и дважды непрерывно-дифференцируемая на открытом отрезке I функция $u(x)$ ($u(x) \in C^2(I) \cap C(\bar{I})$), которая удовлетворяет граничным условиям (2) и в *каждой* точке $x \in I$ обращает уравнение (1) в тождество.

Пусть

$$p(x) \in C^1(\bar{I}), \quad q(x) \in C(\bar{I}), \quad f(x) \in C(\bar{I}). \quad (5)$$

Хорошо известно, что имеет место

Т е о р е м а 1. Если выполнены условия (3), (5), то решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Условия (3), вообще говоря, существенно ослабить нельзя. Если, например, разрешить коэффициенту $p(x)$ обращаться в нуль, то решения задачи (1), (2) может не существовать.

П р и м е р 1. Пусть, например,

$$p(x) \equiv x, \quad q(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1. \quad (6)$$

Тогда общим решением уравнения (1) будет функция $u = c_1 + c_2 \ln x - x$. Чтобы удовлетворить граничному условию (2) при $x = 1$ нужно положить $c_1 = 1$, а чтобы выполнялось граничное условие при $x = 0$, необходимы равенства $c_1 = c_2 = 0$. Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2 переопределена, несовместна, и, следовательно, задача (1), (2), (6) решения не имеет.

Если же отказаться от второго из условий (3), то появятся случаи, когда решения задачи (1), (2) либо не существует, либо существует, но не единственно.

Пример 2. Если коэффициенты уравнения (1) задаются соотношениями

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv f(x) = -\pi^2, \quad (7)$$

то общим решением рассматриваемого дифференциального уравнения будет функция $u(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x + 1$, которая ни при каких значениях c_1 и c_2 не удовлетворяет граничным условиям (2) и задача (1), (2), (7) решения не имеет.

Пример 3. Если

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv -\pi^2, \quad f(x) \equiv 2\pi \cos \pi x,$$

то функция $u(x) = (c_1 - x) \sin \pi x$ будет решением задачи (1), (2) при любом $c_1 = \text{const}$, т.е. решение неединственно.

Обратимся к условиям (5). Что будет, если, например, $f(x) \notin C(\bar{I})$? Такое предположение является вполне реальным. Если принять, например, тепловую интерпретацию уравнения (1), то $f(x)$ представляет собой плотность распределенных тепловых источников, которые вполне могут быть равномерно распределены на одной части I и полностью отсутствовать на другой. Ясно, что в смысле определения 1 задача (1), (2) решения иметь не будет. И дело не только в том, что уравнение (1) теряет смысл в точке разрыва функции $f(x)$. В рассматриваемом случае не существует функции, которая удовлетворяла бы уравнению (1) на участках непрерывности $f(x)$ и в то же время принадлежала пространству $C^2(I)$.

Пример 4. Если, например,

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} f_1 = \text{const}, & 0 < x < \xi < 1, \\ f_2 = \text{const}, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad (8)$$

то множество функций, удовлетворяющих на $(0, \xi)$ и на $(\xi, 1)$ уравнению (1), (8) и граничным условиям (2), представляет собой двухпараметрическое семейство, задаваемое соотношением

$$u(x) = \begin{cases} c_1x - f_1x^2/2, & 0 \leq x < \xi, \\ c_2(1-x) + f_2x(1-x)/2, & \xi < x \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Для того чтобы эта функция принадлежала $C^2(I)$, необходимо, чтобы она по крайней мере была непрерывной в точке ξ и имела в этой точке непрерывную производную. Выбирая параметры c_1 и c_2 в (9) с учетом указанных требований, находим, что единственной дифференцируемой (один раз) на I функцией семейства (9) является функция

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x[f_2 - f_1x + \xi(2-\xi)(f_1 - f_2)], & 0 \leq x \leq \xi, \\ (1-x)[f_2x + \xi^2(f_1 - f_2)], & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

которая, очевидно, при $f_1 \neq f_2$ не принадлежит $C^2(I)$. Задача (1), (8), (2) решения в смысле определения 1 не имеет.

Для того чтобы придать смысл этой задаче и при $f(x) \in C(I)$, необходимо расширить понятие решения в двух направлениях:

- отказаться от требования, чтобы решение непременно принадлежало $C^2(\bar{I})$,
- отказаться от требования удовлетворения уравнения в каждой точке x .

Однако делать это нужно достаточно осторожно, чтобы не нарушить единственность и чтобы решение в смысле определения 1 оставалось по возможности (см. замечание 4) решением и в более широком смысле.

4. Обобщенные функции и обобщенные производные

Чтобы дать желаемое расширение понятия решения, нам необходимо ввести в рассмотрение существенно новое понятие — понятие обобщенной производной. Сделаем мы это одновременно с введением понятия обобщенной функции. Для простоты будем рассматривать функции, заданные на всей оси Ox . Обозначим через \mathcal{D} совокупность всех функций $\varphi(x)$, которые бесконечно дифференцируемы на оси Ox и *финитны*. Последнее означает, что каждая функция $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ тождественно равна нулю вне некоторого отрезка: $\varphi(x) \equiv 0$, если $x \notin (a, b)$; числа a и b —

свои для каждой функции $\overline{\varphi(x)}$. Если $\varphi(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то замыкание указанного отрезка $(a, b) = [a, b]$ называется *носителем* функции $\varphi(x)$ и обозначается как $\text{supp } \varphi(x)$.

Примерами функций из \mathcal{D} могут служить: функция "шапочка"

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

ее производные и сдвиги, их произведения с другими бесконечно дифференцируемыми функциями из C^∞ и их линейные комбинации.

Будем называть функции из \mathcal{D} *основными*.

Обобщенной функцией f (над пространством \mathcal{D}) называется всякий *линейный непрерывный* функционал, определенный на множестве основных функций \mathcal{D} .

Значение функционала (обобщенной функции) f на основной функции φ будем записывать в виде (f, φ) .

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порожденный локально суммируемой на Ox функцией*) $f(x)$:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (11)$$

Обобщенные функции, определяемые *локально суммируемыми* на Ox функциями при помощи соотношения (11), называются *регулярными обобщенными функциями*. Именно с ними мы и будем иметь дело. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными*.

Пример сингулярной обобщенной функции дает дельта-функция Дирака:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \quad (12)$$

Пусть $f(x) \in C^1(-\infty, \infty)$, а $\varphi(x)$ — основная функция, т.е. $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

*) Функция $f(x)$ называется *локально суммируемой* на $-\infty < x < \infty$, если интеграл Лебега от ее модуля по любому конечному отрезку ограничен.

Это равенство и принимается за определение обобщенной производной обобщенной функции: если f — обобщенная функция, то другая обобщенная функция, обозначаемая f' и определяемая соотношением

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad (13)$$

называется ее *обобщенной производной*. Все обобщенные функции являются бесконечно дифференцируемыми (в обобщенном смысле).

Покажем, например, как дифференцируется разрывная функция. Пусть $\chi(x)$ — *функция Хевисайда*, или "ступенька", т.е.

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \infty. \end{cases} \quad (14)$$

Функция $\chi(x)$ локально суммируема, и определяемая ею обобщенная функция есть

$$(\chi, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi dx.$$

Найдем производную этой обобщенной функции. В силу (13) и (12)

$$(\chi', \varphi) = -(\chi, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Мы показали, что *производной "единичной ступеньки"* является дельта-функция Дирака.

Найдем вторую производную

$$(\chi'', \varphi) = -(\chi', \varphi') = (\chi, \varphi'') = \int_0^{\infty} \varphi''(x) dx = -\varphi'(0) = -(\delta, \varphi') = (\delta', \varphi).$$

Будем говорить, что функция $v(x)$ принадлежит *пространству Соболева*

$$H^m(I) \equiv W_2^m(I), \quad m = 0, 1, \dots,$$

если

$$\|v\|_{m,I} \equiv \|v\|_m \equiv \left[\int_0^1 (v^2 + v'^2 + \dots + v^{(m)2}) dx \right]^{1/2} < \infty, \quad (15)$$

где $v^{(k)}$ — обобщенная производная k -го порядка.

Очевидно, что пространство Соболева $H^0(I)$ есть не что иное как хорошо известное пространство $L_2(I)$.

Введем также в рассмотрение подпространство $H_0^m(I)$ пространства $H^m(I)$, полагая

$$\begin{aligned} H_0^m(I) &= \\ &= \{v(x) \in H^m(I) | v(0) = \dots = v^{(m-1)}(0) = v(1) = \dots = v^{(m-1)}(1) = 0\}. \end{aligned} \quad (16)$$

З а м е ч а н и е 1. Так же как пространство $L_2(I)$ является пополнением по норме $\|v\|_0 = (\int_0^1 v^2 dx)^{1/2}$ пространства непрерывных функций $C(\bar{I})$ (и даже пространства бесконечно дифференцируемых финитных на I функций) пространство Соболева $H^m(I)$ является пополнением пространства непрерывно дифференцируемых функций $C^m(\bar{I})$ по норме (15). При этом пополнением по указанной норме пространства бесконечно дифференцируемых финитных на I функций будет пространство $H_0^m(I)$.

5. Решение почти всюду

Обозначим через $C_0^\infty(I)$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых принадлежит I .

О п р е д е л е н и е 2. Функция $u(x) \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ называется решением (почти всюду) задачи (1), (2), если

$$(Lu - f, v) \equiv \int_0^1 (Lu - f)v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(I). \quad (17)$$

З а м е ч а н и е 2. Требование принадлежности $u(x)$ пространству $H_0^1(I)$ понадобилось исключительно для того, чтобы специально не оговаривать выполнение для $u(x)$ граничных условий (2), ибо для каждой функции из $H_0^1(I)$ они выполнены.

Т е о р е м а 2. Если $f(x) \in L_2(I)$, $q(x)$ ограничена на I , а $p(x)$ имеет ограниченную производную, то при выполнении условий (3) решение (почти всюду) задачи (1), (2) существует и единственно.

Очевидно, что если функция $u(x)$ есть решение задачи (1), (2) в смысле определения 1 и принадлежит $H^2(I)$, то она будет решением этой задачи и в смысле определения 2.

Не следует думать, что решение задачи (1), (2) в смысле определения 2 может не удовлетворять уравнению (1) на достаточно большом множестве, например, на целом отрезке хотя и сколь угодно малой длины. Если $u(x)$ есть решение в смысле определения 2, то $Lu - f$ может быть отлично от нуля или быть неопределенным лишь на множестве меры нуль, т.е. $(Lu - f) = 0$ почти всюду на I .

З а м е ч а н и е 3. Может сложиться впечатление, что в определении 2 мы отказываемся от требования непрерывности не только вторых производных решения, но и первых (см. определение пространства $H^2(I)$). На самом деле это не так. В силу теоремы вложения Соболева $H^2(I) \subset C^1(\bar{I})$, т.е. всякая функция из $H^2(I)$ непрерывно дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна.

Принимая во внимание это замечание и вновь обращаясь к задаче (1), (8), (2) находим, что функция (10) является ее решением в смысле определения 2. Если же в (10) $f_1 = f_2$, т.е. $f(x) \in C(I)$, то решение в смысле определения 2 совпадает с решением в смысле определения 1.

З а м е ч а н и е 4. Не всякое классическое решение является решением почти всюду. Например, классическим решением задачи (1), (2) при $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ и $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha < 2$ является функция

$$u(x) = [(\alpha + 1)(\alpha + 2)]^{-1} (x^{2-\alpha} - x) \in C^2(I) \cap C(\bar{I}),$$

которая принадлежит $H^2(I)$ только при $\alpha < 1/2$.

6. Упражнения

1. Для уравнения (1) поставить неоднородные граничные условия первого рода и в предположениях теоремы 1 доказать существование и единственность классического решения.

2. Для уравнения (1) поставить другие граничные условия (не первого рода) и дать определение классического решения.

3. Дать объяснение примеров 2 и 3.

4. Пусть $\xi \in (0, 1)$, $I_1 = (0, \xi)$, $I_2 = (\xi, 1)$. Назовем решением задачи (1), (2) такую функцию $u(x) \in C^2(I_1 \cup I_2) \cap C^1(I) \cap C(\bar{I})$, которая удовлетворяет граничным условиям (2) и в каждой точке $x \in I_1 \cup I_2$

обращает уравнение (1) в тождество. Доказать, что при выполнении условий (5) $u \in C^2(I)$ и совпадает с классическим решением в смысле определения 1.

5. Дать определение классического решения следующей задачи:

$$u'''' = f(x), \quad x \in I, \quad u(0) = u''(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

6. Доказать бесконечную дифференцируемость функции "шапочка" $\omega(x)$.

7. Дать определение решения почти всюду для задачи из упражнения 1.

8. Найти решение из $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ уравнения $pu'' = 1$, где

$$p = \begin{cases} p_1 & 0 < x < 1/2, \\ p_2 & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Лекция 2

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

1. Контрпример

В предыдущей лекции нам удалось определить решение для того случая, когда правая часть $f(x)$ уравнения (1.1) имеет разрывы.*) Ну, а что будет, если разрывна функция $p(x)$? (Это предположение также не является абсурдным. Например, при трактовке уравнения (1.1) как уравнения равновесия $p(x)$ есть модуль Юнга и если разные части сжимаемого бруса изготовлены из разных материалов, то вполне естественно, что коэффициент $p(x)$ будет кусочно-постоянным). Разумеется, в смысле определения 1.1 задача (1.1), (1.2) в этом случае решения иметь не будет. Однако, не будет она иметь решения и в смысле определения 1.2. Чтобы пояснить последнее, рассмотрим следующий

Пример. Пусть в (1.1)

$$p(x) = \begin{cases} p_1 = \text{const} > 0, & 0 < x < \xi, \\ p_2 = \text{const} > 0, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad q(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1. \quad (1)$$

Формально поделив уравнение (1.1), (1) при $x \in (0, \xi) \cup (\xi, 1)$ на $p(x)$, мы приходим к задаче из примера 1.4 с $f_i = 1/p_i$ и решением (1.10), которое в нашем случае записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x[1/p_2 - x/p_1 + \xi(2 - \xi)(1/p_1 - 1/p_2)], & 0 \leq x \leq \xi, \\ (1 - x)[x/p_2 + \xi^2(1/p_1 - 1/p_2)], & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Эта функция принадлежит $H^2(I) \cap H_0^1(I)$, но все же не является решением задачи (1.1), (1), (1.2) в смысле определения 1.2, ибо для нее не выполняется уравнение (1.17). Не выполняется несмотря на то, что $Lu - f = 0$ при $x \in (0, \xi) \cup (\xi, 1)$ и, следовательно,

*) При ссылках на формулы, теоремы, определения и т.д. из других лекций будем указывать одновременно и номер лекции и номер формулы. Например, запись (4.11) будет означать, что имеется в виду формула (11) из четвертой лекции.

$$\int_0^\xi (Lu - f)v dx + \int_\xi^1 (Lu - f)v dx = 0. \quad (3)$$

Докажем это утверждение. Так как $u(x)$ из (2) принадлежит $C^1(\bar{I})$, а $p(x)$ разрывна в точке $x = \xi$, то $p(x)u'(x)$ также разрывна в этой точке (если, конечно, $u'(\xi) \neq 0$). Но чтобы подставить $u(x)$ в уравнение (1.17) нужно функцию $p(x)u'(x)$ продифференцировать. В рамках классической теории этого сделать нельзя, однако можно вычислить обобщенную производную этой функции, которая определяется при помощи соотношения (1.13). Итак, $Lu - f$ есть обобщенная функция, т.е. линейный непрерывный функционал, который на любой функции из $C_0^\infty(I)$ задается соотношением $(Lu - f, v)$. С учетом вида (1.1) оператора L имеем

$$(Lu - f, v) = - \left(\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right), v \right) + (qu - f, v), \quad (4)$$

а по определению обобщенной производной

$$\left(- \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right), v \right) = \left(p \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right). \quad (5)$$

Второе слагаемое правой части (4) и правая часть (5) представляют собой обобщенные функции, порожденные обычными локально суммируемыми функциями и, следовательно,

$$(Lu - f, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx. \quad (6)$$

Преобразуем правую часть (6) при помощи интегрирования по частям. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (pu'v' + quv - fv) dx &= \int_0^\xi (pu'v' + quv - fv) dx + \int_\xi^1 (pu'v' + quv - fv) dx = \\ &= \int_0^\xi [-(pu')' + qu - f]v dx + pu'v|_0^\xi + \int_\xi^1 [-(pu')' + qu - f]v dx + pu'v|_\xi^1. \end{aligned}$$

Так как $v(0) = v(1) = 0$, а $u'(\xi)$ и $v(x)$ непрерывны при $x = \xi$, то отсюда и из (6), (3) заключаем, что

$$(Lu - f, v) = \int_0^\xi (Lu - f)v dx + \int_\xi^1 (Lu - f)v dx + \quad (7)$$

$$+ p(x)u'(x)v(x)|_{x=\xi-0} - p(x)u'(x)v(x)|_{x=\xi+0} = (p_1 - p_2)u'(\xi)v(\xi) \neq 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Из (7) следует, что если коэффициент $p(x)$ разрывен в точке $x = \xi$, а $u(x) \in H^2(I)$, то $Lu - f$ представляет собой сингулярную обобщенную функцию, именно, сосредоточенную в точке $x = \xi$ дельта-функцию Дирака, умноженную на скачок $p(x)$ в этой точке и $-u'(x)$, ибо согласно (1.12)

$$[p(\xi - 0) - p(\xi + 0)]u'(\xi)v(\xi) = -[p(\xi + 0) - p(\xi - 0)](u'(x)\delta(x - \xi), v(x)).$$

2. Задача о минимуме квадратичного функционала. Обобщенное решение

Прежде чем давать новое расширение понятия решения, делающее разрешимой и задачу (1.1), (1), (1.2), рассмотрим так называемую задачу о минимизации функционала. Введем в рассмотрение *квадратичный функционал*

$$J(w) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 \left[p(x) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + q(x)w^2 \right] dx - \int_0^1 f(x)w dx. \quad (8)$$

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ суммируемы и ограничены на I , а $f(x) \in L_2(I)$. Тогда функционал (8) непрерывен на $H^1(I)$. Будем предполагать, что $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (1.3) и поставим *задачу минимизации* об отыскании функции $u(x) \in H_0^1(I)$, доставляющей минимум функционалу (8)

$$u(x) \in H_0^1(I) : \quad J(u) = \inf_{w \in H_0^1(I)} J(w). \quad (9)$$

Введем в рассмотрение *билинейную форму*

$$a(v, w) = \int_0^1 [p(x)v'(x)w'(x) + q(x)v(x)w(x)] dx, \quad (10)$$

т.е. форму, линейную по каждому из своих двух аргументов, и *линейную форму*

$$l(w) = \int_0^1 f(x)w(x)dx. \quad (11)$$

Очевидно, что билинейная форма $a(v, w)$ *симметрична*, а в силу (1.3) отвечающая ей *квадратичная форма* неотрицательна, т.е.

$$a(v, w) = a(w, v), \quad a(v, v) \geq 0. \quad (12)$$

С использованием (10), (11) функционал (8) можно представить в виде

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w). \quad (13)$$

Наряду с задачей (9) о минимизации функционала (13) введем в рассмотрение следующую задачу: среди функций $H_0^1(I)$ найти такую, которая при любой функции $v(x) \in H_0^1(I)$ удовлетворяет уравнению

$$a(u, v) = l(v). \quad (14)$$

Более коротко сформулированная задача записывается так: найти

$$u(x) \in H_0^1(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (15)$$

Задача (15) называется *вариационной задачей*, а уравнение (14) — *вариационным уравнением*. Имеет место

Т е о р е м а 1. *Задача минимизации (9) и вариационная задача (15) эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $u(x)$ — решение задачи минимизации (9). Покажем, что $u(x)$ одновременно является решением и вариационной задачи (15). Представим произвольную функцию $w \in H_0^1(I)$ в виде $w = u + tv$, где t — числовой параметр, а v — тоже произвольная функция. На основании (12)

$$a(w, w) = a(u + tv, u + tv) = a(u, u) + 2ta(u, v) + t^2a(v, v)$$

и, следовательно, с учетом (13)

$$J(w) = J(u) + t[a(u, v) - l(v)] + \frac{t^2}{2}a(v, v).$$

Тем самым, $J(u+tv)$ как функция t при фиксированных $u(x)$ и $v(x)$ есть квадратичный многочлен, минимум которого достигается там, где его первая производная

$$\frac{d}{dt}J(u+tv) = [a(u, v) - l(v)] + ta(v, v)$$

обращается в нуль. С другой стороны в силу (9)

$$J(u) \leq J(u+tv)$$

и, следовательно, $J(u+tv)$ как функция t имеет минимум в точке $t = 0$. Сопоставляя эти два факта, находим, что минимум реализуется при выполнении условия $a(u, v) - l(v) = 0$. Тем самым, $u(x)$ — решение вариационной задачи (15).

2°. Пусть теперь $u(x)$ — решение вариационной задачи (15). Докажем, что $u(x)$ минимизирует функционал (13). Оценим значение этого функционала снизу. Как и выше, с учетом (12) и (13) находим, что

$$J(w) = J(u+v) = J(u) + [a(u, v) - l(v)] + \frac{1}{2}a(v, v).$$

По предположению $u(x)$ есть решение вариационной задачи и, следовательно, выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Тем самым,

$$J(w) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v).$$

Но в силу (12) $a(v, v)$ неотрицательна и, следовательно,

$$J(w) \geq J(u).$$

А это и означает, что $u(x)$ минимизирует $J(w)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. При доказательстве теоремы 1 практически нигде не использовался конкретный вид $a(u, v)$ и $l(v)$, равно как и конкретный вид пространства, где ищется решение. Единственная апелляция к виду $a(v, v)$ была вызвана необходимостью обоснования ее неотрицательности. Тем самым, утверждение об эквивалентности указанных формулировок остается справедливым и при других реализациях $a(u, v)$

и $l(v)$ и для решений из других пространств, лишь бы на этих пространствах $a(v, v)$ была неотрицательна.

Т е о р е м а 2. *Решение почти всюду задачи (1.1), (1.2) доставляет минимум функционалу (8) в $H_0^1(I)$. Функция $u(x) \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$, минимизирующая $J(w)$, является решением задачи (1.1), (1.2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 задача минимизации и вариационная задача эквивалентны. Поэтому для доказательства теоремы достаточно сопоставления решения задачи (1.1), (1.2) с решением вариационной задачи (15). Пусть $u(x)$ — решение задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим выражение

$$a(u, v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx - \int_0^1 fvdx.$$

В первом слагаемом первого интеграла можно произвести интегрирование по частям, перебросив производную с $v(x)$ на $(p(x)u'(x))$. Предполагая, что $v(x) \in H_0^1(I)$, будем иметь

$$a(u, v) - l(v) = \int_0^1 [-(pu')' + qu - f]vdx = \int_0^1 (Lu - f)vdx \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Но в силу (1.1) или (1.17) правая часть этого соотношения равна нулю, т.е. $a(u, v) - l(v) = 0$ и, следовательно, $u(x)$ удовлетворяет вариационному уравнению (14). Так как, к тому же, $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2) и достаточно гладкая (не хуже $H^2(I)$), то $u(x) \in H_0^1(I)$ и, следовательно, является решением вариационной задачи (15).

В другую сторону. Пусть $u(x)$ — достаточно гладкое решение вариационной задачи (15): $u(x) \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Тогда

$$0 = a(u, v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx - \int_0^1 fvdx.$$

Снова можно произвести интегрирование по частям, что приводит к соотношению

$$\int_0^1 (Lu - f)vdx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

повторяющему соотношению (1.17), которое и определяет решение почти всюду. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что в предположениях (1.3), (1.5) теоремы 1.2 относительно коэффициентов задача минимизации (9) и краевая задача (1.1), (1.2) эквивалентны. Но решение задачи минимизации может существовать и при менее жестких предположениях. В частности, для постановки этой задачи нет необходимости предполагать дифференцируемость и даже непрерывность коэффициента $p(x)$. Если при этих условиях решение задачи минимизации (9) (а, следовательно, и вариационной задачи (15)) существует, то можно объявить его решением и задачи (1.1), (1.2).

О п р е д е л е н и е. Функция $u(x)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), если она является решением вариационной задачи (15).

Т е о р е м а 3. Если $p(x)$ и $q(x)$ суммируемы и ограничены, а $f(x) \in L_2(I)$, то при выполнении условий (1.3) обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует и единственно.

З а м е ч а н и е 3. Уравнение (14) с $a(u, v)$ и $l(v)$ из (10), (11), при помощи которого мы определили обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), было введено нами как условие минимума функционала (13). Однако это уравнение можно получить и иным путем, не связанным с задачей минимизации. Именно, умножая уравнение (1.1) на функцию $v(x) \in H_0^1(I)$ и интегрируя результат по I , после интегрирования по частям получим (14). Такой подход можно использовать для определения обобщенного решения и в том случае, когда эквивалентная задача о минимизации функционала отсутствует. Например, для уравнения

$$-(pu')' + r(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (16)$$

с граничными условиями (1.2) вариационное уравнение имеет вид

$$\int_0^1 (pu'v' + ru'v + quv)dx = \int_0^1 fvdx. \quad (17)$$

З а м е ч а н и е 4. В вариационном исчислении функционал $\frac{d}{dt}J(u + tv)|_{t=0}$ называется первой вариацией функционала J и обозначается δJ , а уравнение (1.1) называется уравнением Эйлера функционала (8).

З а м е ч а н и е 5. Условия (1.3) обеспечивают не только неотрицательность квадратичной формы $a(v, v)$, как это отмечено в (12), но и ее

положительную определенность в $H_0^1(I)$. Доказательство этого факта будет дано в лекции 11.

3. Главные и естественные граничные условия

Рассмотренная нами краевая задача (1.1), (1.2) называется *первой краевой задачей*, а краевые условия (1.2) — *краевыми условиями первого рода*. Обратимся к другим краевым задачам для уравнения (1.1).

Пусть требуется найти решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет краевым условиям

$$u'(0) = u'(1) = 0. \quad (18)$$

Краевая задача (1.1), (18) называется *второй краевой задачей*, а краевые условия (18) — *краевыми условиями второго рода*. Чтобы задача (1.1), (18) была однозначно разрешима нужно дополнить условия (1.3) требованием

$$q(x) \neq 0. \quad (19)$$

Вариационная формулировка задачи (1.1), (18) такова: найти

$$u(x) \in H^1(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(I), \quad (20)$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются соотношениями (10) и (11), соответственно. Обобщенным решением задачи (1.1), (18) называется решение вариационной задачи (20).

Существенное различие в вариационных формулировках для первой и второй краевых задач состоит в том, что решение второй краевой задачи ищется среди *всех* функций $H^1(I)$, в то время как в случае первой краевой задачи (1.1), (1.2) решение ищется среди $H_0^1(I)$, т.е. среди функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Функции, среди которых ищется решение задачи (20) "свободны" на концах отрезка I и не обязаны удовлетворять каким бы то ни было граничным условиям. В этой связи про краевые условия (18) говорят, что они естественные. Краевые условия (1.2) называют главными.

Таким образом, *естественными граничными условиями* называются такие условия, которым должно удовлетворять решение краевой задачи и не обязаны удовлетворять функции, среди которых имеется решение

при вариационной постановке задачи. Те же граничные условия, которым должны удовлетворять и решение краевой задачи и функции, среди которых ищется решение при вариационной формулировке, называются *главными*.

Пусть теперь требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0) = 0, \quad p(1)u'(1) + \kappa u(1) = g. \quad (21)$$

Как мы уже говорили, первое из условий (21) есть краевое условие первого рода, в то время как второе из них — это *краевое условие третьего рода*. Если бы на обоих концах были заданы краевые условия третьего рода, то задача называлась бы *третьей краевой задачей*. В нашем же случае это *смешанная краевая задача*. Условия (1.3), дополненные требованием

$$\kappa \geq 0, \quad (22)$$

достаточны для однозначной разрешимости задачи (1.1), (21).

Чтобы дать вариационную постановку смешанной задачи (1.1), (21) нужно задать новые по сравнению с (10), (11) билинейную и линейную формы. Пусть

$$a_1(u, v) = a(u, v) + \kappa u(1)v(1), \quad (23)$$

$$l_1(v) = l(v) + gv(1), \quad (24)$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ заданы (10) и (11) соответственно.

Введем в рассмотрение новое подпространство пространства $H^1(I)$. Пусть

$$\tilde{H}^1(I) = \{v(x) \in H^1(I) \mid v(0) = 0\}. \quad (25)$$

Вариационная формулировка задачи (1.1), (21) имеет вид: найти

$$u(x) \in \tilde{H}^1(I) : \quad a_1(u, v) = l_1(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I). \quad (26)$$

Тем самым, граничное условие третьего рода является естественным.

Граничные условия (1.2) и (18) были однородными. Неоднородность естественного граничного условия из (21) привела к добавлению к линейной форме $l(v)$ нового слагаемого (24). Укажем вариационную формулировку задачи для уравнения (1.1) с *неоднородными главными граничными условиями*. Пусть требуется найти такое решение уравнения (1.1), которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1. \quad (27)$$

Обозначим через

$$H_E^1(I) = \{v \in H^1(I) | v(0) = g_0, v(1) = g_1\}$$

множество функций из пространства $H^1(I)$, которые удовлетворяют граничным условиям (27). Будем искать такую функцию $u \in H_E^1(I)$, которая при любой функции $v \in H_0^1(I)$ удовлетворяет уравнению (14) с $a(u, v)$ и $l(v)$ из (10), (11), т.е.

$$u \in H_E^1(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (28)$$

Это и есть вариационная формулировка задачи (1.1), (27). Обратим внимание на то, что здесь функции $u(x)$ и $v(x)$ берутся из разных множеств: решение $u(x)$ должно удовлетворять главным граничным условиям (27) и потому берется из $H_E^1(I)$, а так как граничные условия (27) главные, то $v(x)$ обязана обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = 1$.

4. Условия на разрыве

Выясним, каким условиям удовлетворяет обобщенное решение в точках разрыва коэффициента $p(x)$. Пусть функция $p(x)$ имеет единственную точку разрыва $x = \xi$, т.е. $p(\xi - 0) \neq p(\xi + 0)$, а на $(0, \xi)$ и $(\xi, 1)$ непрерывно дифференцируема. Из (15), (10), (11) находим, что

$$\begin{aligned} 0 &= a(u, v) - l(v) = \int_0^1 (pu'v' + quv - fv)dx = \\ &= \int_0^\xi (pu'v' + quv - fv)dx + \int_\xi^1 (pu'v' + quv - fv)dx. \end{aligned}$$

Используя теперь для преобразования слагаемых с производными интегрирование по частям и принимая во внимание (1.1), (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\xi [-(pu')' + qu - f]v dx + pu'v|_{x=\xi-0} + \\ &+ \int_\xi^1 [-(pu')' + qu - f]v dx - pu'v|_{x=\xi+0} = \\ &= -[p(\xi+0)u'(\xi+0) - p(\xi-0)u'(\xi-0)]v(\xi), \end{aligned}$$

ибо $v(x)$ непрерывна как всякая функция из $H^1(I)$.*) Так как, вообще говоря, $v(\xi) \neq 0$, то в точке разрыва коэффициента $p(x)$ должно выполняться условие

$$p(\xi+0)u'(\xi+0) - p(\xi-0)u'(\xi-0) = 0,$$

т.е. функция $p(x)u'(x) = -w(x)$ — поток в этой точке — должна быть непрерывной. Ясно, что если $p(x)$ непрерывна, то это условие остается справедливым, но упрощается до условия непрерывности функции $u'(x)$. Итак, обобщенное решение имеет непрерывную производную только в точках непрерывности $p(x)$.

Для непосредственного отыскания обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений в точке разрыва коэффициента $p(x)$ нужно поставить еще одно условие для $u(x)$. Принимая во внимание, что $u(x) \in H_0^1(I)$, а, следовательно, непрерывна на I и в точке $x = \xi$, в частности, заключаем, что обобщенное решение в точке разрыва коэффициента $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям

$$[u]|_{x=\xi} \equiv u(\xi+0) - u(\xi-0) = 0, \quad [pu']|_{x=\xi} = 0, \quad (29)$$

которые иногда называют *условиями сопряжения*.

Легко проверить, что функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), (1) при $x \in (0, \xi) \cup (\xi, 1)$, граничным условиям (1.2) и условиям

*) Доказательство этого факта будет дано в лекции 11.

сопряжения (29), является обобщенным решением этой задачи и имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{x}{p_1} \left[\frac{\xi(1-\xi)(p_1-p_2)}{p_1(1-\xi) + p_2\xi} + 1 - x \right], & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1-x}{p_2} \left[\frac{\xi(1-\xi)(p_2-p_1)}{p_1(1-\xi) + p_2\xi} + x \right], & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

У читателя может возникнуть совершенно законный вопрос: а не являются ли условия сопряжения (29) слишком надуманными в угоду математической стройности теории? Оказывается, нет. Именно такие условия возникают в реальных прикладных задачах. В самом деле, обратимся, например, к тепловой интерпретации уравнения (1.1). Известно, что температура $u(x)$ является непрерывной функцией координаты x . Вне зависимости от того, непрерывен или разрывен коэффициент теплопроводности $p(x)$, непрерывным является и тепловой поток $w(x) = -p(x)u'(x)$. Тем самым, при тепловой интерпретации уравнения (1.1) условия сопряжения (29) являются вполне естественными. Аналогичная ситуация имеет место и для других прикладных задач.

5. Упражнения

1. Доказать, что при достаточной гладкости коэффициентов задачи (1.1), (18) и (20) эквивалентны.

2. Указать дифференциальную формулировку следующей вариационной задачи:

$$u \in H^1(I) : \quad a_2(u, v) = l_2(v) \quad \forall v \in H^1(I),$$

где

$$\begin{aligned} a_2(u, v) &= a(u, v) + \kappa_0 u(0)v(0) + \kappa_1 u(1)v(1), \\ l_2(v) &= l(v) + g_0 v(0) + g_1 v(1), \end{aligned}$$

а $a(u, v)$ и $l(v)$ определены в (10), (11).

3. Сформулировать задачу минимизации функционала (8), эквивалентную вариационной задаче (28).

4. Доказать, что решение вариационной задачи (28) при достаточной гладкости коэффициентов является решением задачи (1.1), (27).

5. Убедиться, что функция (30) в самом деле есть обобщенное решение задачи (1.1), (1), (1.2).

6. Вариационное уравнение имеет вид

$$\int_0^1 u'' v'' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (31)$$

Какому дифференциальному уравнению оно отвечает?

7. Решение вариационного уравнения (31) при $x = 0$ подчинено одной из следующих пар граничных условий

$$\begin{aligned} u(0) = u'(0) = 0; & \quad u(0) = u''(0) = 0; \\ u(0) = u'''(0) = 0; & \quad u'(0) = u''(0) = 0; \\ u'(0) = u'''(0) = 0; & \quad u''(0) = u'''(0) = 0. \end{aligned}$$

Рассортировать эти граничные условия по принципу главные — естественные.

8. Найти обобщенное из $H^1(I)$ решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} (p_1 u')' = 0, \quad 0 < x < 1/2, \quad (p_2 u')' = 0, \quad 1/2 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad p_2 u'(1) + \kappa u(1) = g, \end{aligned}$$

где p_1 и p_2 — положительные постоянные.

9. Найти обобщенное решение следующей задачи:

$$u \in \tilde{H}^1(I) : \int_0^{1/2} p_1 u' v' dx + \int_{1/2}^1 p_2 u' v' dx + \kappa u(0) v(0) = g v(0) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I),$$

где $p_i = \text{const}$, а $\tilde{H}^1(I) = \{v(x) \in H^1(I) \mid v(1) = 0\}$.

10. Дать вариационную формулировку и найти обобщенное из $H^1(I)$ решение следующей задачи:

$$(p u')' = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

где

$$p = \begin{cases} p_1 = \text{const}, & 0 < x < 1/2, \\ p_2 = \text{const}, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Лекция 3

МЕТОДЫ РИТЦА, ГАЛЕРКИНА И КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ

1. Методы Ритца и Галеркина

Обратимся к построению приближенных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Начнем с задачи (1.1), (1.2). Как было установлено на предыдущей лекции, решение этой задачи эквивалентно отысканию функции $u(x) \in H_0^1(I)$, минимизирующей функционал (2.8), т.е. задаче (2.9). Тем самым, построив метод приближенной минимизации этого функционала, мы будем иметь и метод приближенного решения задачи (1.1), (1.2). Для приближенной минимизации функционала (2.8) или, что в силу (2.10), (2.11) то же самое, функционала (2.13), воспользуемся методом Ритца. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы минимизировать функционал не на всем пространстве, где он задан, а только на некотором конечномерном подпространстве этого пространства.

Пусть V^n — подпространство пространства $H_0^1(I)$ размерности n : $V^n \subset H_0^1(I)$, $\dim V^n = n$.

О п р е д е л е н и е 1. Назовем приближенным решением по методу Ритца (ритцевским решением) задачи (2.9) (и задачи (1.1), (1.2)) такую функцию

$$u^n(x) \in V^n : \quad J(u^n) = \min_{v^n \in V^n} J(v^n). \quad (1)$$

Чтобы реализовать метод (1), введем в V^n базис (он существует как в любом конечномерном пространстве), элементы которого обозначим через $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Любой элемент $v^n(x) \in V^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации $\{\varphi_j\}_1^n$. Пусть $u^n(x) \in V^n$ доставляет минимум функционалу (2.13) на V^n . Разложим $u^n(x)$ по элементам базиса

$$u^n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) \quad (2)$$

и подставим это разложение в (2.13); в результате получим квадратичную функцию n переменных c_1, \dots, c_n :

$$J(u^n) = \frac{1}{2}a(u^n, u^n) - l(u^n) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n a(\varphi_j, \varphi_l)c_jc_l - \sum_{j=1}^n l(\varphi_j)c_j. \quad (3)$$

Выберем коэффициенты c_j так, чтобы функция (3) принимала минимальное значение. Как известно из математического анализа, функция (3) достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial J(u^n)}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти производные легко вычисляются

$$\frac{\partial J(u^n)}{\partial c_k} = \sum_{l=1}^n a(\varphi_k, \varphi_l)c_l - l(\varphi_k).$$

Приравнивая их нулю, получим систему Рунца:

$$\sum_{l=1}^n a(\varphi_k, \varphi_l)c_l - l(\varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_j из разложения (2). Найдя коэффициенты c_j из решения системы (4) и подставив их в (2), получим элемент $u^n(x)$, который и будет приближенным решением задачи (1.1), (1.2).

К построению приближенного решения задачи (1.1), (1.2) можно подойти и несколько иначе. Воспользуемся тем, что решение этой задачи эквивалентно отысканию решения вариационного уравнения (2.15). Будем искать приближенное решение как такой элемент $u^n(x) \in V^n$, который удовлетворяет уравнению (2.15) при любой $v^n(x) \in V^n$.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем приближенным решением по методу Галеркина (галеркинским решением) задачи (2.15) (и задачи (1.1),(1.2)) функцию

$$u^n(x) \in V^n : \quad a(u^n, v^n) = l(v^n) \quad \forall v^n \in V^n. \quad (5)$$

Раскладывая решение $u^n(x)$ задачи (5) по базису $\{\varphi_j\}_1^n$ пространства V^n в виде (2) и полагая в (5) функцию $v^n(x)$ последовательно равной $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, для определения коэффициентов разложения c_j снова получим систему (4).

Если билинейная форма $a(u, v)$ симметрична, как в рассматриваемом нами случае (2.10), то метод Ритца и метод Галеркина приводит к одному и тому же приближенному решению. Если $a(u, v)$ несимметрична, то метод Ритца вообще неприменим, ибо в этом случае исходная краевая задача не допускает эквивалентной формулировки в виде задачи о минимизации функционала. Метод же Галеркина применим и в этом случае, если вариационная формулировка задачи существует.

З а м е ч а н и е 1. Приближенное по Ритцу–Галеркину решение $u^n(x)$ удовлетворяет тому же самому вариационному уравнению (2.14), что и точное решение задачи. Разница состоит лишь в том, что точное решение расположено в $H_0^1(I)$ и (2.14) должно выполняться на *всех* функциях $v(x) \in H_0^1(I)$, а приближенное решение ищется в $V^n \in H_0^1(I)$ и (2.14) удовлетворяется только на $v^n \in V^n$ (см. (5)).

Исследуем вопрос о разрешимости системы Ритца–Галеркина (4). Покажем, что при выполнении условий (1.3) система (4) с $a(u, v)$ из (2.10), как и ее прообраз — задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима. Обозначим через

$$A = [a(\varphi_k, \varphi_l)]_1^n \quad (6)$$

матрицу системы (4).

Т е о р е м а . Если билинейная форма $a(u, v)$ симметрична и положительно определена, то матрица A системы Ритца–Галеркина (6) также симметрична и положительно определена.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Симметрия матрицы A из (6) есть непосредственное следствие симметрии билинейной формы $a(u, v)$, в силу которой $a(\varphi_k, \varphi_l) = a(\varphi_l, \varphi_k)$. Докажем положительную определенность (а, следовательно, и невырожденность) матрицы A . Пусть $v^n = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j$ — произвольный элемент из V^n , а $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T$ — вектор его коэффициентов. Так как

$$\mathbf{b}^T A \mathbf{b} = \sum_{k,l=1}^n a(\varphi_k, \varphi_l) b_k b_l = a \left(\sum_{k=1}^n b_k \varphi_k, \sum_{l=1}^n b_l \varphi_l \right) = a(v^h, v^h) > 0,$$

то положительная определенность A установлена. Теорема доказана.

Неотрицательность билинейной формы (2.10) при выполнении условий (1.3) мы уже отмечали в предыдущей лекции (см.(2.12)), а положительность будет доказана в лекции 11.

Итак, система (4) однозначно разрешима.

Ну а как реально выбирать V^n ? В решении этого вопроса и расходятся классические методы Рунца и Галеркина с методом конечных элементов. При классическом подходе в качестве пространства V^n обычно берутся пространства алгебраических или тригонометрических многочленов конечной степени или какие-либо другие совокупности функций, заданных на I и удовлетворяющих главным граничным условиям.

Удовлетворение главным граничным условиям — одна из проблем классического подхода к методам Рунца и Галеркина для уравнений с частными производными при сколь-нибудь сложной форме области, ибо построение подпространств V^n , содержащих функции, для которых выполнены главные граничные условия на криволинейной границе, — не такое простое дело. (Разумеется, этой проблемы не существует в рассматриваемом нами сейчас одномерном случае.)

Вторая проблема классического подхода — трудность составления системы Рунца–Галеркина, связанная с тем, что коэффициенты этой системы выражаются через интегралы, вычисление которых, особенно при двух и большем числе независимых переменных, требует большой затраты труда.

Если базис в V^n выбран не слишком удачно (например, в рассматриваемом нами случае $\varphi_i = (1-x)x^i$, $i = 1, \dots, n$, а V^n —линейная оболочка φ_i), то матрица системы Рунца–Галеркина становится плохо обусловленной, что приводит к накоплению большой вычислительной погрешности при решении системы (4).

Плотная заполненность матрицы системы Рунца–Галеркина (отсутствие большого числа нулевых элементов) создает дополнительные трудности при решении системы, связанные с большой затратой труда.

Все эти проблемы в значительной степени удается решить при конечноэлементной реализации методов Рунца и Галеркина.

2. Пространство конечных элементов

Основная идея, отличающая метод конечных элементов (МКЭ) от других реализаций методов Рунца и Галеркина, состоит в следующем:

область, в которой требуется найти решение краевой задачи, разбивается на подобласти простой формы, называемые *конечными элементами*, а в качестве пространства V^n , в котором ищется приближенное решение, берется пространство так называемых "кусочных функций", определяемых по-своему на каждом конечном элементе и представляющих собой там достаточно простые функции, например, многочлены низкой степени.

Чтобы получить такое кусочное пространство, мы должны сначала разбить область (в нашем случае отрезок $\bar{I} = [0, 1]$) на конечное число элементов. На рис. 1 в качестве примера изображен отрезок \bar{I} , разбитый на три элемента $e^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ одинаковой длины $h = 1/3 = \text{mes } e^{(i)}$. Каждому элементу

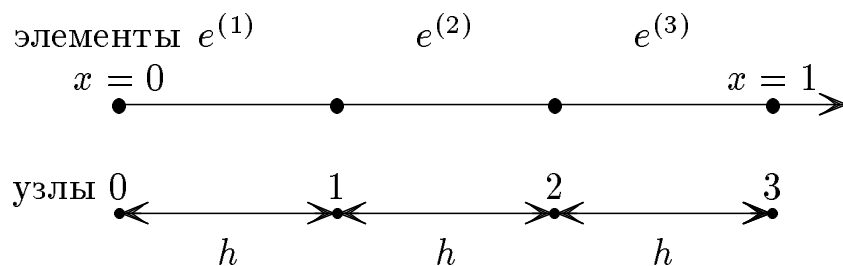


Рис. 1

сопоставляются принадлежащие ему выделенные точки, называемые *узлами*, которые играют важную роль в конечноэлементных конструкциях — они используются при параметризации конечноэлементного пространства. В примере, изображенном на рис. 1, узлами являются концы элементов. Их четыре и пронумерованы они числами $0, 1, 2, 3$. Обозначим координаты этих узлов через $x_i = ih$. Тогда

$$e^{(i)} = \{x \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Совокупность элементов и узлов иногда называют *конечноэлементной сеткой*.

Очевидно, что простейшим кусочным пространством является пространство кусочно-постоянных функций, постоянных на каждом элементе. Одна из таких функций изображена на рис. 2. Здесь вертикальными черточками обозначены границы элементов, а жирными точками — узлы. Однако для целей приближенного решения рассматриваемой нами краевой задачи (1.1), (1.2) это пространство не подходит, ибо

кусочно-постоянные функции разрывны (см. рис. 2), в то время как для использования в методах Рунге и Галеркина конечноэлементное пространство должно быть подпространством $H^1(I)$, любая функция которого, как будет показано в лекции 11, непрерывна.

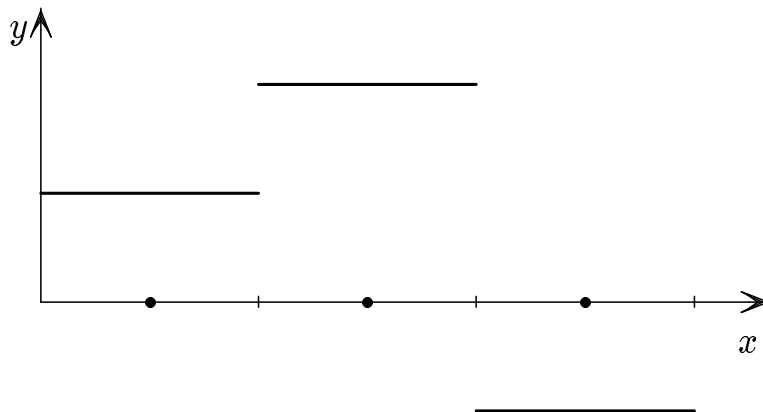


Рис. 2

Следующим по сложности кусочным пространством является пространство кусочно-линейных, линейных на каждом элементе функций. Нас будут интересовать только подпространства непрерывных функций из этого пространства (см. рис. 3). Ясно, что пространство кусочно-линейных непрерывных функций является подпространством $H^1(I)$, ибо производная кусочно-линейной непрерывной функции есть кусочно-постоянная функция и обе эти функции имеют интегрируемый квадрат.

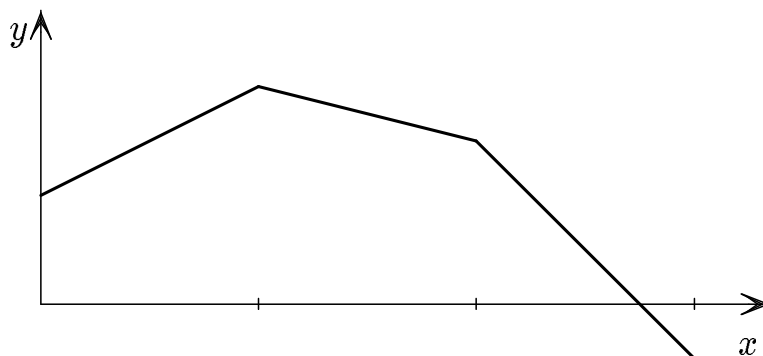


Рис. 3

Какова размерность этого пространства? Если отрезок I разбит на N элементов, а для задания линейной функции на каждом элементе требуется определение двух параметров, то размерность пространства

кусочно-линейных (не непрерывных) функций есть $2N$. Так как нас интересуют непрерывные функции, то израсходовав $(N - 1)$ параметров на удовлетворение условий непрерывности в общих для пары элементов узлах (в узлах 1 и 2 на рис. 1), находим, что размерность пространства кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций есть $2N - (N - 1) = N + 1$. Если нас интересует подпространство $H_0^1(I)$ пространства $H^1(I)$, то мы должны потребовать, чтобы кусочно-линейные функции обращались в нуль при $x = 0$ и $x = 1$. На это уйдет еще два параметра, так что размерность пространства кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе и обращающихся в нуль на концах отрезка I функций есть $(N - 1)$.

Обозначим через

$$S_1^h = \left\{ v^h(x) \in C(\bar{I}) \mid v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_1(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (8)$$

пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций, которое будем называть *конечноэлементным пространством*. Здесь $v^h(x)|_{e^{(i)}}$ обозначает сужение функции $v^h(x)$, заданной на \bar{I} , на элемент $e^{(i)}$, а $P_k(e^{(i)})$ — сужение на элемент $e^{(i)}$ пространства многочленов не выше k -ой степени. Как уже отмечалось, $S_1^h \subset H^1(I)$ и если отрезок I разбит на N элементов одинаковой длины $h = 1/N$, то размерность S_1^h , обозначаемая $\dim S_1^h = N + 1 = 1/h + 1$.

Обозначим

$$\mathring{S}_1^h = \{ v^h(x) \in S_1^h \mid v^h(0) = v^h(1) = 0 \}.$$

Очевидно, что $\mathring{S}_1^h \subset H_0^1(I)$, а $\dim \mathring{S}_1^h = N - 1$.

Построим базисы в S_1^h и \mathring{S}_1^h . Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Эта функция изображена на рис. 4; она кусочно-линейна и непрерывна. Тогда сужения на I функций

$$\varphi_i(x) = \hat{\varphi}\left(\frac{x}{h} - i\right), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (10)$$

линейно-независимы и могут быть приняты за базис в S_1^h . Вид функций

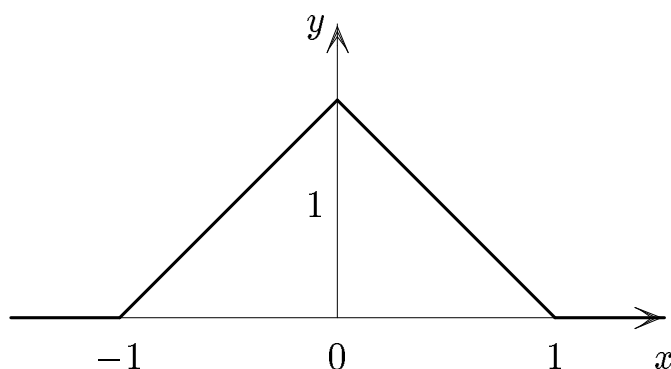


Рис. 4

φ_i при $N = 3$ изображен на рис. 5.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_N(x)$ не принадлежат $\overset{\circ}{S}_1^h$ так как $\varphi_0(0) = 1$, а $\varphi_N(1) = 1$. Исключая их из совокупности (10), находим, что оставшихся функций в (10) ровно столько, сколько необходимо для базиса в $\overset{\circ}{S}_1^h$.

Отметим два важных свойства введенного базиса (10), (9):

1. Каждая базисная функция $\varphi_i(x)$ отлична от нуля лишь в одном узле конечноэлементной сетки, и ее значение в этом узле равно единице.

2. Носитель каждой базисной функции $\varphi_i(x)$ минимален.

Если $v^h(x) \in S_1^h$ — произвольная функция и $v^h(x) = \sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x)$ — ее разложение по базису, то в силу первого свойства $v^h(x_i) = c_i$, т.е. коэффициенты разложения по базису — суть значения этой функции в узлах конечноэлементной сетки.

Следствием второго свойства является обращение в нуль большинства произведений базисных функций. Именно, $\varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0$ при $|i - j| \geq 2$. Тем самым, если ввести скалярное произведение в S_1^h , то каждая из базисных функций будет ортогональна большинству остальных. Функция φ_0 не будет ортогональна только φ_1 , функция φ_N не будет ортогональна только φ_{N-1} , а φ_i , $i = 1, \dots, N - 1$, не будет ортогональна только φ_{i-1} и φ_{i+1} . Это свойство базисных функций особенно ценно с точки зрения построения матрицы системы Рунге–Галеркина, ибо в этом случае матрица будет иметь очень много нулевых элементов и отпадает необходимость вычислять те из них, которые

заведомо равны нулю.

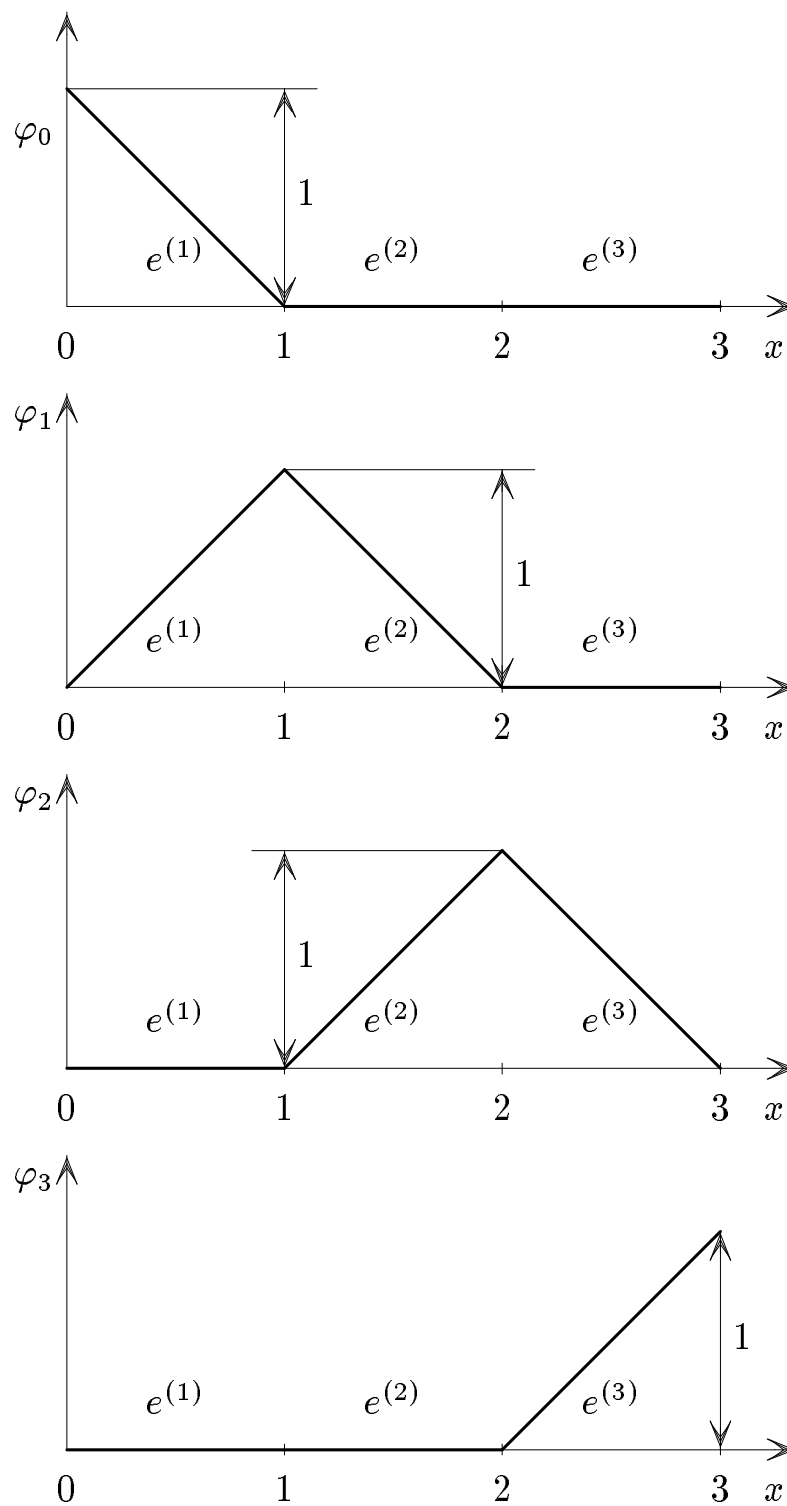


Рис. 5

3. Конечноэлементная аппроксимация

Применим метод Галеркина к решению задачи (1.1), (2.21) с использованием конечноэлементного пространства S_1^h , определяемого соотношением (8).

Напомним вариационную формулировку этой задачи: среди функций пространства $\tilde{H}^1(I)$, определяемого соотношением (2.25), найти такую функцию $u(x)$, которая при любых $v \in \tilde{H}_1(I)$ удовлетворяет уравнению $a(u, v) = l(v)$ (здесь мы ввели новые обозначения, опустив индексы "1" у билинейной и линейной форм), где согласно формулам (2.23), (2.24), (2.10), (2.11)

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 (pu'v' + quv)dx + \kappa u(1)v(1), \\ l(v) &= \int_0^1 fvdx + gv(1). \end{aligned} \quad (11)$$

Более коротко сказанное можно записать так: найти

$$u(x) \in \tilde{H}^1(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I). \quad (12)$$

Введем в рассмотрение пространство

$$\tilde{S}_1^h = \{v^h(x) \in S_1^h | v^h(0) = 0\}, \quad (13)$$

где S_1^h определяется соотношением (8). Очевидно, что $\tilde{S}_1^h \in \tilde{H}^1(I)$, $\dim \tilde{S}_1^h = N$, а базис в нем определяют функции (10), (9) с $i = 1, 2, \dots, N$.

Конечноэлементное решение $u^h(x)$ задачи (12), являющееся галеркинским решением этой задачи, согласно (5) определяется из условий:

$$u^h(x) \in \tilde{S}_1^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \quad (14)$$

Отсюда приходим к системе уравнений

$$\sum_{l=1}^N a(\varphi_l, \varphi_k) u_l - l(\varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (15)$$

где через u_l (вместо c_l) обозначены коэффициенты разложения приближенного решения $u^h(x) \in \tilde{S}_1^h$ по базису, т.е. $u^h(x) = \sum_{l=1}^n u_l \varphi_l(x)$. Такое переобозначение становится вполне естественным^{*)}, если принять во внимание первое свойство базисных функций (10), (9), в силу которого u_j является значением $u^h(x)$ в узле сетки, т.е. $u^h(x_j) = u_j$.

Принимая во внимание второе свойство базисных функций, находим, что $a(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $|i - j| > 1$ и, следовательно, система (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a(\varphi_1, \varphi_1)u_1 + a(\varphi_1, \varphi_2)u_2 &= l(\varphi_1), \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1})u_{i-1} + a(\varphi_i, \varphi_i)u_i + a(\varphi_i, \varphi_{i+1})u_{i+1} &= l(\varphi_i), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ a(\varphi_N, \varphi_{N-1})u_{N-1} + a(\varphi_N, \varphi_N)u_N &= l(\varphi_N). \end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что матрица системы (16) имеет лишь три ненулевых диагонали и в этом отношении близка к матрице системы уравнений метода конечных разностей.

Вычислим ее коэффициенты. С учетом (9)-(11), имеем:

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p\varphi'_i \varphi'_{i+1} + q\varphi_i \varphi_{i+1}] dx, \\ a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [p(\varphi'_i)^2 + q\varphi_i^2] dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ a(\varphi_N, \varphi_N) &= \int_{1-h}^1 [p(\varphi'_N)^2 + q\varphi_N^2] dx + \varkappa, \end{aligned}$$

а

$$l(\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i dx, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad l(\varphi_N) = \int_{1-h}^1 f\varphi_N dx + g.$$

^{*)} Более естественным было бы вместо u_j писать u_j^h , имея в виду, что речь идет о значениях в узлах приближенного решения. Однако верхний индекс h мы предпочитаем не писать из-за чрезмерной громоздкости получающихся выражений. Чтобы не путать u_j со значениями точного решения $u(x)$ в узлах сетки для последних будем использовать только обозначение $u(x_j)$ и помнить, что $u(x_j) \neq u_j = u^h(x_j)$.

Преобразуем эти формулы путем замены переменной интегрирования

$$t = \frac{x - x_i}{h} = \frac{x}{h} - i.$$

Для всякой функции $g(x)$ будем писать $g(x) = g(ht + x_i) = \hat{g}_i(t)$.

Принимая во внимание (10), (9), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi_i(x) &= \frac{1}{h} \frac{d}{dt} \hat{\varphi}(t) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1, & -1 < t < 0, \\ -1, & 0 < t < 1, \end{cases} \\ \frac{d}{dx} \varphi_{i+1}(x) &= \frac{d}{dx} \hat{\varphi}\left(\frac{x}{h} - i - 1\right) = \frac{1}{h} \frac{d}{dt} \hat{\varphi}(t - 1) = \frac{1}{h}, \quad 0 < t < 1, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{h} \hat{p}_i(t) + h \hat{q}_i(t) \hat{\varphi}(t) \hat{\varphi}(t - 1) \right] dt, \\ a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h} \hat{p}_i(t) + h \hat{q}_i(t) \hat{\varphi}^2(t) \right] dt, \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ a(\varphi_N, \varphi_N) &= \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{h} \hat{p}_N(t) + h \hat{q}_N(t) \hat{\varphi}^2(t) \right] dt + \varkappa, \\ l(\varphi_i) &= h \int_{-1}^1 \hat{f}_i(t) \hat{\varphi}(t) dt, \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ l(\varphi_N) &= h \int_{-1}^0 \hat{f}_N(t) \hat{\varphi}(t) dt + g. \end{aligned} \tag{17}$$

Вычисления можно еще несколько продвинуть, если предположить, что $p(x) \equiv p = \text{const}$, $q(x) \equiv q = \text{const}$, $f(x) \equiv f = \text{const}$. Так как

$$\int_0^1 \hat{\varphi}(t) \hat{\varphi}(t - 1) dt = \int_0^1 t(1 - t) dt = \frac{1}{6}, \quad \int_{-1}^1 \hat{\varphi}^2(t) dt = 2 \int_0^1 \hat{\varphi}^2(t) dt = \frac{2}{3},$$

а

$$\int_{-1}^1 \hat{\varphi}(t) dt = 1,$$

то отсюда и из (17) находим, что

$$\begin{aligned}
 a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= -\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}, & a(\varphi_i, \varphi_i) &= \frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}, & i &= 1, \dots, N-1, \\
 a(\varphi_N, \varphi_N) &= \frac{p}{h} + \frac{hq}{3} + \varkappa, & & & & \\
 l(\varphi_i) &= hf, & i &= 1, \dots, N-1, & l(\varphi_N) &= \frac{h}{2}f + g.
 \end{aligned} \tag{18}$$

С учетом (18) система (16) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}\right) u_1 + \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right) u_2 &= hf, \\
 \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right) u_{i-1} + \left(\frac{2p}{h} + \frac{2hq}{3}\right) u_i + \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right) u_{i+1} &= hf, \\
 & i = 2, \dots, N-1, \\
 \left(-\frac{p}{h} + \frac{hq}{6}\right) u_{N-1} + \left(\frac{p}{h} + \frac{hq}{3} + \varkappa\right) u_N &= g + \frac{h}{2}f.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Преобразуем эту систему, поделив первые $(N-1)$ уравнений на h . Несколько перегруппировав слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned}
 -\left(p - \frac{h^2q}{6}\right) \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] + qu_i &= f, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\
 \left(p - \frac{h^2q}{6}\right) \frac{u_N - u_{N-1}}{h} + \left(\varkappa + \frac{hq}{2}\right) u_N &= g + \frac{h}{2}f,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где u_0 — новая неизвестная, определяемая уравнением $u_0 = 0$, которое можно рассматривать как аппроксимацию первого из граничных условий (2.21). Тогда первые $(N-1)$ уравнений (20) представляют собой аппроксимацию уравнения (1.1), а последнее из уравнений (20) — аппроксимацию второго из граничных условий (2.21).

4. Неоднородные граничные условия первого рода

Пусть главное граничное условие из (2.21) является неоднородным

$$u(0) = \bar{g}. \quad (21)$$

Для того, чтобы сформулировать вариационную задачу, отвечающую дифференциальной задаче (1.1), (2.21), (21), введем аффинное многообразие

$$\tilde{H}_E^1(I) = \{v \in H^1(I) \mid v(0) = \bar{g}\}.$$

Тогда интересующая нас вариационная задача примет вид: найти

$$u \in \tilde{H}_E^1(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I),$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ те же, что и для задачи (1.1), (2.21), и задаются соотношениями (11). Приближенное решение теперь нужно искать среди функций $\tilde{H}_E^1(I) \cap S_1^h$, т.е.

$$u^h \in \tilde{H}_E^1(I) \cap S_1^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \quad (22)$$

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что задача (22) эквивалентна следующей задаче: найти $u^h \in S_1^h$ такую, что

$$u^h(0) = \bar{g}, \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \quad (23)$$

Из (23) следует, что $u^h(x) = \bar{g}\varphi_0(x) + \tilde{u}^h(x)$, где

$$\tilde{u}^h(x) \in \tilde{S}_1^h : \quad a(\tilde{u}^h, v^h) = l(v^h) - \bar{g}a(\varphi_0, v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h.$$

Поскольку $\tilde{u}^h = \sum_{l=1}^N u_l \varphi_l(x)$, где $u_l = u^h(x_l) = \tilde{u}^h(x_l)$, то для отыскания u_l имеем систему (15) с заменой первого уравнения на уравнение

$$\sum_{l=1}^N a(\varphi_l, \varphi_1) u_l - l(\varphi_1) + \bar{g}a(\varphi_0, \varphi_1) = 0.$$

5. Упражнения

1. Показать, что если коэффициенты разложения (2) являются решением системы (4), то (2) удовлетворяет (5).

2. Найти галеркинское из V^2 решение задачи

$$-u'' = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (21)$$

где V^2 есть линейная оболочка функций x и x^2 .

3. Найти галеркинское из V^3 решение задачи

$$-u'' = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где V^3 есть линейная оболочка функций $\sin(k\pi x)$ при $k = 1, 2, 3$.

4. Показать, что система функций (10),(9) линейно-независима.

5. Найти конечноэлементное из \tilde{S}_1^h решение задачи (21), где \tilde{S}_1^h — пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на $[0, \frac{1}{2}]$ и на $[\frac{1}{2}, 1]$ функций.

6. Рассматривая систему уравнений (19) как разностную схему, аппроксимирующую задачу (1.1), (2.21) с постоянными коэффициентами, показать, что ее погрешность аппроксимации есть $O(h^2)$ как для уравнения, так и для граничного условия.

7. Установить то же самое, что и в задаче 6, для системы (16), (17). (В случае переменных коэффициентов.)

Лекция 4

МКЭ — ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД

1. Задача о растяжении стержня

В предыдущей лекции мы изложили метод конечных элементов как метод Галеркина в специальном конечномерном пространстве S_1^h . Небезынтересным для понимания сути метода и его алгоритмических возможностей будет также знакомство с подходом к нему инженеров. Широкое использование в инженерном подходе матричного формализма весьма полезно при выполнении конкретных вычислений.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим пример задачи о растяжении однородного стержня постоянного сечения под действием собственного веса. Будем считать, что стержень вертикально подвешен за один конец, а второй его конец свободен (см. рис. 1.).

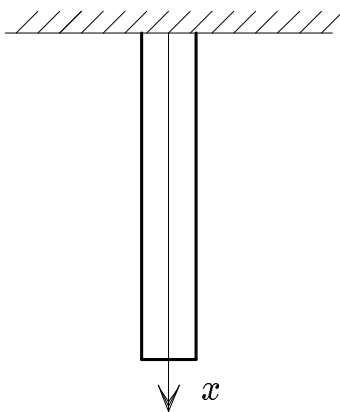


Рис. 1

Математически задача формулируется в виде смешанной задачи (1.1), (2.21) с

$$p(x) = E, \quad q(x) = 0, \quad f(x) = G, \quad \varkappa = g = 0, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга, G — вес единицы объема, а u — перемещение точки стержня с координатой x в результате растяжения. (Предполагается, что исходная длина стержня равна единице.) Именно

$$-Eu'' = G, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (2)$$

Эквивалентная задача о минимизации функционала (2.13) представляет собой формулировку принципа минимума полной потенциальной энергии

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma(x)\varepsilon(x)dx - \int_0^1 G u dx, \quad (3)$$

где $\varepsilon(x) = du/dx$ — относительное удлинение (продольная деформация), $\sigma(x) = E\varepsilon(x) = Edu/dx$ — натяжение (напряжение, в нормальном к оси стержня сечении). Обозначим еще через

$$w(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)\varepsilon(x) = \frac{1}{2}E (du/dx)^2 \quad (4)$$

плотность энергии деформации.

Будем решать эту задачу приближенно. Для этого разобьем стержень точками $x_i = ih$, $h = 1/N$, на N конечных элементов равной длины и будем считать, что на каждом конечном элементе $e^{(i)}$ приближенное решение представляется линейной функцией. Тем самым, для определения приближенного решения на элементе достаточно задать его значения в двух точках. Пусть эти точки — узлы элемента — суть его концы, т.е. x_{i-1} и x_i . Обозначим приближенное решение через $u^h(x)$, а его значения в узлах x_i — через u_i . Очевидно, что на конечном элементе $e^{(i)}$

$$u^h(x) = u_{i-1}\varphi_{i-1}^{(i)} + u_i\varphi_i^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}, \quad (5)$$

где

$$\varphi_{i-1}^{(i)} = \frac{(x_i - x)}{h}, \quad \varphi_i^{(i)} = \frac{(x - x_{i-1})}{h} \quad (6)$$

— так называемые функции формы конечного элемента (см. рис.2).

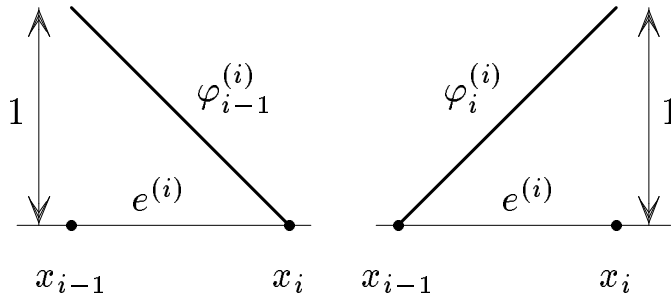


Рис. 2

Отметим, что на связь функции формы $\varphi_j^{(i)}$ с элементом $e^{(i)}$ указывает ее надстрочный индекс, помещенный в круглые скобки. Точно так же маркируется и сам элемент $e^{(i)}$. Договоримся и впредь связь каких-либо объектов с элементом $e^{(i)}$ обозначать надстрочным индексом i , помещенным в круглые скобки.

Пусть

$$\mathbf{u}^{(i)} = [u_{i-1} u_i]^T \quad (7)$$

— вектор значений приближенного решения в узлах элемента $e^{(i)}$ (вектор узловых значений элемента $e^{(i)}$), а

$$\Phi^{(i)} = [\varphi_{i-1}^{(i)} \varphi_i^{(i)}] \quad (8)$$

— матрица функций формы этого элемента. Используя правило умножения матрицы на вектор, соотношение (5) перепишем в виде

$$u^h(x) = \Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \quad (9)$$

Подставим приближенное решение $u^h(x)$ в функционал Π полной потенциальной энергии (3). Для этого представим сначала последний в виде суммы функционалов, каждый из которых определен на своем элементе

$$\Pi(u^h) = \sum_{i=1}^N \Pi^{(i)}(u^h), \quad (10)$$

где с учетом (4)

$$\Pi^{(i)}(u^h) = \int_{e^{(i)}} w^{(i)} dx - \int_{e^{(i)}} G u^h dx.$$

В силу (9), (8), (6) относительное удлинение $\varepsilon^{(i)}(x) = du^h(x)/dx$ представляется в виде $\varepsilon^{(i)}(x) = (d\Phi^{(i)}/dx) \mathbf{u}^{(i)}$, где

$$\frac{d}{dx} \Phi^{(i)} = \frac{1}{h} [-1 \quad 1], \quad (11)$$

а натяжение $\sigma^{(i)} = E\varepsilon^{(i)} = E(d\Phi^{(i)}/dx)\mathbf{u}^{(i)}$ и, следовательно, плотность энергии деформации на элементе $e^{(i)}$ есть

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= \frac{1}{2}\sigma^{(i)}\varepsilon^{(i)} = \frac{1}{2}(\sigma^{(i)})^T \varepsilon^{(i)} = \frac{1}{2} \left(E \frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{u}^{(i)} \right)^T \left(\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{u}^{(i)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T E \left[\frac{d\Phi_i}{dx} \right] \mathbf{u}^{(i)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Pi_E^{(i)}(u^h) := \int_{e^{(i)}} w^{(i)} dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{u}^{(i)},$$

где

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= \\ &= \int_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T E \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] dx = \int_{e^{(i)}} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{h} [-1 \quad 1] dx = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

— матрица жесткости элемента.

Далее, так как $\Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)T} \Phi^{(i)T}$, то

$$\Pi_G^{(i)}(u^h) := \int_{e^{(i)}} G u^h dx = \mathbf{u}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} G \Phi^{(i)T} dx = \frac{G}{h} \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} x_i - x \\ x - x_{i-1} \end{bmatrix} dx = Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

— вектор нагрузки (узловых сил) элемента.

Итак, вклад в полную потенциальную энергию стержня со стороны элемента $e^{(i)}$

$$\Pi^{(i)}(u^h) := \Pi_E^{(i)}(u^h) - \Pi_G^{(i)}(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(i)T} K^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} - \mathbf{u}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \quad (14)$$

на приближенном решении представляет собой квадратичную форму его узловых значений.

2. Сборка

Подставим (14) в (10). Для этого установим сначала связь между вектором узловых значений $\mathbf{u}^{(i)}$ элемента и полным (*глобальным*) вектором узловых значений

$$\mathbf{U}_{(f)} = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T. \quad (15)$$

(Смысл подстрочного индекса (f) будет объяснен чуть позже.) Легко проверить, что

$$\mathbf{u}^{(i)} = S^{(i)} \mathbf{U}_{(f)}, \quad (16)$$

где $S^{(i)}$ — прямоугольная $2 \times (N + 1)$ матрица вида

$$S^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 & \dots & 0}_{i-1} & 0 & 1 & \underbrace{0 & \dots & 0}_{N-i} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

иногда называемая *матрицей кинематических связей*. С учетом (16) соотношение (14) принимает вид

$$\Pi^{(i)}(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{(f)}^T S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \mathbf{U}_{(f)} - \mathbf{U}_{(f)}^T S^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)}.$$

Подставляя это представление в (10), найдем, что

$$\Pi(u^h) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{(f)}^T K_{(f)} \mathbf{U}_{(f)} - \mathbf{U}_{(f)}^T \mathbf{F}_{(f)}, \quad (18)$$

где

$$K_{(f)} = \sum_{i=1}^N S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \quad (19)$$

— *глобальная матрица жесткости*, а

$$\mathbf{F}_{(f)} = \sum_{i=1}^N S^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \quad (20)$$

— *глобальный вектор нагрузки*.

Из (18) следует, что значение потенциальной энергии на приближенном решении есть квадратичная функция $(N + 1)$ переменных u_0, u_1, \dots, u_N , условием минимума которой является обращение в нуль ее первых производных. Выполняя требуемые дифференцирования и приравнявая полученные выражения нулю с учетом легко проверяемой симметрии $K_{(f)}$ получим систему уравнений

$$K_{(f)} \mathbf{U}_{(f)} = \mathbf{F}_{(f)}. \quad (21)$$

Поспешим оговориться, что это еще не та система, решение которой дает приближенное решение нашей задачи.*) Дело в том, что в проведенных нами рассуждениях нигде не делалось различий между конечными элементами (что очень важно с алгоритмической точки зрения) и поэтому мы, вообще говоря, не могли учесть условия закрепления на концах стержня. Сделаем это сейчас.

Согласно условиям задачи (2), искомое решение должно принимать нулевое значение при $x = x_0 = 0$. По введенной нами во второй лекции терминологии это главное граничное условие, и оно должно было быть учтено до того, как мы приступили к минимизации функционала. Поскольку мы этого не сделали, то неизвестная u_0 фигурировала как свободная и при получении системы (21) по ней проводилось дифференцирование функции (18) с приравниванием производной нулю. Из сказанного следует, что полученное таким способом уравнение не соответствует действительности и должно быть отброшено. Вместо него должно быть поставлено условие $u_0 = 0$. В силу тривиальности этого уравнения неизвестная u_0 вообще может быть исключена из преобразованной указанным способом системы (21), после чего ее порядок станет равным N . Обращаясь ко второму граничному условию задачи (2), констатируем, что оно является естественным и не вносит никаких возмущений в интеграл энергии (3). Следовательно, никаких изменений,

*) Именно об этом должен напоминать введенный ранее, но не объясненный, подстрочный индекс (f) — "флажок". Всякий, кому доводилось находиться на летном поле аэродрома в ожидании посадки на самолет, мог видеть стоящие рядом на предполетном обслуживании самолеты с развевающимися на них красными ленточками. Эти ленточки вывешиваются у всевозможных люков, открытых для проведения работ, в местах присоединения шлангов и проводов. Их назначение — сигнализировать о неготовности самолета к взлету. Введенный нами "флажок" (f) также должен сигнализировать о неготовности системы к решению.

связанных с этим граничным условием, вносить не нужно ни в матрицу $K_{(f)}$, ни в вектор $\mathbf{F}_{(f)}$.

Итак, пусть k_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, N$ — элементы матрицы $K_{(f)}$,

$$\mathbf{F}_{(f)} = [f_0 \dots f_N]^T = [f_0 \mathbf{F}^T]^T,$$

а

$$k_0 = [k_{01} k_{02} \dots k_{0N}]^T.$$

Тогда систему (21) можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} k_{00} & k_0^T \\ k_0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где K — матрица с элементами k_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, а $\mathbf{U} = [u_1 \dots u_N]^T$. Из (22) находим, что

$$\begin{aligned} k_{00}u_0 + k_0^T \mathbf{U} &= f_0, \\ k_0 u_0 + K \mathbf{U} &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений должно быть отброшено, а остальные могут быть переписаны в виде $K \mathbf{U} = \mathbf{F} - k_0 u_0$. Но $u_0 = 0$ и система уравнений для отыскания приближенного решения окончательно принимает вид

$$K \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (23)$$

3. Пример реализации

Покажем, что система (23) с учетом (1) совпадает с системой (3.19). Для этого проведем вычисления, предусмотренные формулами (19), (20). Положим для простоты $N=3$. В этом случае

$$\mathbf{U}_{(f)} = [u_0 u_1 u_2 u_3]^T, \quad \mathbf{u}^{(1)} = [u_0 u_1]^T, \quad \mathbf{u}^{(2)} = [u_1 u_2]^T, \quad \mathbf{u}^{(3)} = [u_2 u_3]^T,$$

а

$$S^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведя вычисления с использованием правила перемножения матриц, найдем, что

для элемента $e^{(1)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(1)} & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \end{matrix} \begin{matrix} & S^{(1)} & & \\ [1 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & 1 & 0 & 0] \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(1)} S^{(1)} & & \\ [1 & -1 & 0 & 0] \\ [-1 & 1 & 0 & 0] \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(1)T} & & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} \begin{matrix} & K^{(1)} S^{(1)} & & \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & S^{(1)T} K^{(1)} S^{(1)} & & \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix},$$

для элемента $e^{(2)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(2)} & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \end{matrix} \begin{matrix} & S^{(2)} & & \\ [0 & 1 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 1 & 0] \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(2)} S^{(2)} & & \\ [0 & 1 & -1 & 0] \\ [0 & -1 & 1 & 0] \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(2)T} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} \begin{matrix} & K^{(2)} S^{(2)} & & \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & S^{(2)T} K^{(2)} S^{(2)} & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{matrix},$$

для элемента $e^{(3)}$:

$$\frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(3)} & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \end{matrix} \begin{matrix} & S^{(3)} & & \\ [0 & 0 & 1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 1] \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & K^{(3)} S^{(3)} & & \\ [0 & 0 & 1 & -1] \\ [0 & 0 & -1 & 1] \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(3)T} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} \begin{matrix} & K^{(3)} S^{(3)} & & \\ \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & & & \end{matrix} = \frac{E}{h} \begin{matrix} & S^{(3)T} K^{(3)} S^{(3)} & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & & & \end{matrix}.$$

Далее

$$K_{(f)} = \sum_{i=1}^3 S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{matrix} S^{(1)T} & F^{(1)} & S^{(2)T} & F^{(2)} & S^{(3)T} & F^{(3)} & F_{(f)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & = Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \end{matrix}$$

Учет главного граничного условия при $x = 0$ и последующее исключение u_0 приводит к системе

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

которая совпадает с построенной на предыдущей лекции системой (3.19), если в последней положить $N=3$ и принять (1).

4. Упражнения

1. Выписать систему (23) в виде, аналогичном (24), для случая неравномерной сетки, т.е. для того случая, когда каждый элемент $e^{(i)}$ имеет свою длину, равную $h^{(i)}$.

2. Пусть $\Pi_q^{(i)}(u^h) = \int_{e^{(i)}} q(u^h)^2 dx = \mathbf{u}^{(i)T} M^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}$. Доказать, что матрица $M^{(i)}$, называемая *матрицей массы*, имеет вид

$$M^{(i)} = hq \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Лекция 5

ТЕХНОЛОГИЯ МКЭ

1. От элемента...

На предыдущих двух лекциях для задачи (1.1), (2.21) нами были построены уравнения МКЭ двумя различными способами: специальной ("кусочной") реализацией метода Галеркина и при помощи эвристических поэлементных рассуждений. Общим у этих способов было то, что приближенное решение на каждом элементе было линейным, а узлы располагались в концах элементов. Этого оказалось достаточно для того, чтобы оба способа привели к одним и тем же уравнениям и одному и тому же приближенному решению. Объясняется это тем, что второй способ на самом деле не выходит за рамки специальной ("кусочной") реализации метода Рунца, ибо принятое там представление приближенного решения на элементе привело к его (решения) непрерывности (а, следовательно, и принадлежности $H^1(I)$) на всем отрезке.

К этому способу можно было бы прийти и другим способом, используя следующие рассуждения. Если $\bar{I} = \bigcup_{i=1}^N e^{(i)}$, то пусть

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N a^{(i)}(u, v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^N l^{(i)}(v), \quad (1)$$

где $a^{(i)}(u, v)$ и $l^{(i)}(v)$ — сужения билинейной и линейной форм на элемент $e^{(i)}$, т.е., например, $l^{(i)}(v) = \int_{e^{(i)}} f v dx$. В силу (3.6)

$$A \equiv K = [a(\varphi_k, \varphi_l)]_1^n = \left[\sum_{i=1}^N a^{(i)}(\varphi_k, \varphi_l) \right]_1^n = \sum_{i=1}^N \left[a^{(i)}(\varphi_k|_{e^{(i)}}, \varphi_l|_{e^{(i)}}) \right]_1^n, \quad (2)$$

где $\varphi_k|_{e^{(i)}}$ — сужение базисной функции φ_k на элемент $e^{(i)}$. Соберем теперь все ненулевые сужения базисных функций φ_k на $e^{(i)}$, упорядочим их каким-либо способом, например, по возрастанию k и обозначим через $\varphi_p^{(i)}$. Будем их называть базисными функциями элемента $e^{(i)}$ или

функциями формы этого элемента. По функциям формы $\varphi_p^{(i)}$ построим матрицу

$$K^{(i)} = \left[a^{(i)}(\varphi_p^{(i)}, \varphi_q^{(i)}) \right], \quad (3)$$

размерность которой будет равна числу функций формы на элементе $e^{(i)}$. Назовем матрицу $K^{(i)}$ матрицей жесткости элемента $e^{(i)}$.

Далее, обозначим вектор правой части системы Ритца-Галеркина (3.4) через \mathbf{F} , т.е. пусть

$$\mathbf{F} = [l(\varphi_k)]_1^n.$$

Как и выше с учетом (1) находим, что

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \left[l^{(i)}(\varphi_k|_{e^{(i)}}) \right]_1^n. \quad (4)$$

Отсюда, используя $\varphi_p^{(i)}$, построим вектор

$$\mathbf{F}^{(i)} = \left[l^{(i)}(\varphi_p^{(i)}) \right] \quad (5)$$

той же размерности, что и $K^{(i)}$, который назовем вектором нагрузки элемента $e^{(i)}$.

Сравним формулы (3) и (5) с (4.12), (4.13). Для этого зададимся конкретной реализацией МКЭ, рассмотренной в лекции 3. В силу (3.9), (3.10) ненулевые сужения на элемент $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ будут иметь только две базисные функции $\varphi_{i-1}(x)$ и $\varphi_i(x)$. Обозначая их сужения на $e^{(i)}$ через $\varphi_{i-1}^{(i)}(x)$ и $\varphi_i^{(i)}(x)$, придем к функциям формы (4.6), введенным на предыдущей лекции. Убедимся теперь в том, что матрицы (3) и (4.12), также как и векторы (5) и (4.13), совпадают. Для этого достаточно принять во внимание (4.8), (4.11) и то, что вклад в потенциальную энергию деформации от элемента $e^{(i)}$ на приближенном решении — величина $\Pi_E^{(i)}(u^h)$, введенная на предыдущей лекции — есть не что иное, как $\frac{1}{2}a^{(i)}(u^h, u^h)$.

Сделанное наблюдение наводит на мысль всегда начинать построение МКЭ с рассмотрений на элементе. Так мы и будем поступать.

2. Технология сборки

Глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $F_{(f)}$ в предыдущей лекции мы построили путем вычислений по формулам (4.19) и (4.20) с использованием матриц жесткости $K^{(i)}$ и векторов нагрузки $F^{(i)}$ элементов $e^{(i)}$ вкуче с матрицами кинематических связей $S^{(i)}$. Сейчас мы покажем, как можно (и нужно) строить $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ без перемножений матриц и умножений матриц на векторы, предписываемых формулами (4.19), (4.20). Рассмотрим этот вопрос применительно к ситуации более общей, чем имела место в предыдущей лекции, с тем, чтобы излагаемой процедурой можно было пользоваться и в дальнейшем.

Пусть v — вектор, $\dim v$ — его размерность, а $v(k)$, $k=1, \dots, \dim v$ — его k -я компонента. Аналогично, пусть $A(k, l)$ — элемент матрицы A , стоящий в k -й строке и в l -том столбце.

2.1. *Матрица кинематических связей $S^{(i)}$* Опишем формально матрицу кинематических связей $S^{(i)}$, т.е. матрицу, устанавливающую связь между вектором узловых значений

$$\mathbf{u}^{(i)} = [u^{(i)}(1) \dots u^{(i)}(\dim \mathbf{u}^{(i)})]^T$$

элемента $e^{(i)}$ и глобальным вектором узловых значений

$$\mathbf{U}_{(f)} = [U_{(f)}(1) \dots U_{(f)}(\dim \mathbf{U}_{(f)})]^T$$

по формуле

$$\mathbf{u}^{(i)} = S^{(i)} \mathbf{U}_{(f)}. \quad (6)$$

Чтобы соотношение (6) имело место, матрица $S^{(i)}$ должна иметь $\dim \mathbf{u}^{(i)}$ строк и $\dim \mathbf{U}_{(f)}$ столбцов. Пусть

$$u^{(i)}(1) = U_{(f)}(j_1^{(i)}), \dots, u^{(i)}(p) = U_{(f)}(j_p^{(i)}), \dots, u^{(i)}(\dim \mathbf{u}^{(i)}) = U_{(f)}(j_{\dim \mathbf{u}^{(i)}}^{(i)}), \quad (7)$$

т.е. компонента вектора $\mathbf{u}^{(i)}$ с номером p является $j_p^{(i)}$ -й компонентой вектора $\mathbf{U}_{(f)}$. Будем называть $j_p^{(i)}$ глобальным номером p -й компоненты вектора $\mathbf{u}^{(i)}$. Из глобальных номеров компонент вектора узловых значений $\mathbf{u}^{(i)}$ образуем упорядоченное множество

$$\mathfrak{M}^{(i)} = \left(j_1^{(i)}, j_2^{(i)}, \dots, j_p^{(i)}, \dots, j_{\dim \mathbf{u}^{(i)}}^{(i)} \right). \quad (8)$$

В силу (6), (7)

$$u^{(i)}(p) = \sum_{k=1}^{\dim \mathbf{U}_{(f)}} S^{(i)}(p, k) U_{(f)}(k) = U_{(f)}(j_p^{(i)})$$

и, следовательно, элементы p -й строки матрицы $S^{(i)}$ суть

$$S^{(i)}(p, k) = \delta_{j_p^{(i)}, k}, \quad (9)$$

где

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n \end{cases}$$

— символ Кронекера. Таким образом, в каждой строке матрицы $S^{(i)}$ имеется ровно один ненулевой элемент, равный 1, а так как все $j_p^{(i)}$ из (7),(8) различны, то в каждом столбце этой матрицы содержится не более одного ненулевого элемента. Соотношения (8), (9) полностью задают матрицу $S^{(i)}$. Матрицы $S^{(i)}$ будут использованы нами для построения глобальной матрицы жесткости $K_{(f)}$ и глобального вектора нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$ по формулам (4.19), (4.20), которые отныне приобретают более широкий смысл, чем тот, который был в них заложен в предыдущей лекции.

2.2. Матрица $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$. Опишем матрицу $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ из (4.19). По определению произведения матриц

$$\begin{aligned} \left[K^{(i)} S^{(i)} \right] (p, l) &= \sum_{q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} K^{(i)}(p, q) S^{(i)}(q, l), \\ \left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)T}(k, p) \left[K^{(i)} S^{(i)} \right] (p, l) = \\ &= \sum_{p,q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)T}(k, p) K^{(i)}(p, q) S^{(i)}(q, l). \end{aligned}$$

Но $S^{(i)T}(k, p) = S^{(i)}(p, k)$, а принимая во внимание еще и (9), будем иметь

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = \sum_{p, q=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \delta_{j_p^{(i)}, k} \delta_{j_q^{(i)}, l} K^{(i)}(p, q). \quad (10)$$

Отсюда следует, что если либо $k \notin \mathfrak{M}^{(i)}$ либо $l \notin \mathfrak{M}^{(i)}$, то

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = 0. \quad (11)$$

Это означает, что ненулевые элементы матрицы $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ могут располагаться только на пересечениях тех строк и столбцов, номера которых принадлежат множеству $\mathfrak{M}^{(i)}$ из (8).

Далее, так как двойная сумма в (10) может иметь лишь не более одного отличного от нуля слагаемого, то каждый отличный от нуля элемент матрицы $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ выражается через один элемент матрицы $K^{(i)}$ (совпадает с ним). Именно, если $k, l \in \mathfrak{M}^{(i)}$, т.е. $k = j_m^{(i)}$, $l = j_n^{(i)}$, то

$$\left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (k, l) = K^{(i)}(m, n). \quad (12)$$

Итак, соотношение (12) позволяет по $\mathfrak{M}^{(i)}$ и $K^{(i)}$ строить $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$ минуя непосредственное перемножение матриц.

2.3. *Матрица индексов.* Соберем информацию о множествах $\mathfrak{M}^{(i)}$ для всех конечных элементов (предполагая, что все $\dim \mathbf{u}^{(i)}$ одинаковы) в виде матрицы, которую будем называть *матрицей индексов* и обозначать через L . Располагая элементы $\mathfrak{M}^{(i)}$ по столбцу, будем иметь:

$$L = \begin{bmatrix} j_1^{(1)} & j_1^{(2)} & \cdots & j_1^{(N)} \\ j_2^{(1)} & j_2^{(2)} & \cdots & j_2^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{\dim \mathbf{u}^{(1)}}^{(1)} & j_{\dim \mathbf{u}^{(2)}}^{(2)} & \cdots & j_{\dim \mathbf{u}^{(N)}}^{(N)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Ясно, что $L(p, i) = j_p^{(i)}$ есть глобальный номер в $U_{(f)}$ p -ой компоненты вектора $\mathbf{u}^{(i)}$, т.е. (7) принимает вид

$$U_{(f)}(L(p, i)) = u^{(i)}(p). \quad (14)$$

Соотношения (14) полностью задают матрицу индексов (13).

При помощи матрицы индексов соотношение (12) можно переписать в следующем виде :

$$K^{(i)}(m, n) = \left[S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} \right] (L(m, i), L(n, i)). \quad (15)$$

Мы теперь можем описать весь процесс формирования (*сборки*) глобальной матрицы жесткости $K_{(f)}$. Поскольку, согласно (4.19), элементы $K_{(f)}$ образуются в результате сложения соответствующих элементов матриц $S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)}$, которые, в свою очередь либо являются нулями ((см.(11)), либо совпадают с элементами $K^{(i)}$ (см.(12)), то при формировании $K_{(f)}$ элемент $K^{(i)}(m, n)$ локальной матрицы жесткости конечного элемента $e^{(i)}$ должен стать аддитивной составляющей элемента $K_{(f)}(L(m, i), L(n, i))$ глобальной матрицы жесткости :

$$K^{(i)}(m, n) \rightarrow K_{(f)}(L(m, i), L(n, i)). \quad (16)$$

Пропусту говоря, глобальная матрица жесткости формируется следующим образом: сначала отведенный для нее массив заполняется нулями, а затем, согласно(15), элементы локальных матриц $K^{(i)}(m, n)$ прибавляются к числам, расположенным в позициях $(L(m, i), L(n, i))$.

2.4. *Глобальный вектор нагрузки.* Что касается формирования глобального вектора нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$ из (4.20), то так как

$$\begin{aligned} \left[S^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \right] (k) &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)T}(k, p) F^{(i)}(p) = \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} S^{(i)}(p, k) F^{(i)}(p) = \\ &= \sum_{p=1}^{\dim \mathbf{u}^{(i)}} \delta_{j_p^{(i)}, k} F^{(i)}(p) = \begin{cases} 0, & k \notin \mathfrak{M}^{(i)} \\ F^{(i)}(p), & k = j_p^{(i)} \in \mathfrak{M}^{(i)} \end{cases}, \end{aligned}$$

то ненулевые компоненты $S^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)}$ имеют номера, перечисленные в $\mathfrak{M}^{(i)}$, и совпадают с соответствующими компонентами $\mathbf{F}^{(i)}$ согласно (14). Отсюда

$$F^{(i)}(m) \rightarrow F_{(f)}(L(m, i)). \quad (17)$$

3. Пример

Применим описанную процедуру сборки к построению матрицы жесткости $K_{(f)}$ и вектора нагрузки $F_{(f)}$, отвечающих конечноэлементному решению задачи (4.2) при помощи линейных конечных элементов, рассмотренных на предыдущей лекции. Пусть, как и в примере из предыдущей лекции, отрезок $[0,1]$ разбит на три элемента $e^{(i)}$ равной длины $h = 1/3$ (см.рис. 1). Принятая нами ранее нумерация узлов по формуле

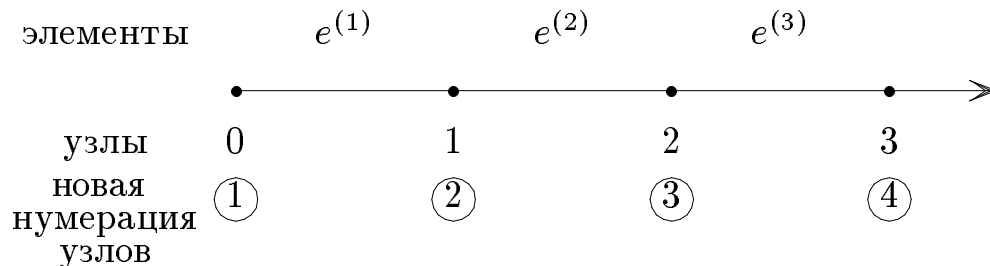


Рис. 1

$x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, 3$, теперь нас не устраивает, ибо чтобы уложиться в формальную схему, глобальные номера должны принимать значения от 1 до $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 4$. Перенумеруем узлы так, как это изображено на рис.1 в кружочках. На элементе $e^{(i)}$ локальную нумерацию узлов осуществим как изображено на рис. 2.

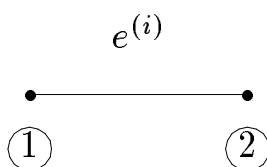


Рис. 2

В рассматриваемом примере $N = 3$, $\dim \mathbf{u}^{(i)} = 2$, $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 4$. Матрица жесткости и вектор нагрузки элемента задаются соотношениями (4.12), (4.13) соответственно. Выпишем матрицу индексов. Согласно (14) и рис.1, 2 она имеет следующий вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Соотношения (4.12), (4.13) и (18) полностью определяют $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Построим их. Из (16), (17) следует, что вклад матрицы $K^{(1)}$ в $K_{(f)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ в $\mathbf{F}_{(f)}$ определяется элементами первого столбца матрицы индексов (18) и осуществляется следующим образом: элемент $K^{(1)}(1, 1)$ складывается с элементом из первой строки и первого столбца формируемой матрицы $K_{(f)}$, первоначально состоящей из одних нулей, (запишем это так: $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$), элемент $K^{(1)}(2, 1)$ складывается с элементом из второй строки и первого столбца $(2, 1) \rightarrow (2, 1)$, а элементы $K^{(1)}(1, 2)$ и $K^{(1)}(2, 2)$ — с элементами первой и второй строк соответственно из второго столбца, т.е. $(1, 2) \rightarrow (1, 2)$, $(2, 2) \rightarrow (2, 2)$. Аналогично осуществляется вклад $\mathbf{F}^{(1)}$ в $\mathbf{F}_{(f)}$. Соберем список перемещений элементов матрицы $K^{(1)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ в таблицу:

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & \rightarrow & (1, 1) & (1, 2) & \rightarrow & (1, 2) & (1) & \rightarrow & (1) \\ (2, 1) & \rightarrow & (2, 1) & (2, 2) & \rightarrow & (2, 2) & (2) & \rightarrow & (2) \end{array}.$$

Тем самым, матрица $S^{(1)T}K^{(1)}S^{(1)}$ и вектор $S^{(1)T}\mathbf{F}^{(1)}$ из (4.19), (4.20) суть

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Gh \begin{bmatrix} \boxed{1/2} \\ \boxed{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где в рамочку заключены элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$.

$\frac{E}{h}$	/	1		-1					
	-1			1	1				
				-1					
							-1		1

Gh	/	1/2		
	1/2		1/2	
			1/2	1/2
				1/2

Рис. 3

На рис. 3 изображен процесс сборки $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Каждая ячейка, отведенная на этом рисунке для элементов $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ (изображена жирными линиями) разбита на три клеточки (по числу элементов на $[0, 1]$),

и вклад в $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ от $K^{(i)}$ и $F^{(i)}$ изображен в соответствующей клеточке, которые сопоставлены элементам согласно рис. 4.

1	2	3
---	---	---

Рис. 4

Описанному этапу сборки — вкладу элемента $e^{(1)}$ — отведены левые клеточки в каждой ячейке, а элементы $K^{(1)}$ и $F^{(1)}$ размещены в тех из них, которые имеют штриховку.

Вклад в $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ от остальных элементов осуществляются аналогично. Для визуализации сборки (на бумаге, но не в машине!) может оказаться полезным и далее выписывать таблицы новых позиций элементов $K^{(i)}$ и $F^{(i)}$ в $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$. Эти таблицы строятся из надлежащим образом повторенных элементов соответствующих столбцов L . Например, для элемента $e^{(2)}$ процесс формирования таблицы таков:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 2 \\ 3 & \rightarrow & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & \rightarrow & 2 \ 2 \\ 3 & \rightarrow & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 \ 3 & \rightarrow & (2, 2) \ (2, 3) \\ 3 & \rightarrow & (3, 2) \ (3, 3) \end{array}$$

Из рис. 3 находим, что система (4.21) имеет вид

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

а после учета главного граничного условия (4.1) получим

$$\frac{E}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = Gh \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

что (с точностью до нумерации значений приближенного решения) совпадает с (4.24).

4. Упражнения

1. Пусть несимметричная билинейная форма $a(u, v)$ задана соотношением (2.17), что соответствует несамосопряженному уравнению (2.16), а

$$a^{(i)}(u, v) = a_p^{(i)}(u, v) + a_r^{(i)}(u, v) + a_q^{(i)}(u, v),$$

где, например, $a_r^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r(x)u'(x)v(x)dx$. Используя (3), доказать, что, если конечноэлементное решение принадлежит S_1^h из (3.8), то матрица жесткости $K_r^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_r^{(i)}(u, v)$ при $r(x) = \text{const} = r$, есть

$$K_r^{(i)} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Сопряженное к (2.16) уравнение имеет вид

$$-(p(x)u')' - (r(x)u)' + q(x)u = f(x),$$

а соответствующее вариационное уравнение есть

$$\int_0^1 (p(x)u'v' + r(x)uv' + q(x)uv) dx = \int_0^1 f(x)v dx.$$

Пусть $a_r^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r(x)u(x)v'(x)dx$. В условиях упражнения 1 построить матрицу жесткости $K_r^{(i)}$, отвечающую билинейной форме $a_r^{(i)}(u, v)$.

3. В билинейную форму последнего элемента $e^{(N)}$ входит слагаемое

$$a_{\varkappa}^{(N)}(u, v) = \varkappa u(1)v(1),$$

где $\varkappa = \text{const}$. В условиях упражнения 1 построить матрицу жесткости $K_{\varkappa}^{(N)}$, отвечающую билинейной форме $a_{\varkappa}^{(N)}(u, v)$.

4. Построить глобальную матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме $a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$ и конечноэлементному пространству S_1^h из (3.8) при $N = 4$ и нумерации узлов, изображенной на рис. 5.

5. Построить глобальную матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме из упражнения 4 и конечноэлементному пространству кусочно-линейных непрерывных функций, если координаты концов элементов таковы, как на рис. 6, а нумерация обычная.

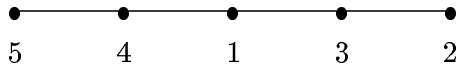


Рис. 5

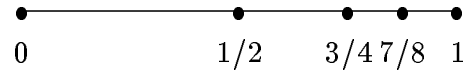


Рис. 6

Лекция 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1. Пространство кусочно-квадратичных непрерывных функций

В третьей лекции для задачи (1.1), (2.21) или, что то же самое, для задачи (3.12) был построен такой МКЭ, который дает приближенное решение в виде кусочно-линейной непрерывной функции. Здесь мы построим другой МКЭ, решением которого будет кусочно-квадратичная непрерывная функция, квадратичная на каждом элементе.

Пусть, как и ранее, отрезок \bar{I} разбит точками $x_i = ih = i/N$ на N равных частей $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$. На этом разбиении зададим пространство

$$S_2^h = \left\{ v^h(x) \in C(\bar{I}) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)}), i = 1, \dots, N \right\} \quad (1)$$

кусочно-квадратичных, непрерывных, квадратичных на каждом элементе функций. Это пространство является следующим по сложности после пространства кусочно-линейных непрерывных функций, задаваемого соотношением (3.8), конечноэлементным пространством для решения уравнения (1.1). Мы уже знаем, что конечноэлементное пространство может содержать только непрерывные функции, ибо в противном случае оно не будет подпространством $H^1(I)$, а метод не будет галеркинским.

Подсчитаем размерность пространства S_2^h . Так как отрезок $[0, 1]$ разбит на N элементов, а на каждом элементе функция из S_2^h представляет собой многочлен второй степени, задаваемый тремя параметрами, то размерность пространства кусочно-квадратичных (не непрерывных!) функций на данном разбиении есть $3N$. Требование непрерывности функций из S_2^h накладывает $(N - 1)$ связей (по числу общих концов элементов) и, следовательно, $\dim S_2^h = 3N - (N - 1) = 2N + 1$.

Пространство S_2^h еще не пригодно для решения задачи (1.1), (2.21) — не учтены главные граничные условия задачи. Поскольку таковым

является только первое из условий (2.21), то данное требование будет выполнено для функций из подпространства

$$\tilde{S}_2^h = \{v^h(x) \in S_2^h \mid v^h(0) = 0\} \quad (2)$$

пространства S_2^h . Очевидно, что $\tilde{S}_2^h \in \tilde{H}^1(I)$, $\dim \tilde{S}_2^h = 2N$, а новое конечноэлементное решение задачи (3.12) определяется соотношением (3.14) с \tilde{S}_2^h из (2) вместо \tilde{S}_1^h :

$$u^h(x) \in \tilde{S}_2^h : a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{S}_2^h. \quad (3)$$

Напомним, что $a(u, v)$ и $l(v)$ определяются соотношениями (3.11).

Чтобы найти решение задачи (3), нужно ввести базис в \tilde{S}_2^h , разложить по этому базису решение u^h , написать систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения (построить МКЭ) и решить построенную систему. Наша задача состоит в построении МКЭ, т.е. в построении матрицы системы уравнений и ее правой части. В четвертой лекции нам удалось это сделать (для случая \tilde{S}_1^h вместо \tilde{S}_2^h) путем поэлементных построений и последующей сборки. В пятой лекции была описана общая технология таких построений. Ею мы здесь и воспользуемся.

2. Матрицы жесткости и массы квадратичного элемента. Вектор нагрузки

В соответствии с разбиением отрезка $[0, 1]$ на элементы $e^{(i)}$ представим билинейную и линейную формы (3.11) в виде

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N a^{(i)}(u, v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^N l^{(i)}(v),$$

где

$$\begin{aligned} a^{(i)}(u, v) &= \int_{e^{(i)}} (pu'v' + quv) dx, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ l^{(i)}(v) &= \int_{e^{(i)}} f v dx, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4)$$

а поскольку точка $x = 1$ принадлежит лишь элементу $e^{(N)}$, то внеинтегральные члены в (3.11) должны быть отнесены к $a^{(N)}(u, v)$ и $l^{(N)}(v)$ т.е.

$$\begin{aligned} a^{(N)}(u, v) &= \int_{e^{(N)}} (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1), \\ l^{(N)}(v) &= \int_{e^{(N)}} fvdx + gv(1). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть, кроме того,

$$a_p^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p(x)u'v'dx, \quad a_q^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} q(x)uvdx, \quad (6)$$

$$a_\varkappa^{(N)}(u, v) = \varkappa u(1)v(1), \quad l_g^{(N)}(v) = gv(1). \quad (7)$$

Как уже было сказано, приближенное решение $u^h(x)$ на элементах $e^{(i)}$ представляет собой многочлен второй степени, вид которого полностью определяется заданием его значений в трех точках. Чтобы не войти в противоречие с вышесказанным, эти три точки не могут быть выбраны произвольно: две из них обязаны располагаться в концах элемента $e^{(i)}$, т.е. иметь координаты x_{i-1} и x_i . Если мы этого не сделаем, а расположим все три точки внутри $e^{(i)}$, то при задании приближенного решения на соседнем элементе, скажем, на $e^{(i+1)}$, вообще говоря, будет нарушена его непрерывность в точке x_i , что для решения задачи (3) недопустимо. Этого не произойдет, если конечноэлементное решение $u^h(x)$ на $e^{(i)}$ задается значениями в x_{i-1} и x_i , ибо тогда на соседних элементах $e^{(i-1)}$ и $e^{(i+1)}$ для задания решения будут использованы уже введенные значения $u^h(x_{i-1})$ и $u^h(x_i)$.

Итак, назовем точки x_{i-1} и x_i узлами элемента $e^{(i)}$ и будем в них задавать искомое решение. Расположение третьего узла никак не сказывается на приближенном решении, так что, исходя из соображений симметрии, поместим его в середину $e^{(i)}$. Введем на $e^{(i)}$ локальную нумерацию узлов, пронумеровав их слева направо числами 1, 2 и 3. *Функции формы* на $e^{(i)}$ зададим следующим образом: рассмотрим отрезок $[0, 1]$ оси t , введем на нем узлы с координатами 0, 1/2 и 1, пронумеруем их числами 1, 2 и 3, соответственно, и определим функции

$$\varphi_1(t) = 2(t-1)(t-1/2), \quad \varphi_2(t) = 4t(1-t), \quad \varphi_3(t) = 2t(t-1/2). \quad (8)$$

Вид этих функций изображен на рис. 1. Тогда функции

$$\varphi_k^{(i)} = \varphi_k \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

суть функции формы квадратичного элемента $e^{(i)}$ и

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^3 u_k \varphi_k^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}, \quad (10)$$

где u_k — значение приближенного решения в k -ом узле элемента $e^{(i)}$.

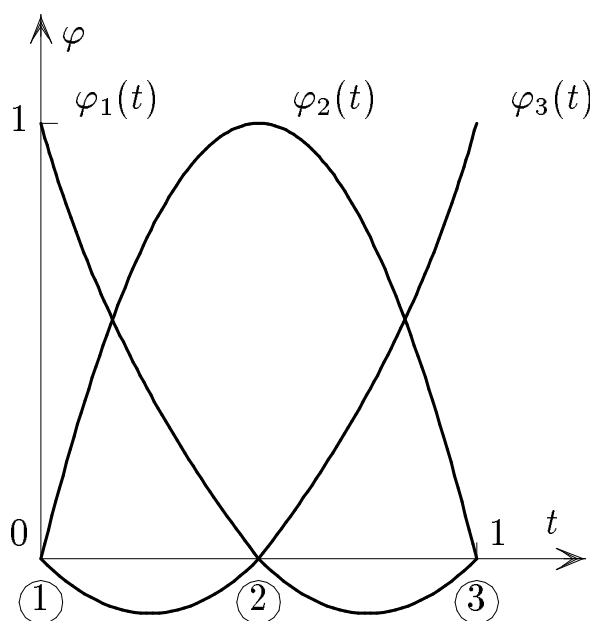


Рис. 1

Пусть, как и раньше,

$$\mathbf{u}^{(i)} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \quad (11)$$

— вектор узловых значений приближенного решения на $e^{(i)}$, а

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) & \varphi_2^{(i)}(x) & \varphi_3^{(i)}(x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

— матрица функций формы. Используя (11), (12), приближенное решение (10) запишем в виде

$$u^h(x) = \Phi^{(i)}(x) \mathbf{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \quad (13)$$

Тогда

$$\frac{du^h(x)}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) \right] \mathbf{u}^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \quad (14)$$

Пусть $v^h(x) = \Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}$ — произвольный многочлен второй степени на $e^{(i)}$. Подставляя (14) и $dv^h/dx = [d\Phi^{(i)}/dx] \mathbf{v}^{(i)}$ в первое из соотношений (6), находим, что

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \int_{e^{(i)}} p(x) \left(\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{u}^{(i)} \right) \left(\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{v}^{(i)} \right) dx.$$

Но

$$\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{v}^{(i)} = \left(\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \mathbf{v}^{(i)} \right)^T = \mathbf{v}^{(i)T} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T$$

и, следовательно,

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \int_{e^{(i)}} \mathbf{v}^{(i)T} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T p(x) \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] \mathbf{u}^{(i)} dx.$$

Принимая теперь во внимание, что $\mathbf{u}^{(i)}$ и $\mathbf{v}^{(i)}$ — числовые векторы и, следовательно, могут быть вынесены из под знака интеграла, будем иметь

$$a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \mathbf{v}^{(i)T} \int_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T p(x) \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] dx \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)T} K_p^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \quad (15)$$

где

$$K_p^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T p(x) \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right] dx \quad (16)$$

— матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_p^{(i)}$. Найдем явный вид $K_p^{(i)}$ для того случая, когда $p(x) = \text{const} = p$ при $x \in e^{(i)}$. Сделаем в (16) замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{x - x_{i-1}}{h} = t. \quad (17)$$

С учетом (12), (9), (8) получим

$$\begin{aligned}
 K_p^{(i)} &= \int_0^1 \frac{1}{h} \begin{bmatrix} d\varphi_1/dt \\ d\varphi_2/dt \\ d\varphi_3/dt \end{bmatrix} p \frac{1}{h} \begin{bmatrix} d\varphi_1 & d\varphi_2 & d\varphi_3 \\ dt & dt & dt \end{bmatrix} h dt = \\
 &= \frac{p}{h} \int_0^1 \begin{bmatrix} 4t - 3 \\ -8t + 4 \\ 4t - 1 \end{bmatrix} [(4t - 3) \quad (-8t + 4) \quad (4t - 1)] dt = \\
 &= \frac{p}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (13) и $v^h(x) = \Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}$ во второе соотношение (6), аналогично имеем

$$\begin{aligned}
 a_q(u^h, v^h) &= \int_{e^{(i)}} q(x) (\Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}) (\Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}) dx = \\
 &= \mathbf{v}^{(i)T} \int_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} q(x) \Phi^{(i)} dx \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)T} K_q^{(i)} \mathbf{u}^{(i)},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$K_q^{(i)} \equiv M^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} q(x) \Phi^{(i)} dx \tag{20}$$

— матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, отвечающая билинейной форме $a_q^{(i)}$ — матрица массы элемента. Пусть $q(x) = \text{const} = q$ при $x_i \in e^{(i)}$. Тогда с учетом (17), (12), (9), (8)

$$M^{(i)} = h \int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix} q [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)] dt = \frac{qh}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

З а м е ч а н и е 1. Для упрощения вычислений матрицы жесткости или матрицы массы элемента полезны следующие построения, которые мы проведем на примере вычисления матрицы массы (21).

Сделаем в (13) замену переменной (17). В результате с учетом (8) будем иметь

$$\begin{aligned} u^h(x) = \hat{u}(t) &= \sum_{k=1}^3 u_k \varphi_k(t) = u_1 \cdot 2(t-1)(t-1/2) + u_2 \cdot 4t(1-t) + u_3 \cdot 2t(t-1/2) = \\ &= u_1 + (-3u_1 + 4u_2 - u_3)t + (2u_1 - 4u_2 + 2u_3)t^2 = \sum_{l=1}^3 c_l t^{l-1} = T\mathbf{c}, \end{aligned} \quad (22)$$

где матрица $T = [1 \quad t \quad t^2]$, а $\mathbf{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$. При этом

$$\mathbf{c} = A\mathbf{u}^{(i)}, \quad (23)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в силу (22)

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon^{(i)}} [u^h(x)]^2 dx &= h \int_0^1 (T\mathbf{c})^2 dt = h\mathbf{c}^T \int_0^1 T^T T dt \mathbf{c} = \\ &= h\mathbf{c}^T \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix} dt \mathbf{c} = h\mathbf{c}^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \mathbf{c} = h\mathbf{c}^T B\mathbf{c}, \end{aligned}$$

то с учетом (23)

$$\int_{\epsilon^{(i)}} [u^h(x)]^2 dx = h [A\mathbf{u}^{(i)}]^T B [A\mathbf{u}^{(i)}] = \mathbf{u}^{(i)T} hA^T B A \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)T} M^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= hA^T B A = \\ &= h \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 40 & 20 & 12 \\ 10 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{h}{60} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 32 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

что совпадает с (21) при $q = 1$.

Из (18) следует, что в каждой строке матрицы $K_p^{(i)}$ сумма элементов равна нулю. Покажем, что это общее свойство матрицы $K_p^{(i)}$, не зависящее от того, является ли коэффициент p постоянным или нет.

У т в е р ж д е н и е 1. В каждой строке матрицы $K_p^{(i)}$ из (16) сумма элементов равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в $a_p^{(i)}(u^h, v^h)$ из (6) $u^h \equiv \text{const} = u \neq 0$. Тогда $a_p^{(i)}(u^h, v^h) = 0$. С другой стороны, в силу (15)

$$0 = a_p^{(i)}(u^h, v^h) = \mathbf{v}^{(i)T} K_p^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}$$

Но $\mathbf{u}^{(i)} = [u \ u \ u]^T$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^{(i)T} K_p^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} = [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} K_p^{(i)}(1,1) & K_p^{(i)}(1,2) & K_p^{(i)}(1,3) \\ K_p^{(i)}(2,1) & K_p^{(i)}(2,2) & K_p^{(i)}(2,3) \\ K_p^{(i)}(3,1) & K_p^{(i)}(3,2) & K_p^{(i)}(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \end{bmatrix} = \\ &= [v_1 \ v_2 \ v_3] \left[\left(u \sum_{n=1}^3 K_p^{(i)}(1, n) \right) \left(u \sum_{n=1}^3 K_p^{(i)}(2, n) \right) \left(u \sum_{n=1}^3 K_p^{(i)}(3, n) \right) \right]^T. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в правой части, есть не что иное, как скалярное произведение двух векторов. Поскольку оно равно нулю, то указанные векторы ортогональны. Но произвольный вектор $[v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ может быть ортогонален лишь нулевому вектору, а так как $u \neq 0$, то

$$\sum_{n=1}^3 K_p^{(i)}(m, n) = 0, \quad m = 1, 2, 3.$$

Утверждение доказано.

У т в е р ж д е н и е 2. Сумма всех элементов матрицы массы $M^{(i)}$ равна $\int_{e^{(i)}} q(x) dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теперь $u^h(x) = v^h(x) = 1$ на $e^{(i)}$. Тогда в силу (6) $a_q^{(i)}(u^h, v^h) = \int_{e^{(i)}} q dx$. С другой стороны, в силу (19) $a_q^{(i)}(u^h, v^h) = \mathbf{v}^{(i)T} M^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}$. Но $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} = [1 \ 1 \ 1]^T$ и, следовательно, $\mathbf{v}^{(i)T} M^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} = \sum_{m,n=1}^3 M^{(i)}(m, n)$. Утверждение доказано.

Сложим матрицы $K_p^{(i)}$ и $M^{(i)}$. Принимая во внимание (4) и (6), заключаем, что

$$K^{(i)} = K_p^{(i)} + M^{(i)} \quad (24)$$

есть (полная) матрица жесткости элемента $e^{(i)}$.

Вычислим вектор нагрузки элемента. Полагая в (4) $v = v^h = \Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}$, будем иметь

$$l^{(i)}(v^h) = \int_{e^{(i)}} f(\Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}) dx = \mathbf{v}^{(i)T} \int_{e^{(i)}} f \Phi^{(i)T} dx = \mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} f(x) \Phi^{(i)T} dx \quad (25)$$

— искомый вектор. Если $f(x) = \text{const} = f$ при $x \in e^{(i)}$, то с учетом (12), (9), (8) находим, что

$$\mathbf{F}^{(i)} = h \int_0^1 f [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]^T dt = \frac{hf}{6} [1 \quad 4 \quad 1]^T. \quad (26)$$

3. Сборка

Найдем теперь глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузки. Сделаем это для случая, когда отрезок $[0, 1]$ разбит на три элемента. Глобальная нумерация узлов на $[0, 1]$ и локальная нумерация на $e^{(i)}$ изображены на рис. 2.

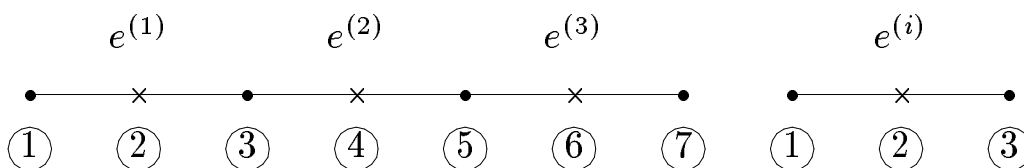


Рис. 2

решения в срединных узлах элементов. Эти неизвестные могут быть легко исключены из системы (29) путем разрешения первого, третьего и пятого уравнений относительно u_2, u_4, u_6 и подстановки найденных выражений во второе, четвертое и шестое уравнения. Поскольку первое, третье и пятое уравнения системы (29) на самом деле были сформированы уже при построении локальных матриц жесткости и векторов нагрузки, то исключение указанных неизвестных можно было бы осуществить на этом уровне до формирования глобальной матрицы и вектора.

4. Упражнения

1. Найти размерность конечноэлементного пространства

$$S_k^h = \left\{ v^h(x) \in C(\bar{I}) \mid v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_k(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N \right\}.$$

2. Аналогично (9), (8) построить функции формы элемента $e^{(i)}$, отвечающие S_3^h из упражнения 1.

3. Используя построенные в упражнении 2 функции формы, найти матрицы жесткости $K_p^{(i)}, K_q^{(i)}$, отвечающие билинейным формам (6), и вектор нагрузки $F^{(i)}$, отвечающий линейной форме (4). Убедиться в справедливости утверждений 1 и 2 для построенных матриц.

4. Доказать, что сумма компонент вектора нагрузки $F^{(i)}$ элемента $e^{(i)}$ равна $\int_{e^{(i)}} f(x) dx$.

5. Показать, что после исключения из системы (29) неизвестных с четными номерами (значений в средних точках), полученная система совпадает с системой (4.24) при соответствующих значениях p, f и κ .

6. При помощи МКЭ найти решение следующей задачи:

$$-u'' = 32, \quad 0 < x < 1, \quad -u'(0) = 32, \quad u(1) = 32.$$

Воспользоваться разбиением отрезка $[0, 1]$ на два элемента одинаковой длины и представлением решения в виде линейной функции на левом из них и квадратичной – на правом.

Лекция 7

ЭРМИТОВЫ ЭЛЕМЕНТЫ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Пространство кусочно-квадратичных непрерывно-дифференцируемых функций

В свое время (лекция 2) мы восприняли как большой успех понижение требований гладкости к искомому решению задачи (1.1), (2.21) с $C^2(I)$ или $H^2(I)$ до $H^1(I)$. Этим мы пользовались на протяжении всех последующих лекций, требуя от приближенного решения лишь непрерывности в общих для двух соседних элементов узлах. Однако, если искомое решение обладает бóльшей, чем H^1 , гладкостью, то иногда целесообразно и приближенное решение искать более гладким.

Попытаемся найти конечноэлементное решение задачи (1.1), (2.21), которое не только непрерывно, но и обладает непрерывными первыми производными. Ясно, что пространство кусочно-линейных функций для этого не подходит. Обратимся к кусочно-квадратичным функциям. Пусть*)

$$S_{2,1}^h = \{v^h(x) \in C^1(\bar{I}) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N\}. \quad (1)$$

Размерность этого пространства

$$\dim S_{2,1}^h = 3N - 2(N - 1) = N + 2.$$

К сожалению, в $S_{2,1}^h$ не существует базиса, элементы которого имели бы минимальный носитель, состоящий из двух соседних элементов. (Функция из $S_{2,1}^h$, с носителем на $e^{(i)} \cup e^{(i+1)}$ должна обращаться в нуль вместе со своей первой производной в точках x_{i-1} и x_{i+1} (4 условия), а также быть непрерывно-дифференцируемой в точке x_i (2 условия).

*) Первый индекс в обозначении конечноэлементного пространства указывает на степень используемых многочленов, а второй на гладкость элементов этого пространства. Построенные ранее пространства S_k^h с учетом этого соглашения можно обозначать $S_{k,0}^h$.

Этим шести условиям на $e^{(i)} \cup e^{(i+1)}$ удовлетворяет только тождественный нуль.) Вообще же базис в $S_{2,1}^h$ конечно существует.

Легко видеть, что, например, при $N=2$ ($\dim S_{2,1}^h = 4$) в качестве такового может быть взята совокупность функций $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3,4$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= 0, & \varphi_1(1) &= 0, & \varphi_1'(1) &= 0, \\ \varphi_2(0) &= 0, & \varphi_2'(0) &= 1, & \varphi_2(1) &= 0, & \varphi_2'(1) &= 0, \\ \varphi_3(0) &= 0, & \varphi_3'(0) &= 0, & \varphi_3(1) &= 1, & \varphi_3'(1) &= 0, \\ \varphi_4(0) &= 0, & \varphi_4'(0) &= 0, & \varphi_4(1) &= 0, & \varphi_4'(1) &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Указанные функции изображены на рис. 1. При разложении функции $v^h(x)$ из $S_{2,1}^h$, по этому базису коэффициентами разложения будут значения самой функции и ее первой производной в точках с координатами ноль и единица. Точка с координатой $1/2$ своих представителей среди

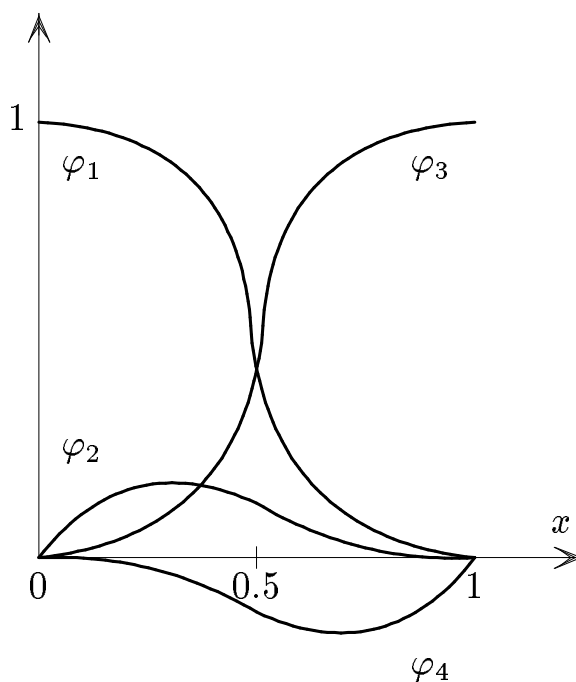


Рис. 1

коэффициентов разложения не имеет; ее роль оказалась чисто вспомогательной.

Сделанные наблюдения наводят на мысль и при других N (отличных от 2) рассматривать элементы парами. Пусть N в (1) четное т.е. $N=2M$. Объединим элементы $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ в суперэлементы

$$\tilde{e}^{(i)} = e^{(2i-1)} \cup e^{(2i)}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Назовем узлами суперэлементов (3) их концы, т.е. точки x_{2i} , $i = 0, 1, \dots, M$. В дальнейших построениях, связанных с $S_{2,1}^h$, суперэлементы (3) будут играть ту же роль, что и конечные элементы в предшествующих построениях.

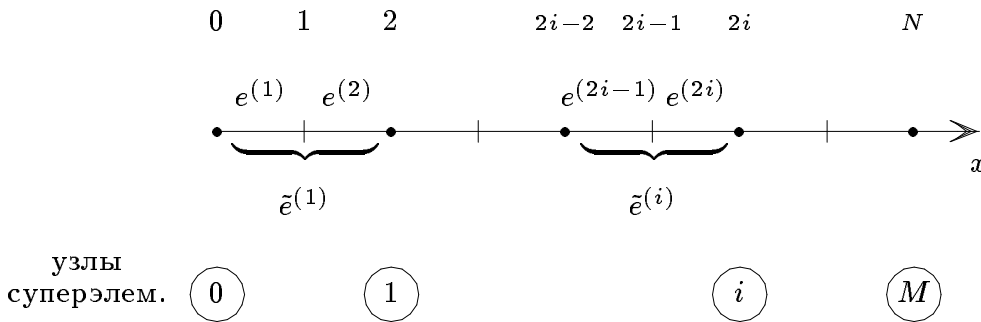


Рис. 2

Обратим внимание на то, что $\dim S_{2,1}^h = N + 2 = 2(M + 1)$ ровно в два раза превосходит число узлов суперэлементов. Это позволяет попытаться параметризовать пространство $S_{2,1}^h$ значениями функций и их первых производных в узлах суперэлементов. Тогда с каждым из узлов будет связано по две базисные функции, одна из которых имеет в этом узле единичное значение и нулевую первую производную, а в остальных узлах вместе со своей первой производной обращается в нуль. Вторая базисная функция должна обращаться в нуль во всех узлах, но иметь единичную первую производную в данном узле и нулевую во всех остальных. Такие базисные функции в самом деле существуют, ибо их задание на двух соседних суперэлементах (на носителе) определяется двенадцатью параметрами (по три на каждом из четырех элементов), которые должны удовлетворять двенадцати условиям (по два в точках $x_{2i \mp 1}$, не являющихся узлами, по два в узлах с координатами $x_{2i \mp 2}$ и четыре в узле x_{2i}). Поскольку в каждом узле суперэлемента задается по два параметра, будем эти узлы называть двукратными.

Итак, используя пространство $S_{2,1}^h$, при $N = 2M$ можно построить метод конечных суперэлементов с непрерывно-дифференцируемым приближенным решением. Но мы этого делать не будем. Заметим лишь,

что на каждом суперэлементе приближенное решение задается четырьмя параметрами. Но именно четыре коэффициента имеет многочлен третьей степени, так что вместо $S_{2,1}^h$ можно ввести пространство

$$S_{3,1}^h = \{v^h(x) \in C^1(\bar{I}) \mid v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_3(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N\}, \quad (4)$$

размерность которого равна $2(N+1)$, и задать в нем ту же параметризацию, что и в $S_{2,1}^h$. Это приведет нас к базису, элементы которого имеют носитель, состоящий не более чем из двух соседних элементов (а не суперэлементов, как для $S_{2,1}^h$).

2. Кубические эрмитовы элементы

Воспользуемся пространством $S_{3,1}^h$ из (4) для построения конечно-элементного решения задачи (1.1), (2.21). Ограничимся построением матрицы жесткости и вектора нагрузки элемента, оставив сборку читателям. Узлами (двукратными) элемента назовем его концы. Функции формы на $e^{(i)}$ определим при помощи многочленов третьей степени $\varphi_k(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ оси Ot условиям (2). Эти функции, как легко видеть, задаются следующими формулами:

$$\varphi_1(t) = (t-1)^2(2t+1), \quad \varphi_2(t) = t(t-1)^2, \quad (5)$$

$$\varphi_3(t) = t^2(3-2t), \quad \varphi_4(t) = t^2(t-1);$$

их вид изображен на рис.1. Сами же функции формы определим соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_{2l-1}^{(i)}(x) &= \varphi_{2l-1} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right), \quad l = 1, 2, \\ \varphi_{2l}^{(i)}(x) &= h\varphi_{2l} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right), \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Нормирующий множитель h , фигурирующий в определении функций формы с четными номерами, делает их первые производные равными единице в соответствующих узлах. Элемент $e^{(i)}$ с двукратными узлами на концах и функциями формы (6), (5) называется *кубическим эрмитовым элементом* в отличие от кубического элемента с четырьмя однократными узлами, который называется *лагранжевым*. Лагранжевыми

являются и ранее введенные линейные элементы с двумя однократными узлами на концах, а также квадратичные элементы, рассмотренные в предыдущей лекции. Эта терминология берет свое начало из теории интерполяции.

Обратимся к построению матрицы жесткости. Согласно (6.16)

$$K_p^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} d\varphi_1^{(i)}/dx \\ d\varphi_2^{(i)}/dx \\ d\varphi_3^{(i)}/dx \\ d\varphi_4^{(i)}/dx \end{bmatrix} p(x) \begin{bmatrix} \frac{d\varphi_1^{(i)}}{dx} & \frac{d\varphi_2^{(i)}}{dx} & \frac{d\varphi_3^{(i)}}{dx} & \frac{d\varphi_4^{(i)}}{dx} \end{bmatrix} dx.$$

Полагая здесь $p(x) = \text{const} = p$, $x \in e^{(i)}$ и делая замену переменной интегрирования (6.17), с учетом (6), (5) будем иметь

$$\begin{aligned} K_p^{(i)} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ h\varphi_2'(t) \\ \varphi_3'(t) \\ h\varphi_4'(t) \end{bmatrix} p[\varphi_1'(t) \quad h\varphi_2'(t) \quad \varphi_3'(t) \quad h\varphi_4'(t)] dt = \\ &= \frac{p}{h} \begin{bmatrix} 6/5 & h/10 & -6/5 & h/10 \\ h/10 & 2h^2/15 & -h/10 & -h^2/30 \\ -6/5 & -h/10 & 6/5 & -h/10 \\ h/10 & -h^2/30 & -h/10 & 2h^2/15 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно (6.20), (6), (5) при $q(x) = \text{const} = q$, $x \in e^{(i)}$

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)} \\ \varphi_2^{(i)} \\ \varphi_3^{(i)} \\ \varphi_4^{(i)} \end{bmatrix} q[\varphi_1^{(i)} \quad \varphi_2^{(i)} \quad \varphi_3^{(i)} \quad \varphi_4^{(i)}] dx = \\ &= hq \int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ h\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ h\varphi_4 \end{bmatrix} [\varphi_1 \quad h\varphi_2 \quad \varphi_3 \quad h\varphi_4] dt = \\ &= \frac{hq}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -4h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -4h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Напомним, что при вычислении матриц (7) и (8) полезны представления типа (6.22), (6.23) и следующие за ними рассуждения.

Матрица жесткости $K^{(i)}$ элемента определяется из (7), (8) по формуле (6.24).

Из (6.25), (6), (5) при $f(x) = \text{const} = f$, $x \in e^{(i)}$

$$F^{(i)} = hf \int_0^1 [\varphi_1 \quad h\varphi_2 \quad \varphi_3 \quad h\varphi_4]^T dt = hf [1/2 \quad h/12 \quad 1/2 \quad -h/12]^T. \quad (9)$$

3. Задача об изгибе балки

Конечноэлементное пространство $S_{3,1}^h$ из (4) оказывается пригодным и для приближенного решения дифференциальных уравнений *четвертого порядка*. Рассмотрим задачу о равновесии однородной балки постоянного сечения, находящейся под действием распределенной поперечной нагрузки и имеющей один конец заделанным, а второй свободным. Математически задача может быть сформулирована так: найти решение дифференциального уравнения

$$u^{(4)} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \quad (11)$$

Первые два граничных условия являются главными, вторые два — естественными. Чтобы получить вариационную формулировку задачи (10), (11), умножим уравнение (10) на функцию $v(x)$, проинтегрируем результат по отрезку $[0, 1]$ и преобразуем левую часть двукратным интегрированием по частям:

$$\int_0^1 u^{(4)} v dx = u''' v \Big|_0^1 - u'' v' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'' v'' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Подстановки при $x = 1$ обращаются в нуль в силу второй пары гра-

ничных условий (11). Потребуем, чтобы $v(x)$ удовлетворяла главным граничным условиям (11), т.е. $v(0) = v'(0) = 0$. Тогда обращается в нуль подстановка и при $x = 0$, а вариационное уравнение принимает вид

$$\int_0^1 u'' v'' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Пусть

$$\tilde{H}^2(I) = \{v(x) \in H^2(I) \mid v(0) = v'(0) = 0\},$$

где $H^2(I)$ — соболевское пространство с нормой, определяемой соотношением (1.15). Тогда вариационная формулировка задачи (10), (11) будет такова:

$$u(x) \in \tilde{H}^2(I) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^2(I), \quad (12)$$

где

$$a(u, v) = \int_0^1 u'' v'' dx, \quad l(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Ясно, что $S_{3,1}^h \subset H^2(I)$, а

$$\tilde{S}_{3,1}^h = \left\{ v^h \in S_{3,1}^h \mid v^h(0) = \frac{dv^h(0)}{dx} = 0 \right\} \subset \tilde{H}^2(I).$$

Поэтому конечноэлементным решением задачи (12) является функция

$$u^h \in \tilde{S}_{3,1}^h \quad : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_{3,1}^h. \quad (13)$$

Матрица жесткости элемента $e^{(i)}$ для задачи (13) определяется билинейной формой

$$a^{(i)}(u^h, v^h) = \int_{e^{(i)}} \frac{d^2 u^h}{dx^2} \frac{d^2 v^h}{dx^2} dx$$

и функциями формы (6). Имеем

$$\begin{aligned}
 K^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} d^2\varphi_1^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_2^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_3^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_4^{(i)}/dx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\varphi_1^{(i)}}{dx^2} & \frac{d^2\varphi_2^{(i)}}{dx^2} & \frac{d^2\varphi_3^{(i)}}{dx^2} & \frac{d^2\varphi_4^{(i)}}{dx^2} \end{bmatrix} dx = \\
 &= \frac{1}{h^3} \int_0^1 [\varphi_1'' \quad h\varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad h\varphi_4'']^T [\varphi_1'' \quad h\varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad h\varphi_4''] dt = \\
 &= \frac{1}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $\varphi_k(t)$ из (5).

Вектор нагрузки $F^{(i)}$ элемента имеет тот же вид, что и в задаче (1.1), (2.21) и при $f(x) = \text{const} = f$ для $x \in e^{(i)}$ задается соотношением (9). Глобальная матрица жесткости формируется точно так же, как и в предыдущем примере, а "снятие флажков" осуществляется с учетом главных граничных условий (11).

4. Системы уравнений

В качестве завершающих примеров применения МКЭ к обыкновенным дифференциальным уравнениям рассмотрим системы уравнений.

Пример 1. Требуется найти решение системы

$$\begin{aligned}
 -u_1'' + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= f_1(x), \\
 -u_2'' + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= f_2(x),
 \end{aligned} \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям первого рода

$$u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2(1) = 0. \tag{16}$$

Введем векторы

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

и матрицы

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

В векторном виде система (15) запишется так:

$$\left(-I \frac{d^2}{dx^2} + A \right) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (19)$$

Дадим вариационную постановку задачи (15), (16). Для этого умножим уравнение (19) слева на произвольный вектор $\mathbf{v}^T = [v_1 \quad v_2]$ и результат проинтегрируем по $[0, 1]$

$$\int_0^1 \mathbf{v}^T \left(-I \frac{d^2}{dx^2} + A \right) \mathbf{u} dx = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Преобразовывая теперь первое слагаемое левой части при помощи интегрирования по частям и предполагая, что $\mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, получим следующую вариационную задачу: найти

$$\mathbf{u} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I) : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I),$$

где

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^1 (\mathbf{v}'^T \mathbf{u}' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}) dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Будем искать приближенное решение в виде кусочно-линейных непрерывных функций, линейных на каждом элементе $e^{(i)}$. Узлами элемента будут его концы, левому из которых присвоим номер 1, а правому — номер 2. Так как система (15) содержит две компоненты, то узлы будут *двукратными*. Пусть, как обычно,

$$\mathbf{u}_l^{(i)} = [u_{l,1} \quad u_{l,2}]^T, \quad l = 1, 2$$

— вектор узловых значений элемента $e^{(i)}$ для компоненты u_l^h , $l = 1, 2$ приближенного решения, а

$$\varphi_1^{(i)}(x) = \frac{x_i - x}{h}, \quad \varphi_2^{(i)}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h} \quad (20)$$

— функции формы, образующие матрицу

$$\Phi^{(i)} = [\varphi_1^{(i)} \quad \varphi_2^{(i)}].$$

Тогда

$$u_l^h = \Phi^{(i)} \mathbf{u}_l^{(i)}, \quad l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}. \quad (21)$$

Пусть

$$\mathbf{U}^{(i)} = [u_{1,1} \quad u_{2,1} \quad u_{1,2} \quad u_{2,2}]^T$$

— вектор узловых значений всего приближенного решения \mathbf{u}^h на $e^{(i)}$. Так как

$$\mathbf{u}_l^{(i)} = S_l \mathbf{U}^{(i)},$$

где

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ср. с (4.16), (4.17)), то из (21) следует, что

$$u_l^h(x) = \Phi^{(i)} S_l \mathbf{U}^{(i)}, \quad l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}$$

и поэтому

$$\mathbf{u}^h(x) = \begin{bmatrix} \Phi^{(i)} S_1 \\ \Phi^{(i)} S_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}^{(i)} = \Phi^{(i)} \mathbf{U}^{(i)},$$

где

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)} & 0 & \varphi_2^{(i)} & 0 \\ 0 & \varphi_1^{(i)} & 0 & \varphi_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

— общая матрица функций формы. В силу (20)

$$\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} = \begin{bmatrix} -1/h & 0 & 1/h & 0 \\ 0 & -1/h & 0 & 1/h \end{bmatrix}$$

и матрица жесткости $K_1^{(i)}$ элемента, отвечающая билинейной форме $\int_{e^{(i)}} \mathbf{v}'^T \mathbf{u}' dx$, есть

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} \right]^T \frac{d\Phi^{(i)}}{dx} dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} dt = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Билинейной же форме $\int_{e^{(i)}} \mathbf{v}^{hT} A \mathbf{u}^h dx$ отвечает матрица массы

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} A \Phi^{(i)} dx = \\ &= h \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & t \end{bmatrix} dt = \\ &= h \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)I \\ tI \end{bmatrix} A [(1-t)I & tI] dt = h \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)A \\ tA \end{bmatrix} [(1-t)I & tI] dt = \\ &= h \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)^2 A & t(1-t)A \\ t(1-t)A & t^2 A \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Если коэффициенты a_{ij} от x не зависят, то

$$M^{(i)} = h \begin{bmatrix} (1/3)A & (1/6)A \\ (1/6)A & (1/3)A \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes A,$$

где значком \otimes обозначено тензорное произведение матриц.

Итак, матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, есть

$$K^{(i)} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes A.$$

На вычислении вектора нагрузки мы останавливаться не будем.

Пример 2. Пусть теперь система содержит уравнения разных порядков

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(p_1(x) \frac{du_1}{dx} \right) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= f_1(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(p_2(x) \frac{d^2u_2}{dx^2} \right) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= f_2(x), \end{aligned} \quad 0 < x < 1, \quad (22)$$

а граничные условия остаются однородными первого рода

$$u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2'(0) = u_2(1) = u_2'(1) = 0. \quad (23)$$

Если обозначить

$$D_1 = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}$$

и принять во внимание (18), (17), то систему (22) можно записать в векторном виде

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} D_2 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} D_1 \frac{d}{dx} + A \right] \mathbf{u} = \mathbf{f},$$

откуда легко следует вариационная формулировка задачи (22), (23): найти

$$\mathbf{u} \in H_0^1(I) \times H_0^2(I) : \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^2(I),$$

где

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_0^1 [\mathbf{v}''^T D_2 \mathbf{u}'' + \mathbf{v}'^T D_1 \mathbf{u}' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}] dx = \\ &= \int_0^1 [p_2 v_2'' u_2'' + p_1 v_1' u_1' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}] dx, \end{aligned}$$

а

$$l(\mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Поскольку вторая компонента решения расположена в $H_2(I)$, то для ее приближения следует использовать по крайней мере конечноэлементное пространство $S_{3,1}^h$ из (4), в то время как для приближенного решения $u_1 \in H^1(I)$ достаточно и S_1^h из (3.8) или S_2^h из (6.1), хотя можно взять и то же пространство $S_{3,1}^h$. Вопреки здравому смыслу, связанному с соображением равноточности приближений обеих компонент решения, будем для разнообразия полагать, что $u_1^h \in S_1^h$, а $u_2^h \in S_{3,1}^h$.

Как и в предыдущем примере узлами конечного элемента будут его концы — левый с номером 1 и правый с номером 2. Но теперь узлы будут *трехкратными*. Пусть

$$\mathbf{u}_1^{(i)} = [u_{1,1} \quad u_{1,2}]^T, \quad \mathbf{u}_2^{(i)} = [u_{2,1} \quad u'_{2,1} \quad u_{2,2} \quad u'_{2,2}]^T$$

— векторы узловых значений элемента $e^{(i)}$ компонент u_l^h , $l = 1, 2$ приближенного решения, а

$$\Phi_1^{(i)} = [\varphi_{1,1}^{(i)} \quad \varphi_{1,2}^{(i)}] \text{ и } \Phi_2^{(i)} = [\varphi_{2,1}^{(i)} \quad \varphi_{2,2}^{(i)} \quad \varphi_{2,3}^{(i)} \quad \varphi_{2,4}^{(i)}]$$

— соответствующие матрицы функций формы, где $\varphi_{1,j}^{(i)}$ суть $\varphi_j^{(i)}$ из (20), а $\varphi_{2,j}^{(i)} \equiv \varphi_j^{(i)}$ из (6), (5). Тогда

$$u_l^h = \Phi_l^{(i)} \mathbf{u}_l^{(i)}, \quad l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}.$$

Пусть

$$\mathbf{U}^{(i)} = [u_{1,1} \quad u_{2,1} \quad u'_{2,1} \quad u_{1,2} \quad u_{2,2} \quad u'_{2,2}]^T$$

— вектор узловых значений всего приближенного решения \mathbf{u}^h на $e^{(i)}$. Тогда $\mathbf{u}_l^{(i)} = S_l \mathbf{U}^{(i)}$, где

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а $u_l^h(x) = \Phi_l^{(i)} S_l \mathbf{U}^{(i)}$ при $x \in e^{(i)}$. Поэтому

$$\mathbf{u}^h(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(i)} S_1 \\ \Phi_2^{(i)} S_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}^{(i)} = \Phi^{(i)} \mathbf{U}^{(i)},$$

где

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}^{(i)} & 0 & 0 & \varphi_{12}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{21}^{(i)} & \varphi_{22}^{(i)} & 0 & \varphi_{23}^{(i)} & \varphi_{24}^{(i)} \end{bmatrix}$$

— общая матрица функций формы. Наконец, находим матрицу жесткости элемента

$$K^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \left\{ \left[\frac{d^2 \Phi^{(i)}}{dx^2} \right]^T D_2 \frac{d^2 \Phi^{(i)}}{dx^2} + \left[\frac{d \Phi^{(i)}}{dx} \right]^T D_1 \frac{d \Phi^{(i)}}{dx} + \Phi^{(i)T} A \Phi^{(i)} \right\} dx = K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + K_3^{(i)},$$

где

$$K_1^{(i)} = \int_{e^{(i)}} p_2(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi_{21}'')^2 & \varphi_{22}'' \varphi_{21}'' & 0 & \varphi_{23}'' \varphi_{21}'' & \varphi_{24}'' \varphi_{21}'' \\ 0 & \varphi_{21}'' \varphi_{22}'' & (\varphi_{22}'')^2 & 0 & \varphi_{23}'' \varphi_{22}'' & \varphi_{24}'' \varphi_{22}'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{21}'' \varphi_{23}'' & \varphi_{22}'' \varphi_{23}'' & 0 & (\varphi_{23}'')^2 & \varphi_{24}'' \varphi_{23}'' \\ 0 & \varphi_{21}'' \varphi_{24}'' & \varphi_{22}'' \varphi_{24}'' & 0 & \varphi_{23}'' \varphi_{24}'' & (\varphi_{24}'')^2 \end{bmatrix} dx,$$

$$K_2^{(i)} = \int_{e^{(i)}} p_1(x) \begin{bmatrix} (\varphi_{11}')^2 & 0 & 0 & \varphi_{12}' \varphi_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{11}' \varphi_{12}' & 0 & 0 & (\varphi_{12}')^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

и т.д.

5. Упражнения

1. Построить матрицы (7), (8) и (14), используя представления типа (6.22), (6.23) и следующие за ними рассуждения.
2. Построить вектор нагрузки элемента для задачи из примера 1.

Лекция 8

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА В МНОГОУГОЛЬНИКЕ

1. Постановка задачи

Пусть Ω — полигональная область на плоскости Oxy , $\bar{\Omega}$ — ее замыкание, а $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ — ее граница. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся частей $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ таких, что

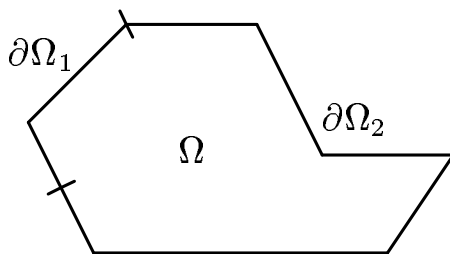


Рис. 1

$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. В области Ω зададим уравнение Пуассона

$$-\Delta u \equiv - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

и поставим для него смешанную задачу путем задания на $\partial\Omega$ граничных условий вида

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — направление внешней (по отношению к Ω) нормали к $\partial\Omega_2$.

Дадим вариационную формулировку задачи (1)-(3). Для этого умножим уравнение (1) на функцию $v(x, y)$, равную нулю на $\partial\Omega_1$, и проинтегрируем результат по Ω . Используя для преобразования левой части

полученного тождества первую формулу Грина и принимая во внимание граничное условие (3), будем иметь

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \equiv \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy, \quad (4)$$

где $\nabla v = [\partial v / \partial x \quad \partial v / \partial y]^T$ — градиент $v(x, y)$. Обозначим

$$a(u, v) \equiv \int_{\Omega} (\nabla v)^T (\nabla u) dx dy, \quad (5)$$

$$l(v) \equiv \int_{\Omega} f v dx dy \quad (6)$$

и введем пространство Соболева

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x, y) \mid \|v\|_1^2 \equiv \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx dy < \infty \right\}.$$

Тогда, если

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ v(x, y) \in H^1(\Omega) \mid v(x, y)|_{\partial\Omega_1} = 0 \right\},$$

то вариационная формулировка задачи (1)-(3) такова: найти

$$u(x, y) \in \tilde{H}^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega). \quad (7)$$

2. Конечноэлементная формулировка

Поставим задачу об отыскании приближенного решения задачи (7). Для этого произведем сначала *триангуляцию* $\bar{\Omega}$.

Пусть $0 < h < 1$ есть параметр дискретизации и для каждого такого h пусть π^h обозначает разбиение $\bar{\Omega}$ на непересекающиеся треугольники $e^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N(h)$ такие, что

1°. Общие стороны любых двух соседних треугольников совпадают.

2°. Точки смены типа граничного условия (т.е. принадлежащие $\partial\bar{\Omega}_1 \cap \partial\bar{\Omega}_2$) являются вершинами треугольников.

3°. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N(h)} e^{(i)}$.

З а м е ч а н и е 1. В силу свойств 1°, 2° и 3° триангуляция π^h не может содержать фрагменты, изображенные, на рис. 2а), 2б) и 2в), соответственно.

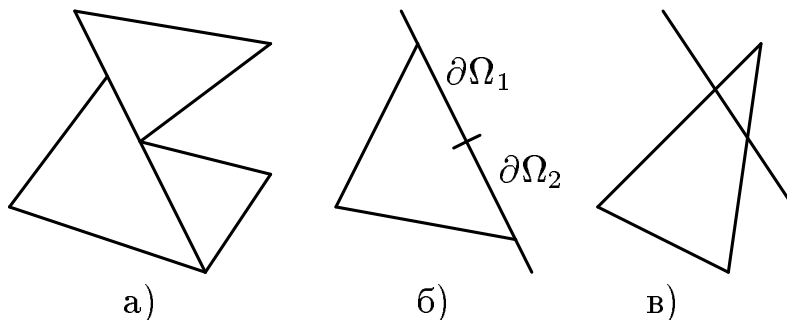


Рис. 2

Возможная триангуляция области Ω изображена на рис. 3.

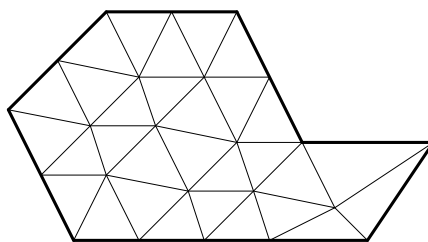


Рис. 3

Теперь построим конечномерное подпространство пространства $\tilde{H}^1(\Omega)$, согласованное с триангуляцией π^h . Пусть

$$S_1^h = \left\{ v^h(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \mid v^h(x, y)|_{e^{(i)}} \in P_1(e^{(i)}), \quad e^{(i)} \in \pi^h \right\}$$

есть пространство кусочно-линейных, линейных на каждом элементе $e^{(i)} \in \pi^h$, непрерывных функций, а

$$\tilde{S}_1^h = \{ v^h(x, y) \in S_1^h \mid v^h|_{\partial\Omega_1} = 0 \}$$

— его подпространство. Очевидно, что $\tilde{S}_1^h \subset \tilde{H}^1(\Omega)$ и не пусто. Пусть $\dim \tilde{S}_1^h = n$. Назовем приближенным решением задачи (7) такую функцию

$$u^h(x, y) \in \tilde{S}_1^h \quad : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_1^h. \quad (8)$$

Очевидно, что линейная на треугольнике функция однозначно определяется заданием ее значений в вершинах, которые мы будем называть узлами и которые предполагаются упорядоченными. Каждая функция $v^h(x, y) \in \tilde{S}_1^h$ может быть однозначно представлена в виде

$$v^h(x, y) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x, y),$$

где v_i — ее значение в i -ом узле, а $\varphi_i(x, y) \in \tilde{S}_1^h$ — базисная функция (см. рис. 4), равная единице в i -ом узле и нулю во всех других узлах. Полагая теперь в (8) $u^h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(x, y)$, а $v^h = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, полу-

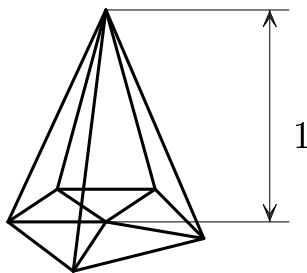


Рис. 4

чим следующую систему линейных алгебраических уравнений для значений приближенного решения в узлах :

$$\sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = l(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Вычислим коэффициенты $a(\varphi_i, \varphi_j)$ системы (9) и компоненты ее правой части $l(\varphi_i)$. Сделаем это при помощи поэлементных вычислений, но прежде введем так называемые барицентрические координаты.

3. Барцентрические координаты

Пусть e — треугольник, расположенный на плоскости Oxy , вершины которого пронумерованы числами 1, 2 и 3 в направлении, обратном ходу часовой стрелки. Координаты этих вершин суть (x_i, y_i) , $i=1, 2, 3$. Пусть O — точка внутри e и (x, y) ее координаты. Соединим отрезками прямых точку O с вершинами треугольника e . В результате треугольник e будет разбит на три треугольника e_1, e_2 и e_3 , где e_i — тот из них, одна из сторон которого является стороной e , расположенной напротив i -ой вершины. Описанная ситуация изображена на рис. 5.

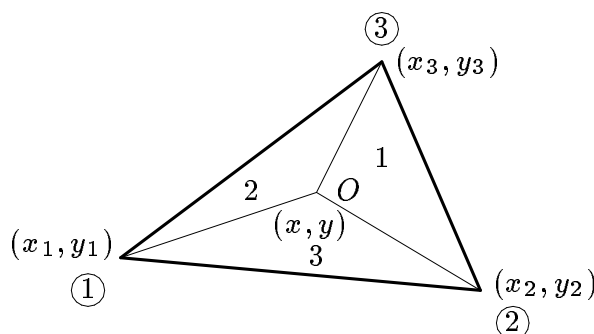


Рис. 5

Пусть S и S_i — площади треугольников e и e_i соответственно.

О п р е д е л е н и е 1. Величины $\zeta_i = S_i/S$, $i = 1, 2, 3$ называются *барцентрическими координатами* в треугольнике e .

Очевидно, что положение каждой каждой точки O в треугольнике e однозначно определяется ее барцентрическими координатами.

Барцентрические координаты линейно зависимы и обладают следующими очевидными свойствами :

$$\sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1, \quad \zeta_i(x_i, y_i) = 1, \quad \zeta_i(x_j, y_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Установим связь между барцентрическими и декартовыми координатами. Из аналитической геометрии известно, что

$$S = \frac{1}{2!} \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому, например,

$$\zeta_1 = \det \begin{bmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Но эта формула и ей аналогичные для ζ_2 и ζ_3 дают представление решения алгебраической системы

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

при помощи формул Крамера. Искомая связь установлена. Соотношение (12) иногда принимается за определение барицентрических координат.

Преобразуем соотношение (11), выражающее барицентрическую координату ζ_1 через декартовы координаты. Раскладывая детерминант из числителя (11) по элементам первого столбца, найдем, что

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{2} = \\ &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$a_1 = y_2 - y_3, \quad b_1 = x_3 - x_2, \quad c_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2. \quad (13)$$

Тем самым,

$$\zeta_i = \frac{a_i x + b_i y + c_i}{2S}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

а выражение для коэффициентов a_i, b_i и c_i через координаты вершин e получаются из (13) путем круговой перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Именно

$$\begin{aligned} a_2 &= y_3 - y_1, & b_2 &= x_1 - x_3, & c_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 &= y_1 - y_2, & b_3 &= x_2 - x_1, & c_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \quad (15)$$

З а м е ч а н и е 2. Из (13), (15) следует, что

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 b_i = 0. \quad (16)$$

Имеет место следующая формула для интеграла по e барицентрического одночлена

$$\int_e \zeta_1^m \zeta_2^n \zeta_3^p dx dy = S \frac{m!n!p!2!}{(m+n+p+2)!}. \quad (17)$$

4. Матрица жесткости и вектор нагрузки треугольного элемента

Пусть $e^{(i)}$ - произвольный треугольник триангуляции π^h . Присвоим его вершинам (являющимся узлами конечноэлементной сетки) новые номера 1, 2 и 3 и будем называть эту нумерацию локальной. Пусть, как обычно, нумерация произведена в направлении, обратном ходу часовой стрелки. Поскольку приближенное решение $u^h(x, y)$ линейно на $e^{(i)}$, то полностью задается там своими значениями u_j , $j = 1, 2, 3$ в вершинах. Обозначим через $\varphi_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$ функции формы элемента $e^{(i)}$, т.е. ненулевые сужения базисных функций пространства S_1^h на $e^{(i)}$. Пусть номер j имеет та из них, которая в j -ой вершине имеет отличное от нуля значение, т.е. $\varphi_j^{(i)}(x_j, y_j) = 1$, где (x_j, y_j) — координаты этой вершины (см. рис. 6). Очевидно, что

$$\varphi_j^{(i)} = \zeta_j, \quad (18)$$

т.е. в рассматриваемом случае функциями формы элемента являются

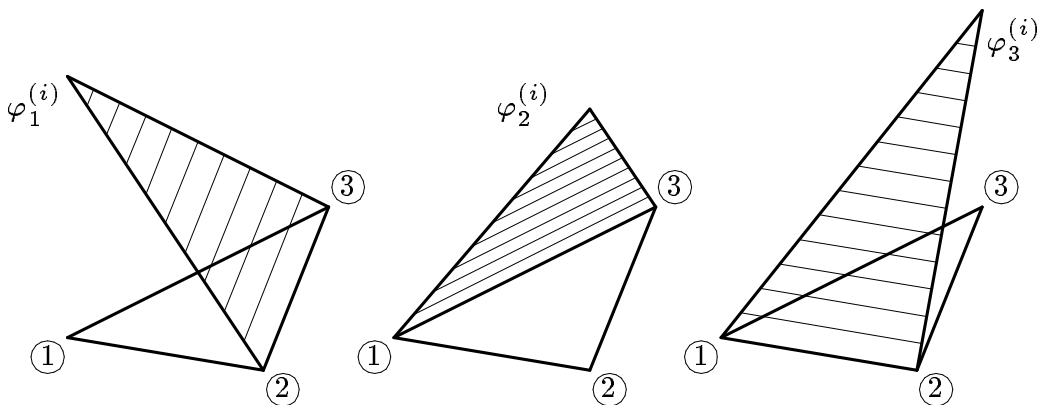


Рис. 6

его барицентрические координаты. Тем самым

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_j \varphi_j^{(i)}(x, y) = \sum_{j=1}^3 u_j \zeta_j, \quad (x, y) \in e^{(i)}.$$

Пусть $\mathbf{u}^{(i)} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$ — вектор узловых значений приближенного решения на $e^{(i)}$, а $\Phi^{(i)} = [\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \varphi_3^{(i)}]$ — матрица функций формы. Тогда

$$u^h(x, y) = \Phi^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \quad (x, y) \in e^{(i)}. \quad (19)$$

Представим билинейную (5) и линейную (6) формы в виде

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N a^{(i)}(u, v), \quad l(v) = \sum_{i=1}^N l^{(i)}(v),$$

где

$$a^{(i)}(u, v) = a_1^{(i)}(u, v) + a_2^{(i)}(u, v),$$

а

$$\begin{aligned} a_1^{(i)}(u, v) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy, & a_2^{(i)}(u, v) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy, \\ l^{(i)}(v) &= \int_{e^{(i)}} f v dx dy \end{aligned} \quad (20)$$

и подставим u^h из (19) в (20) вместо u , положив одновременно $v = v^h = \Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}$ при $\mathbf{v}^{(i)} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$. Принимая во внимание, что в силу (18), (14)

$$\frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial x} = \frac{a_j}{2S}, \quad \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial y} = \frac{b_j}{2S},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} a_1^{(i)}(u^h, v^h) &= \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v^h}{\partial x} dx dy = \\ &= \int_{e^{(i)}} ([\partial \Phi^{(i)} / \partial x] \mathbf{v}^{(i)})^T ([\partial \Phi^{(i)} / \partial x] \mathbf{u}^{(i)}) dx dy = \mathbf{v}^{(i)T} K_1^{(i)} \mathbf{u}^{(i)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1^{(i)} &= \int_{e^{(i)}} [\partial \Phi^{(i)} / \partial x]^T [\partial \Phi^{(i)} / \partial x] dx dy = \\
 &= \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2S} & \frac{a_2}{2S} & \frac{a_3}{2S} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2S} & \frac{a_2}{2S} & \frac{a_3}{2S} \end{bmatrix} dx dy = \\
 &= \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

— матрица жесткости, отвечающая билинейной форме $a_1^{(i)}(u^h, v^h)$. Аналогично находим

$$K_2^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix}$$

— матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме $a_2^{(i)}(u^h, v^h)$. Но тогда матрица жесткости треугольного элемента $e^{(i)}$ (матрица жесткости, отвечающая билинейной форме $a^{(i)}(u^h, v^h)$) есть

$$K^{(i)} = K_1^{(i)} + K_2^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Напомним, что S — это площадь треугольника $e^{(i)}$, а a_j и b_j выражаются через коэффициенты вершин треугольника $e^{(i)}$ при помощи соотношений (13), (15).

Далее, полагая, что $f(x, y) = \text{const} = f$ при $(x, y) \in e^{(i)}$, и используя формулу интегрирования (17), имеем

$$l^{(i)}(v^h) = \int_{e^{(i)}} f v^h dx dy = \int_{e^{(i)}} (\Phi^{(i)} \mathbf{v}^{(i)})^T f dx dy = \mathbf{v}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

где

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} f \Phi^{(i)T} dx dy = \frac{Sf}{3} [1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (22)$$

— вектор нагрузки треугольного элемента $e^{(i)}$.

5. Инвариантность матрицы жесткости $\mathbf{K}^{(i)}$

Хорошо известно, что оператор Лапласа инвариантен относительно поворота координатной системы и переноса ее начала. Иными словами, оператор Лапласа инвариантен относительно такой линейной замены независимых переменных, которая представляет собой движение плоскости как жесткого целого. Покажем, что построенная нами матрица жесткости $\mathbf{K}^{(i)}$, отвечающая оператору Лапласа, также обладает этим свойством инвариантности, т.е. полностью определяется геометрическими параметрами треугольника $e^{(i)}$ и не зависит от координат его вершин на плоскости Oxy .

Обозначим через l_j длину стороны треугольника $e^{(i)}$, расположенную напротив j -ой вершины, а через θ_j — угол при этой вершине (см. рис. 7). Каждой из сторон треугольника сопоставим коллинеарный ей вектор, совпадающий с ней по длине и направленный так, как на рис. 7.

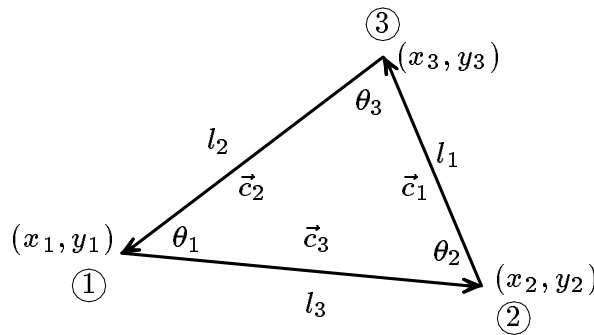


Рис. 7

Очевидно, что указанные векторы суть

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ y_1 - y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

С учетом (13), (15) эти векторы принимают вид $\mathbf{c}_j = [b_j \ -a_j]^T$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned}\|\mathbf{c}_j\|^2 &= \mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = a_j^2 + b_j^2 = l_j^2, \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j &= a_i a_j + b_i b_j = l_i l_j \cos(\pi - \theta_k) = -l_i l_j \cos \theta_k, \quad i \neq k \neq j,\end{aligned}$$

и матрица жесткости (21) принимает вид

$$K^{(i)} = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} l_1^2 & -l_1 l_2 \cos \theta_3 & -l_1 l_3 \cos \theta_2 \\ -l_2 l_1 \cos \theta_3 & l_2^2 & -l_2 l_3 \cos \theta_1 \\ -l_3 l_1 \cos \theta_2 & -l_3 l_2 \cos \theta_1 & l_3^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

З а м е ч а н и е 3. Так как $S = \frac{1}{2} l_i l_j \sin \theta_k$, $i \neq j \neq k \neq i$, а сумма элементов по строке матрицы $K^{(i)}$ равна нулю (см. (16), (21)), то матрицу $K^{(i)}$ можно записать и в следующем виде

$$K^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\operatorname{ctg} \theta_2 + \operatorname{ctg} \theta_3) & -\operatorname{ctg} \theta_3 & -\operatorname{ctg} \theta_2 \\ -\operatorname{ctg} \theta_3 & (\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_3) & -\operatorname{ctg} \theta_1 \\ -\operatorname{ctg} \theta_2 & -\operatorname{ctg} \theta_1 & (\operatorname{ctg} \theta_1 + \operatorname{ctg} \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

З а м е ч а н и е 4. Если все $\theta_k \leq \pi/2$, т.е. треугольник $e^{(i)}$ не является тупоугольным, то внедиагональные элементы матрицы жесткости (23) неположительны. Если же $e^{(i)}$ остроугольный, т.е. $\theta_k < \pi/2$, то внедиагональные элементы матрицы (23) отрицательны.

6. Упражнения

Введем одномерный аналог барицентрических координат. Пусть $[x_1, x_2]$ — отрезок оси Ox (см. рис. 8), а $l = \operatorname{mes} [x_1, x_2]$ — его длина.

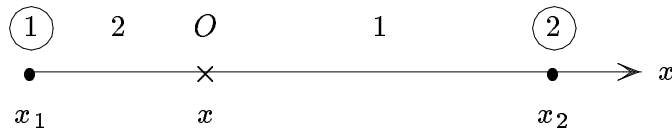


Рис. 8

Пусть точка $O \in [x_1, x_2]$ и ее координата есть x . Обозначим через $l_1 = \operatorname{mes} [x, x_2]$ и $l_2 = \operatorname{mes} [x_1, x]$. Тогда барицентрические координаты на $[x_1, x_2]$ суть

$$\zeta_i = l_i/l, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что

$$l = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x_2 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \frac{1}{1!} \det \begin{bmatrix} x & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Доказать, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \zeta_1^m \zeta_2^n dx = l \frac{m!n!1!}{(m+n+1)!}.$$

2. Доказать справедливость формулы (17).

3. Определить барицентрические координаты в тетраэдре и вывести формулу интегрирования одночлена.

Рассмотрим общее линейное эллиптическое уравнение второго порядка

$$-\sum_{m,n=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(p_{mn} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + \sum_{m=1}^2 r_m \frac{\partial u}{\partial x_m} + qu = f, \quad (25)$$

где $[p_{mn}]_1^2$ — симметричная положительно определенная матрица. Вариационная формулировка первой однородной краевой задачи для этого уравнения связана с билинейной формой

$$a(u, v) \equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{m,n=1}^2 p_{mn} \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial v}{\partial x_n} + \sum_{m=1}^2 r_m \frac{\partial u}{\partial x_m} v + quv \right) dx_1 dx_2.$$

4. Построить матрицы жесткости треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, связанные с билинейными формами

$$a_{12}^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p_{12} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 dx_2,$$

$$a_{21}^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2.$$

5. Доказать, что матрица жесткости треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, связанная с билинейной формой $a_1^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} r_1 \partial u / \partial x_1 v dx_1 dx_2$, при $r_1(x, y) = \text{const} = r_1$, $(x, y) \in e^{(i)}$ имеет вид

$$\frac{r_1}{6} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

6. Построить матрицу массы треугольного линейного элемента $e^{(i)}$, т.е. матрицу жесткости, отвечающую билинейной форме

$$a_0^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} q u v dx_1 dx_2.$$

Лекция 9

СБОРКА, СВЯЗЬ С РАЗНОСТНЫМИ СХЕМАМИ

По построенным в предыдущей лекции матрицам жесткости $K^{(i)}$ и векторам нагрузки $F^{(i)}$ конечных элементов $e^{(i)}$ теперь необходимо собрать глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $F_{(f)}$. Общая технология сборки была описана в лекции 5. Там же и в лекции 6 были приведены примеры сборки для случая обыкновенного дифференциального уравнения. Полагаю, что имевшая место некоторая нарочитость процесса сборки в этих лекциях перестанет выглядеть таковой для примера, рассматриваемого в этой лекции.

1. Пример

Применим процедуры сборки $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ к построению системы уравнений МКЭ для задачи (8.1)–(8.3) в области Ω , изображенной на рис. 1. Будем предполагать, что триангуляция Ω осуществлена согласно рис. 2, т.е. конечными элементами $e^{(i)}$ является равнобедренные прямоугольные треугольники с узлами в вершинах. Нумерация элементов и узлов также изображена на рис. 2. В рассматриваемом примере $N = N(h) = 6$, $\dim \mathbf{u}^{(i)} = 3$, $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 7$. Введем на конечных элементах локальную нумерацию узлов согласно рис. 3. Поскольку все конечные элементы

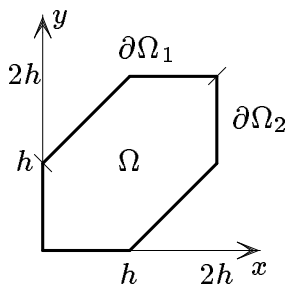


Рис. 1

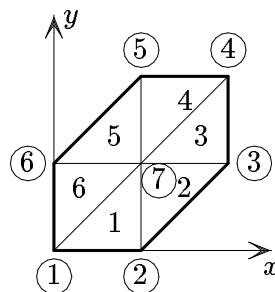


Рис. 2

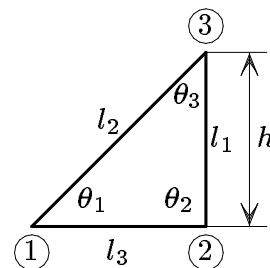


Рис. 3

одинаковые, то, в силу (8.23), одинаковыми будут и их матрицы жесткости,^{*)} а также и векторы нагрузки при $f(x, y) = \text{const}$. Так как

$$l_1 = h, \quad l_2 = \sqrt{2}h, \quad l_3 = h,$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_2 = 0, \quad \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

то, согласно (8.23), (8.22) матрица жесткости и вектор нагрузки рассматриваемого элемента суть

$$K^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{(i)} = \frac{fh^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

При построении матрицы индексов L , элементы которой определяются из соотношений (5.14), примем во внимание, что локальная нумерация узлов на элементах (см. рис. 3) начинается с острого угла, затем идет прямой угол, а обход осуществляется против хода часовой стрелки. Из сказанного и рис. 2 и 3 следует, что

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $F_{(f)}$.

Построим $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$. Из (5.15) и (5.16) следует, что вклад матрицы $K^{(1)}$ в $K_{(f)}$ и вектора $F^{(1)}$ в $F_{(f)}$ определяется элементами первого столбца матрицы индексов (2) и осуществляется следующим образом: элемент $K^{(1)}(1, 1)$ прибавляется к элементу из первой строки и первого столбца формируемой матрицы $K_{(f)}$. (Запишем это так: $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$), элемент $K^{(1)}(2, 1)$ прибавляется к элементу из второй строки и первого столбца $(2, 1) \rightarrow (2, 1)$, а $K^{(1)}(3, 1)$ – к элементу седьмой строки первого столбца $(3, 1) \rightarrow (7, 1)$ и т.д. Полный список перемещений элементов

^{*)} При соответствующей нумерации узлов.

матрицы $K^{(1)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow (1, 1) & (1, 2) &\rightarrow (1, 2) & (1, 3) &\rightarrow (1, 7) & (1) &\rightarrow (1) \\ (2, 1) &\rightarrow (2, 1) & (2, 2) &\rightarrow (2, 2) & (2, 3) &\rightarrow (2, 7) & (2) &\rightarrow (2) \\ (3, 1) &\rightarrow (7, 1) & (3, 2) &\rightarrow (7, 2) & (3, 3) &\rightarrow (7, 7) & (3) &\rightarrow (7). \end{aligned}$$

Тем самым, матрица $S^{(1)T}K^{(1)}S^{(1)}$ и вектор $S^{(1)T}\mathbf{F}^{(1)}$ из (4.19), (4.20) суть

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \frac{fh^2}{6} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix},$$

где в прямоугольники заключены элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$.

На рис. 4 изображен процесс сборки $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Каждая ячейка, отведенная на этом рисунке для элементов $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ (изображена жирными линиями) разбита на шесть клеточек, (по числу элементов в Ω), и вклад в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ от $K^{(i)}$ и $\mathbf{F}^{(i)}$ (с точностью до множителей $1/2$ у $K^{(i)}$ и $fh^2/6$ у $\mathbf{F}^{(i)}$) изображен в соответствующей клеточке, которые сопоставлены элементам $e^{(i)}$ согласно рис. 5. Описанному выше этапу сборки — вкладу элемента $e^{(1)}$ — отведены верхние левые клеточки в каждой ячейке, а элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$ размещены в тех из них, которые имеют штриховку.

1	2	3
4	5	6

Рис. 5

Вклад в $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ от остальных элементов осуществляется аналогично. Для визуализации сборки может оказаться полезным и далее выписывать таблицы новых позиций элементов $K^{(i)}$ и $F^{(i)}$. Эти таблицы строятся из надлежащим образом повторенных элементов соответствующих столбцов L . Например, для элемента $e^{(2)}$ процесс формирования таблицы таков:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 33 & 37 & 32 \\ 7 \rightarrow & 7 & 7 \rightarrow & 7 & 7 & 7 \rightarrow & 7 & 7 & 7 \rightarrow \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 33 & 37 & 32 \\ 73 & 77 & 72 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} (3, 3) & (3, 7) & (3, 2) \\ (7, 3) & (7, 7) & (7, 2) \\ (2, 3) & (2, 7) & (2, 2) \end{array}.$$

Если у нас вдруг появилась необходимость решения задачи в области Ω , изображенной на рис. 6, с триангуляцией и нумерацией узлов как на рис. 7, то в уже построенных $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ нужно произвести лишь

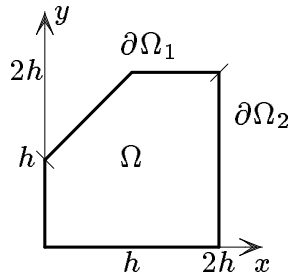


Рис. 6

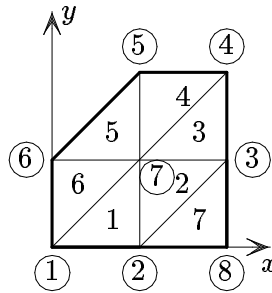


Рис. 7

небольшие изменения: увеличить размеры $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$ с семи до восьми и учесть вклад от нового элемента $e^{(7)}$. На рис. 8 изображена картинка, перенесенная с рис. 4, к которой пририсованы новые позиции для новых элементов новых $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$. Вклад от $e^{(7)}$ изображен числами в кружках, что полностью соответствует дополнительному, по сравнению с (2), столбцу новой матрицы индексов

$$L = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 \end{array} \right]. \tag{3}$$

В результате имеем следующую систему уравнений

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K_{(f)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}}_{U_{(f)}} = \frac{fh^2}{6} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}}_{F_{(f)}}. \quad (4)$$

Осталось "снять флажки". Для этого нужно учесть граничные условия. Из рис. 6 и 7 следует, что узлы с номерами 4, 5 и 6 принадлежат участку границы $\partial\Omega_1$, где заданы граничные условия первого рода, т.е. главные граничные условия. Тем самым, соответствующие уравнения в (4) (именно, четвертое, пятое и шестое) неправильные и должны быть отброшены, а неизвестным u_4 , u_5 и u_6 приписаны заданные на $\partial\Omega_1$ значения. Так как по условию u на $\partial\Omega_1$ равняется нулю, то и $u_4 = u_5 = u_6 = 0$, что соответствует вычеркиванию в оставшейся части матрицы $K_{(f)}$ четвертого, пятого и шестого столбцов. На $\partial\Omega_2$ заданы однородные граничные условия второго рода. Эти условия являются естественными. Более того, они не вносят возмущений ни в билинейную форму $a(u, v)$, порожденную оператором Лапласа, ни в линейную форму $l(v)$, порожденную правой частью уравнения (8.1). Тем самым, никаких изменений в матрицу $K_{(f)}$ и вектор $F_{(f)}$ эти граничные условия не вносят, и окончательный вид системы уравнений таков:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = fh^2 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е . Если бы на $\partial\Omega_2$ или на ее части $\partial\Omega'_2 \subset \partial\Omega_2$ вместо однородного граничного условия второго рода было задано неоднородное граничное условие третьего рода, т.е. условие

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \kappa u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega'_2,$$

то это внесло бы возмущение и в билинейную форму (8.5) и в линейную форму (8.6). Именно, новая билинейная форма, обозначенная через $a_1(u, v)$, имела бы вид

$$a_1(u, v) = a(u, v) + \int_{\partial\Omega'_2} \varkappa uv ds,$$

а новая линейная форма —

$$l_1(v) = l(v) + \int_{\partial\Omega'_2} g v ds,$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются (8.5) и (8.6). Эти возмущения должны были быть приняты во внимание при "снятии флажков" у $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$.

Пусть, например, Ω такова, как на рис. 6

$$\partial\Omega'_2 = [(x, y) | y = 0, \quad 0 < x < 2h],$$

а \varkappa и g постоянные. Тогда возмущающие добавки отразятся на матрицах жесткости и векторах нагрузки первого и седьмого элементов (см. рис. 7). Именно, к матрицам и векторам этих элементов (1) добавятся матрицы

$$\begin{aligned} K_{\varkappa}^{(1)} &= \int_0^h \varkappa \begin{bmatrix} \zeta_1(x, 0) \\ \zeta_2(x, 0) \\ \zeta_3(x, 0) \end{bmatrix} [\zeta_1(x, 0) \quad \zeta_2(x, 0) \quad \zeta_3(x, 0)] dx = \\ &= h \varkappa \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K_{\varkappa}^{(7)} \end{aligned}$$

и векторы

$$F_g^{(1)} = \int_0^h g \begin{bmatrix} \zeta_1(x, 0) \\ \zeta_2(x, 0) \\ \zeta_3(x, 0) \end{bmatrix} dx = gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = F_g^{(7)}.$$

С учетом (3) результирующая матрица, которая должна быть добавлена к $K_{(f)}$, есть

$$\frac{h\kappa}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а результирующий вектор, который должен быть добавлен к $\mathbf{F}_{(f)}$, —

$$\frac{gh}{2} [1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

2. Связь с разностными схемами

Посмотрим на уравнения системы (4) с точки зрения теории разностных схем. Несмотря на то, что вид большинства уравнений этой системы тесным образом связан с видом области Ω , можно усмотреть и общие закономерности. Переход от области Ω , изображенной на рис. 1, к области, изображенной на рис. 6, привел к видоизменению второго и третьего уравнений (см. рис. 8). Связано это с тем, что узлы с номерами 2 и 3 являются узлами нового (седьмого) элемента. Нетрудно понять, что еще большее расширение области Ω может привести к изменению всех уравнений системы (4), за исключением седьмого: в отличие от узлов 1 – 6 и 8 узел с номером 7 не может принадлежать (без изменения триангуляции) никаким конечным элементам, кроме тех, которые изображены на рис. 2. Отсюда следует, что, если рис. 2 рассматривать всего лишь как фрагмент триангуляции какой-либо области, то уравнение с номером 7 из (4) все равно будет иметь тот же вид. Выпишем это уравнение отдельно

$$-(u_2 + u_3 + u_5 + u_6) + 4u_7 = h^2 f. \quad (6)$$

Узлы, значения приближенного решения в которых использованы при написании этого уравнения, изображены на рис. 9

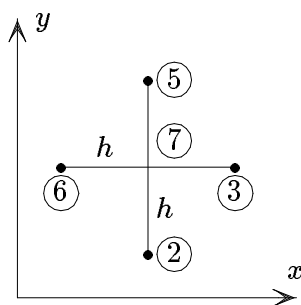


Рис. 9

Если (x, y) - координаты седьмого узла, то координаты второго, третьего, пятого и шестого суть $(x, y - h)$, $(x + h, y)$, $(x, y + h)$, $(x - h, y)$. Поделим уравнение (6) на h^2 и перепишем с учетом того, что $u_i = u^h(x_i, y_i)$. Будем иметь

$$\frac{u^h(x + h, y) - 2u^h(x, y) + u^h(x - h, y)}{h^2} - \frac{u^h(x, y + h) - 2u^h(x, y) + u^h(x, y - h)}{h^2} = f.$$

Но это уравнение есть не что иное, как классическая пятиточечная аппроксимация уравнения Пуассона (8.1). Вводя сокращенные обозначения для разностных отношений

$$v_x = \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h}, \quad v_{\bar{x}} = \frac{v(x, y) - v(x - h, y)}{h}, \quad v_{\bar{x}x} = (v_{\bar{x}})_x \quad (7)$$

и т.д., вышеприведенное уравнение запишем так

$$-(u_{\bar{x}x}^h + u_{\bar{y}y}^h) = f. \quad (8)$$

Очевидно, что при достаточной гладкости решения уравнения (8.1) погрешность аппроксимации уравнения (8.1) уравнением (8) в точке (x, y) есть величина $O(h^2)$.

Помимо седьмого уравнения системы (4) заслуживает внимания и уравнение с номером 2. Это уравнение также будет окончательно сформировано, если предположить, что участок границы $\partial\Omega_2$ является отрезком прямой, проходящей через узлы 1, 2 и 8. Указанное уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{2}u_1 + 2u_2 - u_7 - \frac{1}{2}u_8 = \frac{h^2 f}{2}. \quad (9)$$

Для написания уравнения (9) использованы значения приближенного решения в узлах, изображенных на рис. 10. Пусть (x, y) — координаты

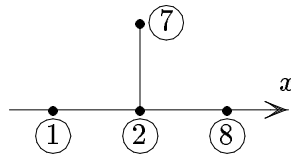


Рис. 10

узла с номером 2. Тогда координаты узлов 1, 7, 8 суть $(x-h, y)$, $(x, y+h)$ и $(x+h, y)$. Поделим уравнение (9) на h и перепишем в виде

$$-\frac{u^h(x, y+h) - u^h(x, y)}{h} - \frac{h}{2} \frac{u^h(x-h, y) - 2u^h(x, y) + u^h(x+h, y)}{h^2} = \frac{h}{2} f.$$

С учетом обозначений (7) будем иметь

$$-u_y^h - \frac{h}{2} u_{\bar{x}x}^h = \frac{h}{2} f. \quad (10)$$

Уравнение (10) совпадает с хорошо известной разностной аппроксимацией граничного условия (8.3) для уравнения Пуассона (8.1), когда $\partial\Omega_2$ образована отрезком прямой, параллельной от Ox , а направление нормали к $\partial\Omega_2$, внешней по отношению к Ω , противоположно оси Oy . Остальные уравнения системы (4) также могут рассматриваться как разностные аппроксимации граничного условия (8.3), однако они менее поучительны по сравнению с рассматриваемыми нами уравнениями 2 и 7.

3. Упражнения

1. Выписать матрицу жесткости треугольного элемента, изображенного на рис. 3, при условии, что узлы пронумерованы, начиная с вершины прямого угла.

а) Выполнить задание путем непосредственных вычислений.

б) Ввести матрицу индексов, рассматривая элемент из рис. 3 (вместе с нумерацией узлов) как исходный, а новый элемент (элемент с новой нумерацией узлов) как часть композиции.

2. Выписать матрицу жесткости и вектор нагрузки правильного треугольника. Написать общее уравнение системы при такой триангуляции. (Аналог уравнения (6))

3. Исследовать погрешность аппроксимации граничного условия (8.3) уравнением (10).

4. Написать аналог уравнения (10) для случая граничного условия третьего рода.

5. Исследовать погрешность аппроксимации уравнения (8.1) разностным уравнением из упражнения 2.

6. Выписать аналог системы (5) для случая, когда на $\partial\Omega_1$ задано неоднородное условие: $u|_{\partial\Omega_1} = u_0 = \text{const}$.

7. Выписать матрицу жесткости конечного элемента, изображенного на рис. 3, отвечающую билинейной форме из упражнения 8.5. Показать, что применительно к уравнению $-\Delta u + \partial u / \partial x = f$, аналогом уравнения (6) является следующее уравнение:

$$-(u_2 + u_3 + u_5 + u_6) + 4u_7 + \frac{h}{6}(-u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4 - u_5 - 2u_6) = h^2 f.$$

Лекция 10

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

1. Квадратичные и кубические треугольные конечные элементы

В лекции 8 при построении МКЭ для уравнения Пуассона на плоскости были использованы простейшие треугольные конечные элементы с тремя узлами в вершинах и линейными функциями формы. Будем их называть *линейными треугольными элементами*. Эти элементы явились обобщением на двумерный случай двухточечных конечных элементов из лекции 3, образующих конечноэлементное пространство кусочно-линейных непрерывных функций S_1^h . В лекции 6 мы увидели, что функции формы конечного элемента могут быть не только линейными, но и квадратичными и вообще полиномиальными. Для описания этих элементов потребовалось лишь введение дополнительных узлов с сохранением узлов на концах элементов, что обеспечило непрерывность приближенного решения. Точно такая же ситуация имеет место и в двумерном случае. Треугольные элементы могут быть не только линейными, но квадратичными, кубическими и т.д. И здесь для их описания требуется введение дополнительных узлов. Так как, например, квадратичная функция на плоскости однозначно определяется своими значениями в шести точках, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, то узлы квадратичного треугольного элемента можно расположить в вершинах треугольника и в серединах его сторон. Как и в случае квадратичных элементов на отрезке (лекция 6), расположение узлов в серединах сторон не является необходимым, но удобно с точки зрения симметрии. *Убедитесь, что расположение узлов в вершинах треугольника и по одному на каждой стороне — единственная возможность обеспечения непрерывности конечноэлементного пространства кусочно-квадратичных функций.*

Пусть узлы треугольного элемента пронумерованы как на рис. 1.

Построим его функции формы.

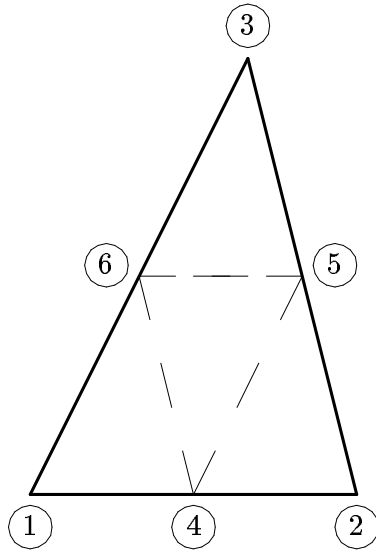


Рис. 1

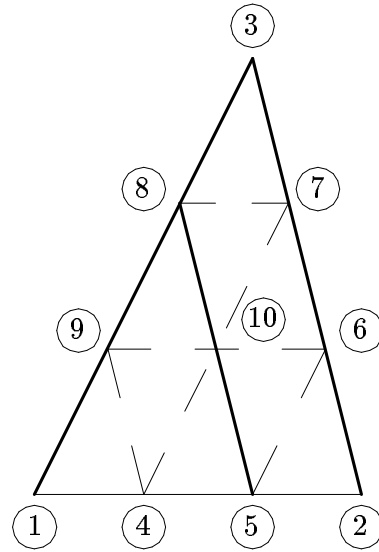


Рис. 2

Поскольку каждая функция формы отлична от нуля лишь в одном узле и там принимает значение единица, то, например, φ_1 должна

- 1° обращаться в нуль в узлах 2, 5 и 3,
- 2° обращаться в нуль в узлах 4 и 6,
- 3° быть равной единице в узле 1.

Для удовлетворения условий 1° достаточно, чтобы в представлении φ_1 присутствовал множитель ζ_1 (барицентрическая координата — см. лекцию 8). Условие 2° будет выполнено, если в представлении φ_1 присутствует множитель $(\zeta_1 - 1/2)$. Теперь осталось домножить произведение $\zeta_1(\zeta_1 - 1/2)$ на постоянную, чтобы удовлетворить 3°. Поскольку барицентрические координаты суть линейные функции декартовых координат x и y , то построенное произведение есть квадратичная функция и следовательно $\varphi_1 = 2\zeta_1(\zeta_1 - 1/2)$. Аналогично находим, что

$$\varphi_i = 2\zeta_i(\zeta_i - 1/2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

С остальными функциями формы еще проще: каждая из них должна обращаться в нуль на двух сторонах треугольника, не содержащих узла, отвечающего этой функции. Поэтому

$$\varphi_4 = 4\zeta_1\zeta_2, \quad \varphi_5 = 4\zeta_2\zeta_3, \quad \varphi_6 = 4\zeta_3\zeta_1. \quad (2)$$

Точно так же строятся кубические треугольные элементы, число узлов которых должно быть равным десяти. Располагаются узлы следующим образом: в вершинах треугольников, по два на сторонах и один внутри. Из соображений симметрии на каждой стороне узлы целесообразно расположить равноудаленными, а внутренний узел — в центре тяжести треугольника. Такое расположение узлов изображено на рис. 2. Очевидно, что первые три функции формы задаются соотношениями

$$\varphi_i = 9/2\zeta_i(\zeta_i - 2/3)(\zeta_i - 1/3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Что касается, например, φ_4 , то она должна обращаться в нуль на прямых, содержащих изображенные на рис. 2 жирными сплошными линиями отрезки, а φ_{10} должна обращаться в нуль на всех сторонах. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= 27/2\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 - 1/3), & \varphi_5 &= 27/2\zeta_1\zeta_2(\zeta_2 - 1/3), \\ \varphi_6 &= 27/2\zeta_2\zeta_3(\zeta_2 - 1/3), & \varphi_7 &= 27/2\zeta_2\zeta_3(\zeta_3 - 1/3), \\ \varphi_8 &= 27/2\zeta_3\zeta_1(\zeta_3 - 1/3), & \varphi_9 &= 27/2\zeta_3\zeta_1(\zeta_1 - 1/3), \\ & & \varphi_{10} &= 27\zeta_1\zeta_2\zeta_3. \end{aligned}$$

2. Матрицы жесткости квадратичного элемента

Вычислим матрицу жесткости *квадратичного треугольного элемента*, определяемую билинейной формой

$$\int_{e^{(i)}} [\nabla v^h]^T [\nabla u^h] dx dy,$$

т.е. отвечающую оператору Лапласа. Пусть (x_j, y_j) — декартовы координаты j -ой вершины треугольника $e^{(i)}$ (см. рис. 1), S — площадь этого треугольника, а $\Phi^{(i)} = [\varphi_1, \dots, \varphi_6]$ — матрица функций формы элемента $e^{(i)}$. Из (1), (2) с учетом (8.14) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} &= \frac{a_j}{2S}(4\zeta_j - 1), \\ \frac{\partial \varphi_{3+j}}{\partial x} &= \frac{2}{S}(a_{j+1}\zeta_j + a_j\zeta_{j+1}), \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где согласно (8.13), (8.15) $a_j = y_{j+1} - y_{j+2}$, а суммирование в индексах у ζ_j, a_j, y_j осуществляется по модулю три. Поэтому

$$\left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & C_{112} & C_{123} & C_{131} \\ & A_{22} & A_{23} & C_{212} & C_{223} & C_{231} \\ & & A_{33} & C_{312} & C_{323} & C_{331} \\ & & & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & & & & B_{22} & B_{23} \\ & & & & & B_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \frac{a_k a_l}{4S^2} (4\zeta_k - 1)(4\zeta_l - 1), \\ B_{kl} &= \frac{4}{S^2} (a_k \zeta_{k+1} + a_{k+1} \zeta_k)(a_l \zeta_{l+1} + a_{l+1} \zeta_l), \\ C_{jkl} &= \frac{a_j}{S^2} (4\zeta_j - 1)(a_k \zeta_l + a_l \zeta_k) = C_{jlk}. \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования барицентрического одночлена (8.17), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} A_{kk} dx dy &= \frac{a_k^2}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (4\zeta_k - 1)^2 dx dy = \frac{a_k^2}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (16\zeta_k^2 - 8\zeta_k + 1) dx dy = \frac{a_k^2}{4S}, \\ \int_{e^{(i)}} A_{kl} dx dy &= \frac{a_k a_l}{4S^2} \int_{e^{(i)}} (16\zeta_k \zeta_l - 4\zeta_k - 4\zeta_l + 1) dx dy = -\frac{a_k a_l}{12S}, \quad k \neq l. \end{aligned}$$

Далее, при $j = k \neq l$

$$\int_{e^{(i)}} C_{kkl} dx dy = \frac{a_k}{S^2} \int_{e^{(i)}} (4a_k \zeta_k \zeta_l - a_k \zeta_l + 4a_l \zeta_k^2 - a_l \zeta_k) dx dy = \frac{a_k a_l}{3S},$$

а при $j \neq k \neq l \neq j$

$$\int_{e^{(i)}} C_{jkl} dx dy = \frac{a_j}{S^2} \int_{e^{(i)}} (4a_k \zeta_j \zeta_l - a_k \zeta_l + 4a_l \zeta_j \zeta_k - a_l \zeta_k) dx dy = 0.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} B_{kk} dx dy &= \frac{4}{S^2} \int_{e^{(i)}} (a_k \zeta_{k+1} + a_{k+1} \zeta_k)^2 dx dy = \frac{2}{S} (a_k^2 + a_{k+1}^2 + a_k a_{k+1}) = \\ &= \frac{1}{S} (a_k^2 + a_{k+1}^2 + (a_k + a_{k+1})^2) = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{S}, \end{aligned}$$

ибо согласно (8.16) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, а

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} B_{12} dx dy &= \frac{4}{S^2} \int_{e^{(i)}} (a_1 \zeta_2 + a_2 \zeta_1)(a_2 \zeta_3 + a_3 \zeta_2) dx dy = \\ &= \frac{1}{3S} (a_1 a_2 + a_2^2 + 2a_1 a_3 + a_2 a_3) = \frac{2a_1 a_3}{S} \end{aligned}$$

и поэтому

$$\int_{e^{(i)}} B_{13} dx dy = \frac{2a_2 a_3}{S}, \quad \int_{e^{(i)}} B_{23} dx dy = \frac{2a_1 a_2}{S}.$$

Итак, матрица жесткости квадратичного треугольного элемента, отвечающая билинейной форме $\int_{e^{(i)}} \partial v^h / \partial x \partial u^h / \partial x dx dy$, есть

$$K^{(i)}(a) = \frac{1}{12S} \times \begin{bmatrix} 3a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 & 4a_1 a_2 & 0 & 4a_1 a_3 \\ -a_1 a_2 & 3a_2^2 & -a_2 a_3 & 4a_1 a_2 & 4a_2 a_3 & 0 \\ -a_1 a_3 & -a_2 a_3 & 3a_3^2 & 0 & 4a_2 a_3 & 4a_1 a_3 \\ 4a_1 a_2 & 4a_1 a_2 & 0 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & 8a_1 a_3 & 8a_2 a_3 \\ 0 & 4a_2 a_3 & 4a_2 a_3 & 8a_1 a_3 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & 8a_1 a_2 \\ 4a_1 a_2 & 0 & 4a_1 a_3 & 8a_2 a_3 & 8a_1 a_2 & 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, что матрицей жесткости для $\int_{e^{(i)}} \partial v^h / \partial y \partial u^h / \partial y dx dy$ является матрица $K(b)$, которая отличается от $K(a)$ лишь тем, что у нее всюду вместо a_j стоят b_j (см. (8.13), (8.15)), а полная матрица жесткости конечного элемента $e^{(i)}$, отвечающая оператору Лапласа есть

$$K^{(i)} = K^{(i)}(a) + K^{(i)}(b).$$

Эту матрицу, как и матрицу (8.21) линейного треугольного элемента, можно записать в инвариантном виде, то есть в виде, не зависящем от расположения треугольника $e^{(i)}$ на плоскости Oxy

$$K^{(i)} = \frac{1}{12S} \times \begin{bmatrix} 3l_1^2 & l_1 l_2 \cos \theta_3 & l_1 l_3 \cos \theta_2 & -4l_1 l_2 \cos \theta_3 & 0 & -4l_1 l_3 \cos \theta_2 \\ & 3l_2^2 & l_2 l_3 \cos \theta_1 & -4l_1 l_2 \cos \theta_3 & -4l_2 l_3 \cos \theta_1 & 0 \\ & & 3l_3^2 & 0 & -4l_2 l_3 \cos \theta_1 & -4l_1 l_3 \cos \theta_2 \\ \times & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) & -8l_1 l_3 \cos \theta_2 & -8l_2 l_3 \cos \theta_1 \\ & & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) & -8l_1 l_2 \cos \theta_3 \\ & & & & & 4(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) \end{bmatrix}.$$

Приведем вид матрицы массы треугольного квадратичного элемента

$$M^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} \Phi^{(i)} dx dy = \frac{S}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

3. Прямоугольные конечные элементы

Пусть область Ω , в которой требуется найти решение той или иной задачи, является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, или композицией таких прямоугольников. Эту область легко триангулировать конечными элементами в виде прямоугольников, стороны которых также параллельны координатным осям. Простейшим прямоугольным элементом является *билинейный элемент* с узлами в вершинах. Благодаря оговоренной ориентации элемента относительно осей координат билинейная функция, определенная на элементе,

на его сторонах становится линейной и полностью определяется своими значениями в узлах, принадлежащих соответствующим сторонам. Это обеспечивает непрерывность кусочно-билинейной функции, определяемой на композиции конечных элементов.

З а м е ч а н и е 1. Если бы стороны конечных элементов не были параллельны координатным осям, то заданная на конечном элементе билинейная функция $v(x, y) = a + bx + cy + dxy$ при сужении на его границу была бы не линейной вдоль стороны, а квадратичной, и двух ее значений в вершинах элемента, принадлежащих этой стороне, было бы недостаточно для ее однозначного определения. А это, в свою очередь, привело бы к тому, что кусочно-билинейная функция, определяемая своими узловыми значениями в вершинах элементов, на композиции конечных элементов была бы разрывной.

Построим функции формы прямоугольного билинейного элемента со сторонами, параллельными координатным осям. На рис. 3 изображен базисный прямоугольный элемент с узлами в вершинах. Функции фор-

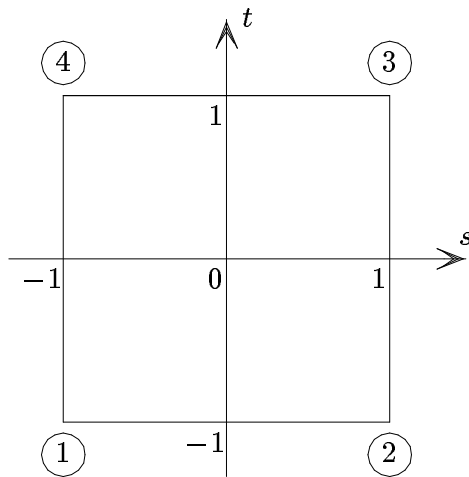


Рис. 3

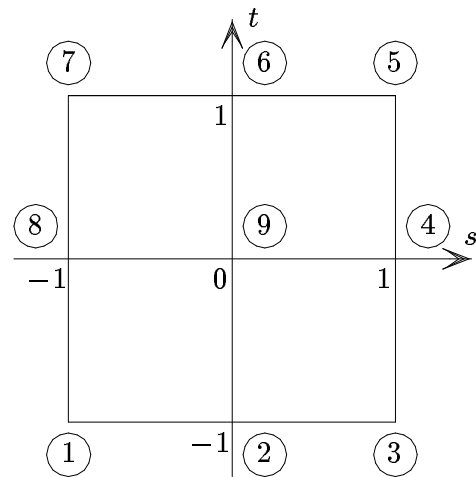


Рис. 4

мы на этом элементе определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, t) &= \frac{1}{4}(1 - s)(1 - t), & \varphi_2(s, t) &= \frac{1}{4}(1 + s)(1 - t), \\ \varphi_3(s, t) &= \frac{1}{4}(1 + s)(1 + t), & \varphi_4(s, t) &= \frac{1}{4}(1 - s)(1 + t). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что для произвольного прямоугольного конечного элемента

$$e^{(i,j)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

функции формы получаются из (6) путем замены переменных

$$\frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}/2} = s + 1, \quad \frac{y - y_{j-1}}{h^{(j)}/2} = t + 1, \quad (7)$$

где $h^{(i)} = x_i - x_{i-1}$, $h^{(j)} = y_j - y_{j-1}$, т.е.

$$\varphi_k^{(i,j)} = \varphi_k \left(\frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}/2} - 1, \frac{y - y_{j-1}}{h^{(j)}/2} - 1 \right).$$

Наряду с билинейными прямоугольными конечными элементами можно ввести в рассмотрение *биквадратичные*, *бикубичные* и вообще *биполиномиальные* прямоугольные элементы. На рис. 4 изображен базисный прямоугольный элемент с девятью узлами, расположенными в вершинах, в серединах сторон и в центре. Не составляет труда выписать функции формы этого элемента.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(s-1)s(t-1)t, & \varphi_2 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t-1)t, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(s+1)s(t-1)t, & \varphi_4 &= \frac{1}{2}(s+1)s(1-t^2), \\ \varphi_5 &= \frac{1}{4}(s+1)s(t+1)t, & \varphi_6 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t+1)t, \\ \varphi_7 &= \frac{1}{4}(s-1)s(t+1)t, & \varphi_8 &= \frac{1}{2}(s-1)s(1-t^2), \\ \varphi_9 &= (1-s^2)(1-t^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотренные нами билинейный и биквадратичный прямоугольные конечные элементы относятся к семейству полных биполиномиальных элементов: функция, заданная на элементе, есть произведение многочлена от одной переменной на многочлен от другой переменной. Помимо таких элементов в вычислительной практике встречаются и, так называемые, неполные биполиномиальные элементы, у которых в представлении функции на элементе отсутствуют некоторые члены из имеющихся у полного элемента (например, член с x^2y^2 , имеющийся у биквадратичного элемента). Неполные элементы имеют меньшее по сравнению с полными элементами число степеней свободы и соответственно меньшее число узлов. Но здесь есть важное ограничение: для того,

чтобы не нарушить непрерывность кусочно-биномиальной функции, задаваемой своими значениями в узлах, на композиции конечных элементов, нельзя трогать узлы, расположенные на границе элемента. Поэтому неполный биквадратичный элемент обязан иметь восемь узлов и все на границе, а у неполного бикубического элемента число узлов может быть от пятнадцати до двенадцати (только на границе). Неполные элементы, у которых узлы расположены только на границе, образуют так называемое сирендипово семейство. На рис. 5 изображен базисный прямоугольный элемент с восемью узлами на сторонах. Построим его функции формы. Для этого воспользуемся функциями формы полного

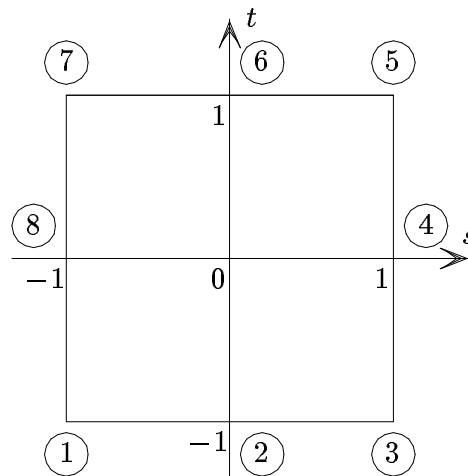


Рис. 5

биквадратичного элемента (8). Однако, без дополнительных предположений однозначно функции формы неполного элемента определить нельзя. Поэтому будем, например, требовать, чтобы представление функции на конечном элементе в отличие от биквадратичной функции не содержало члена с наивысшей степенью по s и t в последней, т.е. члена s^2t^2 . Функции формы сирендипова восьмиточечного элемента, изображенного на рис. 5, как обычно, будем обозначать через φ_k , $k = 1, \dots, 8$, а на функции формы (8) биквадратичного элемента будем ссылаться как на $\tilde{\varphi}_k$, $k = 1, \dots, 9$. Интересующие нас функции формы будем искать в виде $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k + \alpha_k \tilde{\varphi}_9$, где постоянная α_k выбирается из тех соображений, чтобы в φ_k отсутствовал член s^2t^2 . Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \tilde{\varphi}_1 + \alpha_1 \tilde{\varphi}_9 = \frac{1}{4}(s-1)s(t-1)t + \alpha_1(1-s^2)(1-t^2) = \\ &= (s-1)(t-1) \left[\frac{st}{4} + \alpha_1(1+s+t+st) \right].\end{aligned}$$

Отсюда находим, что требуемое значение $\alpha_1 = -1/4$ и поэтому

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4}(s-1)(t-1)(1+s+t).$$

Аналогично находятся и остальные функции формы

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{1}{2}(1-s^2)(t-1), & \varphi_3 &= \frac{1}{4}(s+1)(t-1)(1-s+t), \\ \varphi_4 &= \frac{1}{2}(s+1)(1-t^2), & \varphi_5 &= -\frac{1}{4}(s+1)(t+1)(1-s-t), \\ \varphi_6 &= \frac{1}{2}(1-s^2)(t+1), & \varphi_7 &= \frac{1}{4}(s-1)(t+1)(1+s-t), \\ \varphi_8 &= -\frac{1}{2}(s-1)(1-t^2).\end{aligned}$$

4. Матрица жесткости билинейного элемента

Построим матрицу жесткости билинейного элемента, отвечающую оператору Лапласа. Пусть $x_i - x_{i-1} = h^{(i)} = h_1$, $y_j - y_{j-1} = h^{(j)} = h_2$, $\Phi^{(i,j)}$ — матрица функций формы, а

$$K_1^{(i,j)} = \int_{e^{(i,j)}} \left[\frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial x} \right] dx dy.$$

Делая в интеграле замену переменных (7), находим, что

$$K_1^{(i,j)} = \frac{h_2}{h_1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial s} \end{bmatrix} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial s} \right] ds dt. \quad (9)$$

Из (6)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = -\frac{1-t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} = \frac{1-t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} = \frac{1+t}{4}, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial s} = -\frac{1+t}{4}$$

и, следовательно,

$$K_1^{(i,j)} = \frac{h_2}{6h_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим, что

$$K_2^{(i,j)} = \int_{e^{(i,j)}} \left[\frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial y} \right]^T \left[\frac{\partial \Phi^{(i,j)}}{\partial y} \right] dx dy = \frac{h_1}{6h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

а полная матрица жесткости билинейного элемента $e^{(i,j)}$ при $h_1 = h_2$

$$K^{(i,j)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Найдем глобальную матрицу жесткости для квадратной области, разбитой на четыре квадратных конечных элемента и изображенной на рис. 6. Согласно рисункам 3 и 6

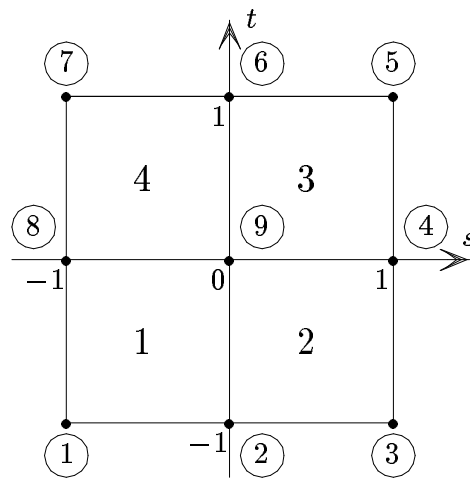


Рис. 6

матрица индексов имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из (10) находим, что глобальная матрица жесткости

$$K_{(f)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 8 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}.$$

Последняя строка этой матрицы определяет уравнение, отнесенное к узлу 9 на рис. 6, левая часть которого есть

$$-\frac{1}{3}[(u_1 - 2u_2 + u_3) - 2(u_8 - 2u_9 + u_4) + (u_5 - 2u_6 + u_7) + 3(u_2 - 2u_9 + u_6) + 3(u_8 - 2u_9 + u_4)].$$

Если неизвестные обозначить через $u_{i,j}$, где (x_i, y_j) — координаты узлов, то после деления на h^2 это выражение можно записать в виде

$$-[u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} + \frac{h^2}{3}u_{\bar{x}x\bar{y}y}]_{ij}. \quad (11)$$

5. Упражнения

1. Убедиться, что для матриц (4) и (5) справедливы утверждения 6.1 и 6.2, соответственно.
2. Найти вектор нагрузки квадратичного элемента, предполагая, что $f(x, y) = \text{const}$ при $(x, y) \in e^{(i)}$.
3. При том же условии, что и в задаче 2, найти вектор нагрузки билинейного элемента.
4. Построить матрицу массы биквадратичного элемента.

Лекция 11

ПРИГОТОВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ

При применении того или иного приближенного метода для решения интересующей нас задачи мы вправе ожидать, что полученное решение в каком-то смысле близко к точному. Мы хотели бы также надеяться, что этот метод позволяет найти решение с любой интересующей нас точностью. Иными словами, мы хотим, чтобы используемый для вычислений приближенный метод был сходящимся. В методах Рунге и Галеркина параметром, управляющим сходимостью, является размерность n конечномерного пространства V^n , в котором ищется приближенное решение. Как мы уже отмечали, в методе конечных элементов за размерность S^h отвечает параметр h , характеризующий размер конечных элементов. Поэтому сходимость следует ожидать при $h \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что приближенный метод сходится, если последовательность приближенных решений u^h при $h \rightarrow 0$ сходится в некоторой норме к точному решению, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| u - u^h \| = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2. Говорят, что метод сходится со скоростью $O(h^k)$, $k > 0$, если при $h \rightarrow 0$

$$\| u - u^h \| = O(h^k).$$

В последующих лекциях будет доказана сходимость некоторых из построенных нами методов конечных элементов и даны оценки их скорости сходимости в некоторых нормах. Чтобы все это сделать, нам потребуются некоторые приготовления, которым и посвящена настоящая лекция.

1. Постановка задачи

Напомним постановки вариационной задачи и задачи минимизации функционала, лежащие в основе МКЭ. Сделаем это в абстрактном виде без конкретизации билинейной и линейной форм. Пусть H — гильбертово пространство, $l(v)$ — линейная форма, заданная на H , т.е.

$$l(v) : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 l(v_1) + c_2 l(v_2),$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а $a(u, v)$ — билинейная симметричная, положительная форма, т.е.

$$\begin{aligned} a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) &= c_1 a(u_1, v) + c_2 a(u_2, v), \\ a(u, v) = a(v, u), \quad a(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть, кроме того, задан квадратичный функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) : H \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Задача 1. Найти

$$u \in H : J(u) = \inf_{v \in H} J(v). \quad (3)$$

Задача 2. Найти

$$u \in H : a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \quad (4)$$

Напомним, что в силу теоремы 2.1 задачи 1 и 2 эквивалентны.

Поставим задачу об отыскании приближенного решения. Пусть H^h — конечномерное подпространство пространства H , т.е.

$$H^h \subset H, \quad \dim H^h = n < \infty. \quad (5)$$

Тогда ритцевским решением задачи 1 будет функция

$$u^h \in H^h : J(u^h) = \inf_{v^h \in H^h} J(v^h), \quad (6)$$

а галеркинским решением задачи 2 — функция

$$u^h \in H^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \quad (7)$$

Решения задач (6) и (7) совпадают. Как следует из результатов лекции 3, существование и единственность этих решений вытекает из предположения (1) о положительности квадратичной формы $a(v, v)$.

З а м е ч а н и е 1. Билинейная форма $a(u, v)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

О п р е д е л е н и е 3. При выполнении условий (1) билинейную форму $a(u, v)$ будем называть *энергетическим скалярным произведением*.

О п р е д е л е н и е 4. При выполнении условий (1) квадратный корень из квадратичной формы $a(u, v)$ будем называть *энергетической нормой* и обозначать $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$.

З а м е ч а н и е 2. При некоторых интерпретациях задачи 2 квадратичная форма $a(v, v)$ может трактоваться как удвоенная потенциальная энергия, с чем и связаны названия в определениях 3 и 4.

2. Свойства приближенного решения

Т е о р е м а 1. *Приближенное решение u^h есть ортогональная в смысле энергетического скалярного произведения $a(\cdot, \cdot)$ проекция точного решения u на H^h , т.е.*

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in H^h. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (4) $v = v^h \in H^h$ и вычитая из полученного соотношения (7), получим (8). Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (основная). *Приближенное решение u^h есть наилучшее в смысле энергетической нормы $\|\cdot\|_a$ приближение точного решения u в H^h , т.е.*

$$\|u - u^h\|_a = \inf_{v^h \in H^h} \|u - v^h\|_a. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (8) векторы $u - u^h$ и u^h ортогональны и, следовательно,

$$\|u\|_a^2 = \|u - u^h\|_a^2 + \|u^h\|_a^2.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|u - u^h\|_a \leq \|u\|_a.$$

Принимая теперь во внимание, что ортогональная проекция $v^h \in H^h$ на H^h есть та же v^h , находим, что

$$\|u - u^h\|_a = \|(u - v^h) - (u - v^h)^h\|_a \leq \|u - v^h\|_a,$$

откуда и следует (9). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. В силу теоремы 2 задача оценки разности между точным и приближенным решениями в энергетической норме свелась к задаче оценки аппроксимации функции $u \in H$ функциями $v^h \in H^h$.

Свойство симметрии билинейной формы $a(u, v)$ полезно, но не необходимо для справедливости соотношений типа (9). В симметричном случае билинейная форма, порождающая положительно определенную квадратичную форму, является скалярным произведением, а потому индуцирует норму, и для нее справедливо *неравенство Шварца*:

$$\|v\|_a^2 = a(v, v), \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_a \|v\|_a.$$

В *несимметричном* случае эти свойства билинейной формы заменяются двумя *условиями*: условием

$$0 < m \|v\|_H^2 \leq a(v, v), \quad (10)$$

называемым *условием коэрцитивности или H-эллиптичности*, и условием

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad (11)$$

называемым *условием непрерывности билинейной формы*. Имеет место

Т е о р е м а 3 (Лемма Сеа). Если билинейная форма $a(u, v)$ коэрцитивна и непрерывна, а u и u^h суть решения задач (4) и (7), соответственно, то

$$\|u - u^h\| \leq \frac{M}{m} \|u - v^h\|_H \quad \forall v^h \in H^h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (8) имеет место и в несимметричном случае, поэтому

$$a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v^h) + a(u - u^h, v^h - u^h) = a(u - u^h, u - v^h).$$

Используя теперь условия коэрцитивности и непрерывности, получаем оценку

$$m \|u - u^h\|_H^2 \leq M \|u - u^h\|_H \|u - v^h\|_H,$$

из которой и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Модельная задача

Напомним постановку дифференциальной задачи, на примере которой в предыдущих лекциях мы изучали различные варианты МКЭ.

Требуется найти функцию $u(x)$, которая удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$Lu \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in I = (0, 1), \quad (12)$$

$$u(0) = 0, \quad p(1)u'(1) + \varkappa u(1) = g. \quad (13)$$

Вариационная формулировка этой задачи имеет вид (4), где

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx + \varkappa u(1)v(1), \quad (14)$$

$$l(v) = \int_0^1 fvdx + gv(1),$$

а

$$H = \tilde{H}^1(I) = \{v(x) \in H^1(I) \mid v(0) = 0\}. \quad (15)$$

Будем, как и раньше, предполагать, что

$$p(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \varkappa \geq 0 \quad (16)$$

и, кроме того,

$$p(x) \leq c_1, \quad q(x) \leq c_2. \quad (17)$$

Приближенным решением задачи (12),(13) будет функция $u^h(x)$ из (6) или (7), где $a(u, v)$ и $l(v)$ определяются (14), а $H^h = \tilde{S}^h \subset \tilde{H}^1(I)$ — некоторое конечноэлементное пространство. Существование и единственность указанного приближенного решения задачи (12),(13) гарантируется теоремой из лекции 3 при условии, что $a(v, v)$ из (14) положительна. Ее неотрицательность очевидным образом следует из (16). Эти же условия обеспечивают и положительность $a(v, v)$ на $\tilde{H}^1(I)$, но, чтобы увидеть это, требуются некоторые рассуждения.

4. Вспомогательные оценки

Здесь мы установим ряд неравенств между нормами функций из $H^1(I)$ и $H^2(I)$. Эти неравенства будут использованы при исследовании вопроса о положительности квадратичной формы $a(v, v)$ и при исследовании аппроксимационных свойств пространства S^h . Доказываемая ниже лемма 1, помимо прочего, устанавливает справедливость уже использованного нами ранее утверждения о непрерывности функций из $H^1(I)$.

Л е м м а 1. *Всякая функция из $H^1(I)$ непрерывна на \bar{I} , т.е. пространство $H^1(I)$ вкладывается в пространство $C(\bar{I})$ ($H^1(I) \subset C(\bar{I})$). При этом имеет место оценка*

$$\|v\|_{C(\bar{I})} \equiv \max_{x \in \bar{I}} |v(x)| \leq \sqrt{2} \|v\|_1. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(x) \in C^1(\bar{I})$, а x и ξ — произвольные точки \bar{I} . Тогда

$$|v(\xi) - v(x)| = \left| \int_x^\xi v'(\eta) d\eta \right|. \quad (19)$$

Оценивая интеграл в правой части при помощи неравенства Коши-Буняковского,^{*} а затем несколько закругляя полученную оценку, будем иметь

$$|v(\xi) - v(x)| \leq \sqrt{|\xi - x|} \left| \int_x^\xi v'^2(\eta) d\eta \right|^{1/2} \leq \sqrt{|\xi - x|} \|v'\|_0.$$

Отсюда при $\xi = x + \Delta x$ находим, что

$$|v(x + \Delta x) - v(x)| \leq \sqrt{|\Delta x|} \|v'\|_0 \leq \sqrt{|\Delta x|} \|v\|_1. \quad (20)$$

Заметим теперь, что функции из $C^1(\bar{I})$ принадлежат $H^1(I)$ и образуют там всюду плотное множество (т.е. замыкание $C^1(\bar{I})$ по норме $H^1(I)$ совпадает с $H^1(I)$). Поэтому неравенство (20) справедливо и для $v(x) \in H^1(I)$. Далее, так как второй сомножитель в правой части (20)

^{*}Напомним, что неравенством Коши-Буняковского применительно к данному контексту называется неравенство $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.

ограничен, то при стремлении к нулю приращения аргумента Δx стремится к нулю и стоящее слева приращение функции, что и доказывает непрерывность $v(x) \in H^1(I)$.

Установим оценку (18). Из (19) следует, что

$$|v(x)| \leq |v(\xi)| + \left| \int_x^\xi v'(\eta) d\eta \right| \leq |v(\xi)| + \int_0^1 |v'(\eta)| d\eta, \quad (21)$$

а после интегрирования обеих частей этого неравенства по ξ будем иметь

$$|v(x)| \leq \int_0^1 |v(\xi)| d\xi + \int_0^1 |v'(\xi)| d\xi.$$

Оценивая теперь каждый интеграл правой части при помощи неравенства Коши-Буняковского, а затем применяя *неравенство Коши*,*) получим (18). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из неравенства (20) следует не только непрерывность функций из $H^1(I)$, но и их *гельдеровость* с показателем $1/2$.

В следующих двух леммах для функций, обращающихся в нуль в одной или двух точках отрезка \bar{I} , устанавливаются оценки нормы самой функции и ее первой производной через норму производной следующего порядка.

Л е м м а 2. Для всякой функции $v(x) \in \tilde{H}^1(I)$

$$\|v\|_0 \leq \|v'\|_0. \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в неравенстве (21) $\xi = 0$, затем возведем обе части в квадрат и результат проинтегрируем по $x \in I$. Принимая теперь во внимание, что для функций из $\tilde{H}^1(I)$ $v(0) = 0$, приходим к (22).

З а м е ч а н и е 4. Поскольку $H_0^1(I) \subset \tilde{H}^1(I)$, то оценка (22) имеет место и для $v \in H_0^1(I)$.

Л е м м а 3. Для всякой функции $w(x) \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$

$$\|w'\|_0 \leq \|w''\|_0. \quad (23)$$

*) Напомним, что неравенством Коши называется неравенство типа $|\sum_{k=1}^m a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\int_0^1 w'(\xi) d\xi = 0.$$

Поэтому

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} - \int_0^1 w'(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[\frac{dw}{dt} - \frac{dw}{d\xi} \right] d\xi = \int_0^1 d\xi \int_\xi^t \frac{d^2 w}{d\eta^2} d\eta.$$

Отсюда находим, что

$$\left\| \frac{dw}{dt} \right\|_0^2 = \int_0^1 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dt = \int_0^1 dt \left[\int_0^1 d\xi \int_\xi^t \frac{d^2 w}{d\eta^2} d\eta \right]^2.$$

Заменяя подынтегральную функцию в самом внутреннем интеграле правой части на ее модуль и расширяя пределы интегрирования, получим

$$\| w' \|_0^2 \leq \left[\int_0^1 |w''| dt \right]^2.$$

Применение неравенства Коши-Буняковского к правой части приводит к неравенству (23). Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 5. Величина $|v|_m = \| v^{(m)} \|_0$ называется *полу-нормой* пространства $H^m(I)$.

Полунорма содержит лишь старшее слагаемое из тех, которые образуют норму. Ее отличие от нормы состоит в том, что она может обращаться в нуль не только на нулевом элементе. Так, например, $|v|_1 = 0$, если $v = \text{const}$, а $|v|_m = 0$, $m \in \mathbb{N}$, при $v \in P_{m-1}(I)$.

Л е м м а 4. В пространстве \mathcal{H}^l , $l = 1, 2$, где

$$\mathcal{H}^1 = \tilde{H}^1(I), \quad \mathcal{H}^2 = H^2(I) \cap H_0^1(I),$$

норма $\| \cdot \|_l$ и полунорма $| \cdot |_l$ эквивалентны, причем

$$|v|_l \leq \| v \|_l \leq \sqrt{1+l} |v|_l.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, неравенства для $l = 1$. Возводя левую и правую части (22) в квадрат и прибавляя к обеим

частям полученного неравенства по $|v|_1^2$, получим правое неравенство. Левое неравенство следует из определения нормы и полунормы. Лемма доказана.

5. Оценка квадратичной формы

Установленные в предыдущем пункте неравенства между различными нормами функций из $H^1(I)$ позволяют получить оценки квадратичной формы $a(v, v)$ и доказать ее положительность.

Л е м м а 5. *При выполнении условий (16), (17) квадратичная форма $a(v, v)$, отвечающая билинейной форме (14), на функциях из $\tilde{H}^1(I)$ эквивалентна $\|v\|_1^2$, т.е.*

$$c_3 \|v\|_1^2 \leq a(v, v) \leq c_4 \|v\|_1^2, \quad v \in \tilde{H}^1(I),$$

где $c_3 = c_0/2$, $c_4 = (c_1 + c_2 + 2\kappa)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (16)

$$a(v, v) = \int_0^1 (pv'^2 + qv^2) dx + \kappa v^2(1) \geq c_0 \int_0^1 v'^2 dx = c_0 |v|_1^2.$$

Отсюда с учетом леммы 4 имеем требуемую оценку квадратичной формы снизу. В силу (17) и (18)

$$a(v, v) \leq c_1 \int_0^1 v'^2 dx + c_2 \int_0^1 v^2 dx + 2\kappa \|v\|_1^2 \leq (c_1 + c_2 + 2\kappa) \|v\|_1^2 = c_4 \|v\|_1^2.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 5. Из леммы 5, в частности, следует, что квадратичная форма $a(v, v)$ положительно определена и, следовательно, билинейную форму (14) можно рассматривать как энергетическое скалярное произведение, а $\sqrt{a(v, v)}$ — как энергетическую норму.

Множество функций $v(x)$, заданных на I , имеющих ограниченную энергетическую норму и обращающихся в нуль при $x = 0$ называют

энергетическим^{*)} пространством. Ясно, что определенное таким образом энергетическое пространство совпадает с ранее введенным (см. (15)) пространством $\tilde{H}^1(I)$.

З а м е ч а н и е 6. Из леммы 5 следует положительность квадратичной формы (2.10) при выполнении условий (1.3) и на функциях из $H_0^1(I)$.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 2 и л е м м ы 5. Для разности между приближенным и точным решениями задачи (12), (13) справедлива оценка

$$\|u - u^h\|_1 \leq \sqrt{c_4/c_3} \|u - v^h\|_1 \quad \forall v^h \in \tilde{S}^h. \quad (24)$$

Из оценки (24) следует, что точность приближенного решения u^h задачи (12), (13) в смысле $\|\cdot\|_1$ определяется аппроксимационными свойствами пространства \tilde{S}^h при приближении точного решения каким бы то ни было способом в этой же норме.

6. Упражнения

1. Будет ли верно неравенство типа (23) для $w \in H^2(I) \cap \tilde{H}^1(I)$?
2. Выяснить, для каких $\kappa < 0$ верно утверждение леммы 5 (с другими постоянными).
3. Выяснить, для каких $q(x)$, принимающих и отрицательные значения, верно утверждение леммы 5.
4. Выяснить, при каких ограничениях на коэффициент $r(x)$ билинейная форма (2.17), (1.3), заданная на $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, будет коэрцитивной (10) и непрерывной (11).
5. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в \mathbb{R}^2

$$\Omega \subset D = \{(x, y) \mid 0 < x, y < l\}.$$

Тогда, если $v \in H_0^1(\Omega)$, то

$$\|v\|_0 \leq l/\sqrt{2} \|\nabla v\|_0.$$

^{*)} Энергетическим пространством, связанным со смешанной задачей (12), (13). Для другой задачи, например, для задачи (12), (1.2) энергетическое пространство, равно как и энергетическая норма, будет иным.

(неравенство Фридрикса).

Доказать неравенство Фридрикса.

У к а з а н и е. Продолжить $v \in C^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ с Ω на D нулем и воспользоваться рассуждениями леммы 2.

Лекция 12

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. СХОДИМОСТЬ В H^1

Как следует из оценки (11.24) H^1 -норма разности между точным и конечноэлементным решениями оценивается через эту же норму разности между точным решением и любой функцией v^h из конечноэлементного пространства. Исследуем вопрос о возможности использования в качестве v^h интерполянта точного решения.

1. Первая оценка интерполяции

Пусть в качестве конечноэлементного пространства \tilde{S}^h выступает пространство кусочно-линейных, непрерывных, линейных на каждом элементе функций, которые обращаются в нуль при $x = 0$, т.е. пусть $\tilde{S}^h \equiv \tilde{S}_1^h$ (см. (3.13), (3.8)). Обозначим через $v(x_i)$ значения непрерывной функции $v(x)$ в узлах $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$ конечных элементов $e^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ и введем в рассмотрение функцию

$$i_h v(x) \in S_1^h, \quad i_h v(x_i) = v(x_i), \quad (1)$$

которую будем называть *интерполянтом* $v(x)$. Оценим разность между $v(x)$ и ее интерполянтом. Имеет место

Т е о р е м а 1. *Если $v(x) \in C^2(\bar{I})$, а $i_h v \in S_1^h$ — ее интерполянт, то*

$$|v(x) - i_h v(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in \bar{I}} |v''(x)|, \quad (2)$$

$$\left| \frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x)) \right| \leq h \max_{x \in \bar{I}} |v''(x)|. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2) представляет собой хорошо известную из курса численных методов оценку точности *лагранжевой интерполяции* на $e^{(i)}$ линейными функциями. Оценка (3) известна меньше. Здесь мы докажем обе оценки.

Оценки будем проводить на каждом элементе $e^{(i)}$ отдельно. Пусть

$$v(x) - i_h v(x) = R^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \quad (4)$$

Так как

$$v(x_{i-1}) = i_h v(x_{i-1}), \quad v(x_i) = i_h v(x_i), \quad (5)$$

то погрешность интерполяции $R^{(i)}(x)$ может быть представлена в виде

$$R^{(i)}(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)r^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}, \quad (6)$$

где $r^{(i)}(x)$ — непрерывная на $e^{(i)}$ функция. Принимая это во внимание, перепишем (4) в виде

$$v(x) - i_h v(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)r^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \quad (7)$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in \overset{\circ}{e}^{(i)}$ (кружочек сверху означает, что берется только внутренняя часть $e^{(i)} = \overline{e^{(i)}}$) и введем в рассмотрение следующую функцию переменной t :

$$\varphi(t) = v(t) - i_h v(t) - (t - x_{i-1})(t - x_i)r^{(i)}(x), \quad t \in e^{(i)}. \quad (8)$$

В силу (7) эта функция обращается в нуль на $e^{(i)}$ по крайней мере в трех точках: $t = x_{i-1}$, $t = x_i$, $t = x$. Поэтому на основании теоремы Ролля ее первая производная φ' обращается в нуль на $\overset{\circ}{e}^{(i)}$ по крайней мере в двух точках и существует точка $\xi^{(i)} \in \overset{\circ}{e}^{(i)}$, в которой обращается в нуль вторая производная φ'' . Отсюда и из (8) с учетом тождества $d^2(i_h v(t)) / dt^2 = 0$ находим, что

$$\varphi''(\xi^{(i)}) = v''(\xi^{(i)}) - 2r^{(i)}(x) = 0,$$

т.е.

$$r^{(i)}(x) = \frac{1}{2}v''(\xi^{(i)}).$$

Подставляя это значение $r^{(i)}(x)$ в (6), будем иметь

$$R^{(i)}(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i-1})v''(\xi^{(i)}).$$

Отсюда заключаем, что

$$\max_{x \in e^{(i)}} |R^{(i)}(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in e^{(i)}} |v''(x)|.$$

Эта оценка с учетом (4) и приводит к (2).

Докажем теперь (3). Пусть

$$\frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x)) = \tilde{R}^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}. \quad (9)$$

В силу (5) существует точка $\tilde{\eta}^{(i)} \in \overset{\circ}{e}^{(i)}$ такая, что $\tilde{R}^{(i)}(\tilde{\eta}^{(i)}) = 0$. Поэтому

$$|\tilde{R}^{(i)}(x)| = \left| \int_{\tilde{\eta}^{(i)}}^x \frac{d}{d\xi} \tilde{R}^{(i)}(\xi) d\xi \right| = \left| \int_{\tilde{\eta}^{(i)}}^x v''(\xi) d\xi \right| \leq h \max_{x \in e^{(i)}} |v''(x)|,$$

откуда с учетом (9) и следует (3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Установленных в теореме 1 оценок интерполяции вполне достаточно для того, чтобы с использованием оценки (11.24) доказать сходимость рассматриваемого МКЭ в норме H^1 со скоростью $O(h)$. При этом относительно решения $u(x)$ нужно предположить, что оно принадлежит C^2 . Это предположение не является чрезмерно обременительным, но не является и необходимым для справедливости указанной скорости сходимости. Поэтому мы установим еще одну оценку погрешности интерполяции функциями из S_1^h (прямо в H^1 и L_2), которая будет иметь место для интерполируемых функций из $H^2(I)$. Эта оценка окажет нам неоценимую услугу и при уточнении скорости сходимости метода в L_2 .

2. Оценка линейной интерполяции в L_2 и H^1

Пусть $v(x) \in H^2(I)$. Поскольку $H^2(I) \subset H^1(I)$, а в силу леммы 11.1 функции из $H^1(I)$ непрерывны, то непрерывными являются и функции из $H^2(I)$ и можно говорить об их значениях в точке.

Т е о р е м а 2. Если $v(x) \in H^2(I)$, а $i_h v \in S_1^h$ — ее интерполант, то

$$\|v - i_h v\|_0 \leq h^2 |v|_2, \quad (10)$$

$$\|v - i_h v\|_1 \leq \sqrt{2}h |v|_2. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению нормы в $H^1(I)$

$$\|v - i_h v\|_1^2 = \|(v - i_h v)'\|_0^2 + \|v - i_h v\|_0^2.$$

Запишем каждое из этих слагаемых в виде суммы квадратов поэлементных норм

$$\begin{aligned} \|(v - i_h v)'\|_0^2 &= \sum_{i=1}^N \|(v - i_h v)'\|_{L_2(e^{(i)})}^2, \\ \|v - i_h v\|_0^2 &= \sum_{i=1}^N \|v - i_h v\|_{L_2(e^{(i)})}^2. \end{aligned}$$

Сделаем на элементе $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ локальную замену переменной

$$(x - x_{i-1})/h = t \quad (12)$$

и будем писать

$$v(x) = v(x_{i-1} + ht) = \hat{v}^{(i)}(t), \quad i_h v(x) = i_h v(x_{i-1} + ht) = \hat{i}\hat{v}^{(i)}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h^{-1} \|v - i_h v\|_{L_2(e^{(i)})}^2 &= \int_0^1 (\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)})^2 dt, \\ h \|(v - i_h v)'\|_{L_2(e^{(i)})}^2 &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}(\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}) \right]^2 dt, \end{aligned} \quad (13)$$

$$h^3 \|(v - i_h v)''\|_{L_2(e^{(i)})}^2 = h^3 \|v''\|_{L_2(e^{(i)})}^2 = \int_0^1 \left(\frac{d^2 \hat{v}^{(i)}}{dt^2} \right)^2 dt. \quad (14)$$

Поскольку

$$\hat{v}^{(i)}(0) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(0) = \hat{v}^{(i)}(1) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(1) = 0,$$

то для разности $\hat{v}^{(i)}(t) - \hat{i}\hat{v}^{(i)}(t)$ справедливы леммы 11.2 и 11.3, в силу которых

$$\int_0^1 [\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}]^2 dt \leq \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}(\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}) \right]^2 dt \leq \int_0^1 \left[\frac{d^2}{dt^2}(\hat{v}^{(i)} - \hat{i}\hat{v}^{(i)}) \right]^2 dt. \quad (15)$$

Используя эти неравенства для оценки правых частей (13) через правую часть (14) и возвращаясь при помощи левых частей (13), (14) назад к старым переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} \|v - i_h v\|_{L_2(e^{(i)})}^2 &\leq h^4 \|v''\|_{L_2(e^{(i)})}^2, \\ \|(v - i_h v)'\|_{L_2(e^{(i)})}^2 &\leq h^2 \|v''\|_{L_2(e^{(i)})}^2. \end{aligned}$$

Суммируя теперь полученные оценки по i от 1 до N , получим

$$\|v - i_h v\|_0^2 \leq h^4 |v|_2^2, \quad \|(v - i_h v)'\|_0^2 \leq h^2 |v|_2^2.$$

Первое из этих неравенств совпадает с (10). Складывая оба неравенства и замечая, что $(h^2 + 1) \leq 2$, приходим к (11). Теорема доказана.

3. Сходимость в H^1

Имеет место

Т е о р е м а 3 (сходимости). *Если выполнены условия (11.16), (11.17) и решение $u(x)$ задачи (11.12), (11.13) принадлежит $H^2(I)$, то решение задачи (11.7), (11.14) с $H^h = \tilde{S}_1^h$ из (3.13) (приближенное решение) сходится к решению задачи (11.12), (11.13) в смысле нормы пространства $H^1(I)$ со скоростью $O(h)$, т.е.*

$$\|u - u^h\|_1 \leq ch|u|_2,$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от h , ни от u .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемое неравенство следует из оценки (11.24), в которой положено $v^h = i_h u$, и теоремы 2.

Итак, мы доказали сходимость изучаемого МКЭ на S_1^h и установили оценку его скорости сходимости в смысле нормы пространства $H^1(I)$, которая оказалась $O(h)$ при $u \in H^2(I)$. Это предположение о гладкости искомого решения не является слишком обременительным; если бы мы при доказательстве теоремы 3 воспользовались не теоремой 2, а теоремой 1, то нам пришлось бы предполагать, что $u \in C^2(\bar{I})$. Но, как известно, аппетит приходит во время еды. Вводя в лекции 2 понятие обобщенного решения, мы были преисполнены гордости от того, что определили решение и в том случае, когда коэффициент $p(x)$ уравнения (11.12) имеет разрывы первого рода. Но если $p(x) \in C(\bar{I})$, то обобщенное решение $u \in H^2(I)$ и, казалось бы, полученные нами результаты о сходимости метода здесь не применимы. На самом деле, как следует из доказательства теоремы 2, предположение о принадлежности u к H^2 должно иметь место только на элементах $e^{(i)}$, т.е. достаточно предполагать, что

$$u|_{e^{(i)}} \in H^2(e^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Но тогда, осуществляя разбиение I на конечные элементы $e^{(i)}$, нужно позаботиться о том, чтобы точки разрыва коэффициента $p(x)$ (а лучше и точки разрыва других коэффициентов) попали на границы элементов. При этом может случиться, что не все элементы $e^{(i)}$ будут иметь одинаковую длину, т.е. сетка узлов может оказаться неравномерной. Но при доказательстве теоремы 2 по существу нигде и не предполагалось, что все элементы одинаковые. В новой редакции теоремы 2 нужно лишь под h в (10) и (11) понимать $\max_i h^{(i)}$, где

$$h^{(i)} = \text{mes } e^{(i)} = x_i - x_{i-1}.$$

Итак, наличие разрывов у коэффициентов уравнения (11.12) не является препятствием для сходимости МКЭ со скоростью $O(h)$, если разбиение на элементы произведено надлежащим образом.

Ну, а что можно сказать о сходимости исследуемого МКЭ в смысле нормы $L_2(I)$? Разумеется, сходимость со скоростью $O(h)$ имеет место — это следует из теоремы 3. Но в теореме 2 говорится о том, что функция из $H^2(I)$ приближается своим интерполянтном из S_1^h в $L_2(I)$ с точностью $O(h^2)$. Не будет ли такой же и скорость сходимости МКЭ?

Ответ положительный, но для получения этой оценки мы не располагаем соотношением типа (11.24), и требуются специальные рассуждения (см. теорему 14.3).

Еще один вопрос: не будет ли сходимость в $H^1(I)$ иметь более высокую скорость, если $u \in H^3(I)$? Оказывается, нет. Для повышения скорости сходимости МКЭ нужно использовать конечноэлементные пространства, образованные полиномами более высокой степени.

4. Оценка погрешности интерполяции из S_k^h

Рассмотрим вопрос о *полиномиальной интерполяции* более подробно. По аналогии с (3.8) и (6.1) введем в рассмотрение конечноэлементное пространство

$$S_k^h = \left\{ v^h \in C(\bar{I}) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_k \left(e^{(i)} \right), \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (16)$$

Выделим в нем подпространство

$$\tilde{S}_k^h = \{ v^h \in S_k^h \mid v^h(0) = 0 \} \quad (17)$$

и будем считать, что приближенным решением задачи (11.12), (11.13) является функция $u^h \in \tilde{S}_k^h$. Для оценки точности этого приближенного решения нам потребуется утверждение, аналогичное теореме 2.

Пусть $h^{(i)} = \text{mes } e^{(i)} = x_i - x_{i-1}$,

$$h = \max_i h^{(i)};$$

мы в открытую отказываемся от предположения о равномерности разбиения отрезка $\bar{I} = [0, 1]$.

Обозначим через

$$x_j^{(i)} = x_{j-1} + \frac{h^{(i)}}{k} j, \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

узлы элемента $e^{(i)}$. Очевидно, что $x_0^{(i)} = x_{i-1}$, а $x_k^{(i)} = x_i$. Пусть $i_{h,k}v(x) \in S_k^h$, $i_{h,k}v(x_j^{(i)}) = v(x_j^{(i)})$ — интерполируют $v(x)$.

Т е о р е м а 4. Если $v \in H^{k+1}(I)$, а $i_{h,k}v \in S_k^h$ — ее интерполируют, то

$$\| v - i_{h,k}v \|_l \leq ch^{k+1-l} |v|_{k+1}, \quad l = 0, 1, \quad (18)$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от v , ни от h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем следовать логике доказательства теоремы 2 и разобьем доказательство на пять этапов.

1°. Представим квадрат оцениваемой нормы в виде суммы квадратов поэлементных норм

$$\|v - i_{h,k}v\|_l^2 = \sum_{i=1}^N \|v - i_{h,k}v\|_{H^l(e^{(i)})}^2, \quad l = 1, 2,$$

и будем проводить оценки на каждом элементе в отдельности.

2°. Перейдем в интегралах по элементам к локальным переменным (12) (с $h^{(i)}$ вместо h). Принимая во внимание (13), будем иметь

$$\left(h^{(i)}\right)^{2l-1} |v - i_{h,k}v|_{H^l(e^{(i)})}^2 = |\hat{v}^{(i)} - \hat{i}_k \hat{v}^{(i)}|_{H^l(0,1)}^2, \quad l = 0, \dots, k. \quad (19)$$

3°. Оценим правую часть (19) через L_2 норму подходящей производной (через подходящую полунорму) (ср. с (15)). Это центральный и наиболее ответственный этап доказательства. Проводить его тем же способом, который был использован при доказательстве теоремы 2, при произвольном k слишком трудно. Вместо этого мы сначала оценим $H^0(0,1)$ и $H^1(0,1)$ - нормы через норму в пространстве $H^{k+1}(0,1)$. Очевидно (см. (1.15)), что при $k+1 \geq l$

$$|\hat{v} - \hat{i}_k \hat{v}^{(i)}|_{H^l(0,1)} \leq \| \hat{v} - \hat{i}_k \hat{v}^{(i)} \|_{H^{k+1}(0,1)} \quad (20)$$

и сама эта оценка на первый взгляд особой ценности не представляет. Однако, эта оценка оказывается тем, чем надо, если для функций вида $(\hat{v}(t) - \hat{i}_k \hat{v}(t))$ норма и полунорма в $H^{k+1}(0,1)$ эквивалентны. Данное предположение не будет выглядеть беспочвенным, если принять во внимание лемму 11.4 и тот факт, что функция $(\hat{v}(t) - \hat{i}_k \hat{v}(t))$ в $(k+1)$ точке отрезка $[0,1]$ обращается в нуль.

Итак, пусть имеет место

П р е д л о ж е н и е. Для всякой функции $\hat{v}(t) \in H^{k+1}(0,1)$

$$\| \hat{v}(t) - \hat{i}_k \hat{v}(t) \|_{H^{k+1}(0,1)} \leq c |\hat{v}(t) - \hat{i}_k \hat{v}(t)|_{H^{k+1}(0,1)}, \quad (21)$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит от $\hat{v}(t)$.

Доказательство этого предложения будет дано в следующей лекции, а пока подставим (21) в (20) и примем во внимание, что $d^{k+1}[\hat{i}_k \hat{v}(t)]/dt^{k+1} \equiv 0$. В результате будем иметь

$$|\hat{v}^{(i)} - \hat{i}_k \hat{v}^{(i)}|_{H^l(0,1)} \leq c |\hat{v}^{(i)}|_{H^{k+1}(0,1)}, \quad k+1 \geq l. \quad (22)$$

4°. Перейдем в (22) к старой переменной x . Принимая во внимание, что

$$|\hat{v}^{(i)}|_{H^{k+1}(0,1)}^2 = \int_0^1 \left(\frac{d^{k+1} \hat{v}^{(i)}}{dt^{k+1}} \right)^2 dt = \left(h^{(i)} \right)^{2k+1} \int_{e^{(i)}} \left(v^{(k+1)} \right)^2 dx$$

и учитывая (19), получим

$$|v - i_{h,k} v|_{H^l(e^{(i)})} \leq c \left(h^{(i)} \right)^{k+1-l} |v|_{H^{k+1}(e^{(i)})}, \quad l = 0, \dots, k. \quad (23)$$

5°. Возведем в квадрат обе части полученного неравенства, а затем просуммируем по i от 1 до N . Требуемая оценка (18) вытекает из полученного неравенства, если принять во внимание, что $h^{(i)} \leq h$. Справедливость теоремы в предположениях (21) доказана.

Т е о р е м а 5. Если выполнены условия (11.16), (11.17) и решение $u(x)$ задачи (11.12), (11.13) принадлежит $H^{k+1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$, то решение задачи (11.7), (11.14) с $H^h = \tilde{S}_k^h$ из (17) (приближенное решение) сходится к решению задачи (11.12), (11.13) в смысле нормы пространства $H^1(I)$ со скоростью $O(h^k)$, т.е.

$$\|u - u^h\|_1 \leq c h^k |u|_{k+1},$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от h , ни от u .

Доказательство теоремы следует из оценки (11.24) и теоремы 4.

5. Упражнения

1. Доказать, что постоянная в правой части оценки (2) неулучшаема.

2. Пусть $v \in C^2(\bar{I})$ и $v(0) = v(1) = 0$, а $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора d^2/dx^2 с граничными условиями первого рода. Тогда

$$v(x) = - \int_0^1 G(x, \xi) v''(\xi) d\xi.$$

Используя это представление, доказать, что

$$\left| \frac{d}{dx}(v(x) - i_h v(x)) \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in I} |v''(x)|.$$

Привести пример, показывающий, что постоянная в правой части этой оценки неумлучшаема.

3. Пусть $v \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$ и $\sum_1^\infty v_k \sqrt{2} \sin k\pi x$ — ее ряд Фурье. Для $l = 0, 1, 2$ проверить равенство $\|v^{(l)}\|_0^2 = \sum_{k=1}^\infty (k\pi)^{(2l)} v_k^2$ и доказать, что

$$\|v - i_h v\|_0 \leq \frac{h^2}{\pi^2} |v|_2, \quad |v - i_h v|_1 \leq \frac{h}{\pi} |v|_2.$$

Примерами подтвердить неумлучшаемость постоянных в этих оценках.

Лекция 13

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ НОРМИРОВКА H^s

Основная цель этой лекции — обоснование предложения, высказанного при доказательстве теоремы 12.4 и оформленного в виде неравенства (12.21). Установим прежде несколько простых утверждений о представлении функции или ее производных через производную более высокого порядка (см. (11.19), (11.24)). Именно такие представления позволили нам доказать лемму 11.4 об эквивалентной нормировке $H^1(I)$ и $H^2(I)$ на соответствующих классах функций.

1. Вспомогательные представления

Л е м м а 1. Если $v(0) = 0$, то

$$v(t) = \int_0^t v'(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. Именно это представление было использовано при доказательстве леммы 11.2.

Л е м м а 2. Если $v(0) = v(1) = 0$, то

$$v'(t) = \int_0^1 g_2(t, \xi) v''(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где

$$g_2(t, \xi) = \begin{cases} \xi, & 0 < \xi < t, \\ \xi - 1, & t < \xi < 1. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1) после интегрирования по частям находим, что

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t v'(\xi) d\xi = \xi v'(\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=t} - \int_0^t \xi v''(\xi) d\xi = \\ &= t v'(t) - \int_0^t \xi v''(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $v(0) = 0$. С другой стороны

$$\begin{aligned} v(t) &= - \int_t^1 v'(\xi) d\xi = -(\xi - 1)v'(\xi) \Big|_{\xi=t}^{\xi=1} + \int_t^1 (\xi - 1)v''(\xi) d\xi = \\ &= (t - 1)v'(t) + \int_t^1 (\xi - 1)v''(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Вычитая теперь из второго тождества первое, получим

$$v'(t) = \int_0^t \xi v''(\xi) d\xi + \int_t^1 (\xi - 1)v''(\xi) d\xi,$$

что совпадает с (2). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Представление (2) может быть получено и из других соображений. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-u''(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3)$$

Построим ее функцию Грина, т.е. функцию, которая удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dt^2}G(t, \xi) &= \delta(t - \xi), \quad 0 < t < 1, \\ G(0, \xi) &= G(1, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta(t - \xi)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $t = \xi \in (0, 1)$, т.е. линейный непрерывный функционал, определенный на функциях $v(x) \in C(\bar{I})$ формулой (сравни с (1.12))

$$(\delta(t - \xi), v(t)) = (\delta(\eta), v(\eta + \xi)) = v(\xi).$$

Легко проверить, что

$$G(t, \xi) = \begin{cases} t(1 - \xi), & 0 \leq t \leq \xi, \\ \xi(1 - t), & \xi \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Но тогда

$$u(t) = \int_0^1 G(t, \xi) f(\xi) d\xi, \quad u'(t) = \int_0^1 \frac{\partial G(t, \xi)}{\partial t} f(\xi) d\xi,$$

где

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \begin{cases} 1 - \xi, & 0 \leq t < \xi, \\ -\xi, & \xi < t \leq 1. \end{cases}$$

Принимая теперь во внимание, что $f(\xi) \equiv -u''(\xi)$, приходим к представлению (2).

Л е м м а 3. Если $v(0) = v(1/2) = v(1) = 0$, то

$$v'' = \int_0^1 g_3(t, \xi) v'''(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где

$$g_3(t, \xi) = 2 \begin{cases} \xi^2, & \xi < \min(t, 1/2), \\ \xi^2 - 2(\xi - 1/2)^2, & 1/2 < \xi < t, \\ -(\xi - 1)^2 + 2(\xi - 1/2)^2, & t < \xi < 1/2, \\ -(\xi - 1)^2, & \xi > \max(t, 1/2). \end{cases} \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть t_j есть одно из чисел 0, 1/2 или 1. Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{t_j}^t v'(\xi) d\xi = (\xi - t_j)v'(\xi)|_{t_j}^t - \int_{t_j}^t (\xi - t_j)v'' d\xi = \\ &= (t - t_j)v'(t) - \frac{1}{2}(\xi - t_j)^2 v''(\xi)|_{t_j}^t - \int_{t_j}^t \frac{(\xi - t_j)^2}{2} v'''(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Полагая здесь последовательно t_j равным 0, 1/2 и 1, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $v(t)$, $v'(t)$ и $v''(t)$ в их представлении через v'''

$$v(t) - tv'(t) + \frac{1}{2}t^2 v''(t) = \int_0^t \frac{\xi^2}{2} v'''(\xi) d\xi,$$

$$v(t) - (t - 1/2)v'(t) + \frac{1}{2}(t - 1/2)^2 v''(t) = \int_{1/2}^t \frac{(\xi - 1/2)^2}{2} v'''(\xi) d\xi,$$

$$v(t) - (t - 1)v'(t) + \frac{1}{2}(t - 1)^2 v''(t) = \int_1^t \frac{(\xi - 1)^2}{2} v'''(\xi) d\xi.$$

Найдем отсюда $v''(t)$, используя формулы Крамера. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда и равен

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -t & t^2/2 \\ 1 & -(t-1/2) & (t-1/2)^2/2 \\ 1 & -(t-1) & (t-1)^2/2 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2}(t-1-t+1/2)(t-1-t)(t-1/2-t) = 1/8. \end{aligned}$$

Заменяя третий столбец определителя столбцом свободных членов (обозначим их временно через f_1, f_2 и f_3), будем иметь

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -t & f_1 \\ 1 & -(t-1/2) & f_2 \\ 1 & -(t-1) & f_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}f_1 - f_2 + \frac{1}{2}f_3.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} v''(t) &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = 4f_1 - 8f_2 + 4f_3 = 2 \left\{ \int_0^t \xi^2 v'''(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{1/2}^t (\xi - 1/2)^2 v'''(\xi) d\xi + \int_1^t (\xi - 1)^2 v'''(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $t \leq 1/2$, то

$$\begin{aligned} v''(t) &= 2 \left\{ \int_0^t \xi^2 v'''(\xi) d\xi + \int_t^{1/2} [2(\xi - 1/2)^2 - (\xi - 1)^2] v'''(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{1/2}^1 (\xi - 1)^2 v'''(\xi) d\xi \right\}, \end{aligned}$$

а если $t \geq 1/2$, то

$$\begin{aligned} v''(t) &= 2 \left\{ \int_0^{1/2} \xi^2 v'''(\xi) d\xi + \int_{1/2}^t [\xi^2 - 2(\xi - 1/2)^2] v'''(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^1 (\xi - 1)^2 v'''(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Оба соотношения можно записать в виде одной формулы (6), если ядро $g_3(t, \xi)$ при $0 \leq t, \xi \leq 1$ задать согласно рис. 1,

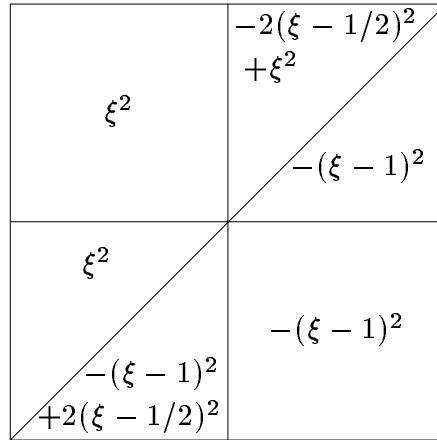


Рис. 1

что совпадает с (7). Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l \leq 1$. Тогда, если $v(t_j) = 0$, $j = 0, 1, \dots, l$, то

$$v^{(l)}(t) = \int_0^1 g_{l+1} v^{(l+1)}(\xi) d\xi,$$

где $g_{l+1}(t, \xi)$ ограничена при $0 \leq \xi, t \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы можно усмотреть в доказательстве леммы 3.

Л е м м а 5. Если

$$v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0, \quad (8)$$

то

$$v^{(j)} = \int_0^1 g_{4,j}(t, \xi) v^{(4)}(\xi) d\xi, \quad j = 0, \dots, 3, \quad (9)$$

где

$$g_{4,j}(t, \xi) = \frac{\partial^j}{\partial t^j} G_4(t, \xi),$$

а

$$G_4(t, \xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} t^2(\xi - 1)^2(-2\xi t - t + 3\xi), & t \leq \xi, \\ \xi^2(t - 1)^2(-2\xi t - \xi + 3t), & t \geq \xi. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу о построении функции Грина:

$$\frac{d^4}{dt^4}G_4(t, \xi) = \delta(t - \xi), \quad 0 < t < 1, \quad (11)$$

$$G_4(0, \xi) = \frac{d}{dt}G_4(0, \xi) = G_4(1, \xi) = \frac{d}{dt}G_4(1, \xi) = 0. \quad (12)$$

Тогда для любой достаточно гладкой функции $v(t)$, удовлетворяющей граничным условиям (8), справедливо представление

$$v(t) = \int_0^1 G_4(t, \xi)v''''(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Очевидно, что функция (10) удовлетворяет граничным условиям (12) и является решением уравнения (11) при $t \neq \xi$ (как многочлен третьей степени по t). Легко проверить, что функция (10) непрерывна при $t = \xi$ и имеет в этой точке непрерывные производные по t до второго порядка. Ее третья производная при $t = \xi$ разрывна и имеет скачек, равный единице. Из сказанного следует, что функция (10) является искомой функцией Грина и представления (9) следуют из (13). Лемма доказана.

Хочется надеяться, что приведенные примеры сформировали у читателя некоторое представление о том, какие утверждения типа лемм 1 – 4 возможны, а какие нет.

2. Эквивалентная нормировка H^s

Докажем теперь предложение, сформулированное в предыдущей лекции.

Лемма 6. Пусть $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{s-1} \leq 1$, а $i_{s-1}v(t)$ — интерполянт $v(t)$ с узлами t_j , $j = 0, 1, \dots, s-1$. Тогда

$$\|v(t) - i_{s-1}v(t)\|_s \sim |v|_s.$$

Доказательство. Поскольку $i_{s-1}v(t)$ есть многочлен степени не выше $s-1$, то

$$|v|_s = |v - i_{s-1}v|_s \leq \|v - i_{s-1}v\|_s. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\|v - i_{s-1}v\|_s^2 = \sum_{l=0}^s |v - i_{s-1}v|_l^2, \quad (15)$$

а в силу леммы 4

$$\frac{d^l}{dt^l}(v - i_{s-1}v) = \int_0^1 g_{l+1}(t, \xi) \frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}} [v(\xi) - i_{s-1}v(\xi)] d\xi$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |v - i_{s-1}v|_l &\leq c_{l+1}|v - i_{s-1}v|_{l+1} \leq c_{l+1}\dots c_s |v - i_{s-1}v|_s = \\ &= c_{l+1}\dots c_s |v|_s. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (15), будем иметь

$$\|v - i_{s-1}v\|_s^2 \leq c|v|_s^2, \quad (16)$$

где c не зависит от v . Оценки (14) и (16) доказывают лемму.

С точки зрения изложенного в лекции 12 на этом можно было бы закончить разговор об эквивалентной нормировке $H^s(0, 1)$ на изученном подмножестве функций. Однако, для полноты картины, мы установим эквивалентную нормировку всего $H^s(0, 1)$.

Л е м м а 7. Пусть $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{s-1} \leq 1$. Тогда для любой $v(t) \in H^s(0, 1)$

$$\|v\|_s \sim \|v\|_s^* := \sqrt{|v|_s^2 + \sum_{l=0}^{s-1} v^2(t_l)}. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, интерполяционный многочлен $i_{s-1}v(t)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$i_{s-1}v(t) = \sum_{l=0}^{s-1} v(t_l) p_{l,s-1}(t),$$

где

$$p_{l,s-1}(t) = \prod_{j \neq l}^{s-1} \frac{t - t_j}{t_l - t_j}.$$

Поэтому

$$|i_{s-1}v|_m \leq c_m \sum_{l=0}^{s-1} |v(t_l)|,$$

где c_m не зависит от v . Отсюда, с учетом леммы 6 находим, что

$$\begin{aligned} \|v\|_s &= \|(v - i_{s-1}v) + i_{s-1}v\|_s \leq c|v|_s + \|i_{s-1}v\|_s \leq \\ &\leq c(|v|_s + \sum_{l=0}^{s-1} |v(t_l)|) \leq c \sqrt{|v|_s^2 + \sum_{l=0}^{s-1} |v(t_l)|^2} = c \|v\|_s^*. \end{aligned}$$

В другую сторону, с учетом леммы 11.1

$$\|v\|_s^{*2} = |v|_s^2 + \sum_{l=0}^{s-1} v^2(t_s) \leq |v|_s^2 + c\|v\|_1^2 \leq c\|v\|_s^2.$$

Лемма доказана.

Приведем еще одну эквивалентную нормировку пространства $H^3(0, 1)$, которая при исследовании сходимости метода конечных элементов с кубическими эрмитовыми элементами играет ту же роль, что и лемма 6 в случае лагранжевых элементов.

Л е м м а 8. *Если $v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$, то*

$$\|v\|_4 \sim |v|_4.$$

В общем же случае

$$\|v\|_4 \sim \|v\|_4^{**} := \sqrt{|v|_4^2 + v^2(0) + v^2(1) + (v'(0))^2 + (v'(1))^2}. \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы проводится при помощи леммы 5 теми же рассуждениями, что использованы в доказательствах лемм 6 и 7.

3. Вторая эквивалентная нормировка

Наблюдательный читатель, видимо, уже заметил, что, вводя новую нормировку $H^s(0, 1)$, мы выбирали ее такой, чтобы максимально учесть

индивидуальные свойства используемых нами конечноэлементных пространств. Так, нормировка (17) пространства $H^4(0, 1)$ отличается от нормировки (18) того же пространства, ибо (17) предназначена для анализа аппроксимаций с лагранжевыми элементами, а (18) — с эрмитовыми. Выбранный нами путь был естественным продолжением того, что было сделано в лекции 12 для $H^1(0, 1)$ и $H^2(0, 1)$. Здесь мы установим эквивалентную нормировку $H^s(0, 1)$ другого типа, которая более универсальна по применению и легко допускает обобщение на многомерный случай.

Л е м м а 9. (*Неравенство Пуанкаре*). Если $v(t) \in H^1(0, 1)$, то

$$\|v\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dt + \left[\int_0^1 v(t) dt \right]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$[v(t) - v(\xi)]^2 = \left[\int_{\xi}^t v'(\eta) d\eta \right]^2.$$

Преобразуем это соотношение, раскрывая квадрат в левой части и оценивая интеграл при помощи неравенства Коши-Буняковского

$$v^2(t) + v^2(\xi) = 2v(t)v(\xi) + \left[\int_{\xi}^t v'(\eta) d\eta \right]^2 \leq 2v(t)v(\xi) + \int_0^1 v'^2(\eta) d\eta.$$

Интегрируя теперь это неравенство по t и по ξ от 0 до 1, получим искомую оценку. Лемма доказана.

Л е м м а 10. Если $v(t) \in H^1(0, 1)$, то

$$\|v\|_1^2 \sim \widetilde{\|v\|_1^2} := |v|_1^2 + \left[\int_0^1 v(t) dt \right]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства Коши-Буняковского $\left(\int_0^1 v(t) dt \right)^2 \leq \|v\|_0^2$. Отсюда

$$\widetilde{\|v\|_1^2} \leq \|v\|_1^2.$$

В другую сторону. Очевидно, что

$$\|\widetilde{v}\|_1^2 \geq |v|_1^2,$$

а в силу леммы 9

$$\|\widetilde{v}\|_1^2 \geq \|v\|_0^2.$$

Складывая эти неравенства, имеем

$$\|\widetilde{v}\|_1^2 \geq \frac{1}{2} \|v\|_1^2.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 11. Если $v(t) \in H^s(0, 1)$, то

$$\|v\|_s^2 \sim \|\widetilde{v}\|_s^2 := |v|_s^2 + \sum_{l=0}^{s-1} \left(\int_0^1 \frac{d^l v}{dt^l} dt \right)^2. \quad (19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $s = 1$ утверждение доказано в лемме 10. Пусть утверждение леммы верно при $s - 1$. Докажем его справедливость при s . Оценка

$$\|\widetilde{v}\|_s^2 \leq \|v\|_s^2$$

вытекает из определения $\|\widetilde{v}\|_s$ и неравенства Коши-Буняковского. Докажем, что

$$\|v\|_s^2 \leq c \|\widetilde{v}\|_s^2.$$

Поскольку

$$\|v\|_s^2 = |v|_s^2 + \|v\|_{s-1}^2,$$

то в силу предположения индукции

$$\|v\|_s^2 \sim |v|_s^2 + \|\widetilde{v}\|_{s-1}^2 := |v|_s^2 + |v|_{s-1}^2 + \sum_{l=0}^{s-2} \left[\int_0^1 \frac{d^l v}{dt^l} dt \right]^2. \quad (20)$$

В силу леммы 9

$$\begin{aligned} |v|_{s-1}^2 &\equiv \int_0^1 [v^{(s-1)}(t)]^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^1 [v^{(s)}(t)]^2 dt + \left[\int_0^1 v^{(s-1)}(t) dt \right]^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (20), получим

$$\|v\|_s^2 \leq c \left[|v|_s^2 + \left(\sum_{l=0}^{s-1} \int_0^1 v^{(l)}(t) dt \right)^2 \right],$$

что и завершает доказательство леммы.

Желаемая эквивалентная нормировка пространства $H^s(0, 1)$ построена. Чтобы можно было воспользоваться ею при исследовании аппроксимационных свойств конечноэлементных пространств нужна

Л е м м а 12. Для любой $v(t) \in H^s(0, 1)$ существует такой полином $p(t) \in P_s(0, 1)$, что

$$\int_0^1 \frac{d^l}{dt^l} (v(t) - p(t)) dt = 0, \quad l = 0, \dots, s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = 0$. Тогда и $l = 0$. Поэтому искомым полиномом будет

$$p(x) := \bar{v} = \int_0^1 v(t) dt$$

ибо очевидно, что $\int_0^1 (v(t) - \bar{v}) dt = 0$.

Пусть утверждение верно для $s - 1$. Докажем его справедливость для s . Пусть $p(t) = p_s(t) = \sum_{l=0}^s c_l t^l$ — искомый полином. Определим сначала его коэффициент при старшей степени t , т.е. c_s . Поскольку

$$\frac{d^s p_s(t)}{dt^s} = c_s s!,$$

то пусть

$$\int_0^1 \frac{d^s p_s(t)}{dt^s} dt = c_s s! \equiv \int_0^1 \frac{d^s v(t)}{dt^s} dt. \quad (21)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\tilde{v}(t) \equiv v(t) - c_s t^s. \quad (22)$$

В силу определения c_s из (21)

$$\int_0^1 \frac{d^s}{dt^s} \tilde{v}(t) dt = 0$$

равно как и

$$\int_0^1 \frac{d^s}{dt^s} (\tilde{v}(t) - \tilde{p}_{s-1}(t)) dt = 0, \quad (23)$$

где $\tilde{p}_{s-1}(t)$ — произвольный полином степени $s - 1$. Но по предположению индукции существует полином $p_{s-1}(t)$ степени $s - 1$ такой, что

$$\int_0^1 \frac{d^l}{dt^l} (\tilde{v}(t) - p_{s-1}(t)) dt = 0, \quad l = 0, \dots, s - 1. \quad (24)$$

Объединяя (23) и (24) с учетом (22) заключаем, что искомый полином

$$p_s(t) = c_s t^s + p_{s-1}(t),$$

где c_s определяется соотношением (21). Лемма доказана.

4. Пример: аппроксимационные свойства конечноэлементного пространства $S_{3,1}^h$

Покажем, как можно использовать разработанный в предыдущем пункте аппарат для анализа аппроксимационных свойств конечноэлементных пространств на примере пространства $S_{3,1}^h$, определяемого соотношением (7.4).

Т е о р е м а 1. Если $v \in H^4(0, 1)$, а $i_{h,3}v \in S_{3,1}^h$ — ее интерполят, то

$$\|v - i_{h,3}v\|_l \leq ch^{3+1-l}|v|_4, \quad l = 0, \dots, 3.$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от v , ни от h .

Доказательство. Анализ доказательства теоремы 12.4 показывает, что все рассуждения этого доказательства могут быть использованы и здесь при оценке эрмитовой интерполяции; нужно только получить оценку типа (12.21), т.е. оценку

$$\|\hat{v}(t) - \hat{i}_3 \hat{v}(t)\|_4 \leq c |\hat{v}(t)|_4. \quad (25)$$

Докажем ее. По построению

$$\hat{i}_3 \hat{v}(t) = \hat{v}(0)p_{00}(t) + \hat{v}(1)p_{10}(t) + \left. \frac{d\hat{v}}{dt} \right|_{t=0} p_{01}(t) + \left. \frac{d\hat{v}}{dt} \right|_{t=1} p_{11}(t),$$

где

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= (t-1)^2(2t+1), & p_{10}(t) &= t^2(3-2t), \\ p_{01}(t) &= t(t-1)^2, & p_{11}(t) &= t^2(t-1). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом леммы 11.1

$$\begin{aligned} \|\hat{i}_3 \hat{v}(t)\|_4 &\leq c \left(\|\hat{v}\|_{L_\infty(0,1)} + \left\| \frac{d\hat{v}}{dt} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right) \leq \\ &\leq c \|\hat{v}\|_2 \leq c \|\hat{v}\|_4. \end{aligned}$$

Используя теперь неравенство треугольника, эту оценку и лемму 11, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\hat{v}(t) - \hat{i}_3 \hat{v}(t)\|_4 &\leq \|\hat{v}\|_4 + \|\hat{i}_3 \hat{v}\|_4 \leq c \|\hat{v}\|_4 \leq \\ &\leq c \widetilde{\|\hat{v}\|_4} = c \sqrt{|\hat{v}|_4^2 + \sum_{l=0}^3 \left[\int_0^1 \frac{d^l}{dt^l} \hat{v}(t) dt \right]^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $\hat{p}_3(t)$ — произвольный многочлен третьей степени. Поскольку

$$\hat{i}_3 \hat{p}_3(t) = \hat{p}_3(t),$$

то

$$\|(\hat{v}(t) - \hat{p}_3(t)) - \hat{i}_3(\hat{v}(t) - \hat{p}_3(t))\|_4 = \|\hat{v}(t) - \hat{i}_3 \hat{v}(t)\|_4.$$

Используя теперь оценку (26) с заменой $v(t)$ на $(\hat{v}(t) - \hat{p}_3(t))$, будем иметь

$$\|\hat{v}(t) - \hat{i}_3 \hat{v}(t)\|_4 \leq c \sqrt{|\hat{v}|_4^2 + \sum_{l=0}^3 \left[\int_0^1 \frac{d^l}{dt^l} (\hat{v}(t) - \hat{p}_3(t)) dt \right]^2}.$$

Выберем теперь $\hat{p}_3(t)$ таким, как в лемме 12. В результате получим желаемую оценку (25).

На этом будем считать доказательство теоремы законченным.

5. Упражнения

1. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в \mathbb{R}^2 . Тогда, если $v \in H^1(\Omega)$, то

$$\|v\|_0^2 \leq c [|v|_1^2 + (v, 1)^2]$$

(*неравенство Пуанкаре*) (ср. с леммой 9). Доказать неравенство Пуанкаре для случая $\Omega = D := \{(x, y) \mid 0 < x, y < l\}$.

2. Доказать, что

$$\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 \sim \widetilde{\|v\|_{H^s(\Omega)}}^2 := |v|_{H^s(\Omega)}^2 + \sum_{0 \leq l_1 + l_2 \leq s-1} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial^{l_1+l_2} v}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} dx dy \right)^2.$$

(ср. с леммами 10 и 11).

3. Доказать, что для любой $v \in H^s(\Omega)$ существует многочлен $p(x, y) \in P_2(\Omega)$ такой, что

$$\left(\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} (v - p), 1 \right) = 0, \quad 0 \leq l_1 + l_2 \leq s.$$

(ср. с леммой 12).

Лекция 14

ПРОСТРАНСТВА H^{-s} . СХОДИМОСТЬВ L_2 И В H^{-s}

В лекции 12 при обсуждении теоремы 12.3 о сходимости простейшего метода конечных элементов в $H^1(0, 1)$ было отмечено, что в $L_2(0, 1)$ скорость сходимости увеличивается на порядок по сравнению с $H^1(0, 1)$. Оказывается, что если конечноэлементное пространство состоит из кусочных многочленов степени выше первой, то можно достичь еще большего увеличения скорости сходимости по сравнению с $H^1(0, 1)$, если мерить погрешность решения в нормах еще более слабых, чем $L_2(0, 1)$. В этой лекции мы введем указанные нормы и получим соответствующие оценки скорости сходимости.

1. Пространства H^{-s}

Пусть (\cdot, \cdot) — обычные скалярные произведения в $L_2(I) = H^0(I)$. В лекции 1 нами было введено пространство

$$H_0^s(I) = \left\{ v(x) \in H^s(I) \mid v(0) = \dots = v^{(s-1)}(0) = v(1) = \dots = v^{(s-1)}(1) = 0 \right\} \quad (1)$$

при $s \in \mathbb{N}$, которое является подпространством гильбертова пространства $H^s(I)$. Скалярное произведение в последнем задается формулой

$$(u, v)_s = \sum_{j=0}^s \left(\frac{d^j u}{dx^j}, \frac{d^j v}{dx^j} \right). \quad (2)$$

Определим на $H_0^s(I)$ линейные непрерывные функционалы, порождаемые функциями $f \in H^0(I)$, полагая

$$l(v) = l_f(v) = (f, v), \quad v \in H_0^s(I). \quad (3)$$

Нормы введенных функционалов вычисляются обычным образом по формуле:

$$\|l_f\| = \sup_{v \in H_0^s} \frac{|(f, v)|}{\|v\|_s}, \quad f \in H^0(I). \quad (4)$$

Пополним пространство $H^0(I)$ по норме

$$\|l_f\| = \|f\|_{-s}, \quad (5)$$

называемой *негативной нормой*. Вновь образованное пространство $(H_0^s(I))' = H^{-s}(I)$, является *сопряженным* к $H_0^s(I)$.

Изучим структуру пространства $H^{-s}(I)$. В силу теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $u \in H_0^s(I)$, такой что

$$l_f(v) = (u, v)_s, \quad v \in H_0^s(I). \quad (6)$$

Сравнивая теперь (6) и (3), заключаем, что $u(x)$ есть (обобщенное из $H_0^s(I)$) решение следующей задачи:

$$u(x) \in H_0^s(I) : (u, v)_s = (f, v) \quad \forall v \in H_0^s(I). \quad (7)$$

Определим *функцию Грина* этой задачи, т.е. ядро интегрального оператора, являющегося обратным по отношению к дифференциальному оператору задачи (7). Ею является такая функция $G_{2s}(x; \xi)$ аргумента x и параметра $\xi \in I$, которая служит решением задачи:

$$G_{2s}(x; \xi) \in H_0^s(I) : (G_{2s}(x; \xi), v(x))_s = v(\xi), \quad \xi \in I, \quad \forall v \in H_0^s(I).$$

Дифференциальная форма этой задачи такова:

$$L_{2s}G_{2s}(x; \xi) \equiv \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{d^{2k}G_{2s}(x; \xi)}{dx^{2k}} = \delta(x - \xi), \quad x \in I, \quad (8)$$

$$G_{2s}(0; \xi) = \dots = \frac{d^{s-1}G_{2s}(0; \xi)}{dx^{s-1}} = G_{2s}(1; \xi) = \dots = \frac{d^{s-1}G_{2s}(1; \xi)}{dx^{s-1}} = 0.$$

В силу симметрии билинейной формы $a(u, v) \equiv (u, v)_s$ задача (8) является самосопряженной, а ее решение — функция Грина — есть симметричная функция по отношению к x и ξ , т.е. $G_{2s}(x; \xi) = G_{2s}(\xi; x)$.

Решение задачи (7) при помощи функции Грина выписывается следующим образом:

$$u(x) = (G_{2s}(x; \xi), f(\xi)). \quad (9)$$

Итак, мы установили взаимно-однозначное соответствие между $H_0^s(I)$ и $H^{-s}(I)$, осуществляемое при помощи оператора L_{2s} из (8) и соотношения (9). Пусть $v(x) \in H_0^s(I)$. Ей соответствует $g(x) \in H^{-s}(I)$ такая, что

$$v(x) = (G_{2s}(x; \xi), g(\xi)).$$

Подставляя это представление $v(x)$ в (3), получим

$$(f, v) = (f, (G_{2s}, g)) = (g, (G_{2s}, f)) = (f, g)_{-s}.$$

Мы нашли вид скалярного произведения в гильбертовом пространстве $H^{-s}(I)$:

$$(f, g)_{-s} = \int_0^1 \int_0^1 G_{2s}(x; \xi) f(x) g(\xi) dx d\xi$$

и, тем самым, получили конструктивный способ вычисления нормы в H^{-s} , отличный от (4):

$$\|f\|_{-s}^2 = \int_0^1 \int_0^1 G_{2s}(x; \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi. \quad (10)$$

Укажем еще один способ вычисления нормы в $H^{-s}(I)$ — в терминах коэффициентов Фурье. Пусть $\mu_m(x)$ — собственные функции, а $\lambda_m^{(2s)}$ — собственные значения следующей задачи:

$$\begin{aligned} L_{2s}\mu_m(x) &= \lambda_m^{(2s)}\mu_m(x), & x \in I, \\ \mu_m(0) &= \dots = \mu_m^{(s-1)}(0) = \mu_m(1) = \dots = \mu_m^{(s-1)}(1) = 0. \end{aligned}$$

В силу самосопряженности и положительной определенности оператора задачи все собственные значения действительны и положительны, а собственные функции можно считать ортонормированными. Легко проверить, что

$$\delta(x - \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(x)\mu_m(\xi)$$

и поэтому

$$G_{2s}(x; \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(x)\mu_m(\xi)}{\lambda_m^{(2s)}}$$

(формула Мерсера). Отсюда и из (10) находим, что

$$\|f\|_{-s}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 / \lambda_m^{(2s)}, \quad (11)$$

где f_m — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ при разложении по $\mu_m(x)$. При $s = 1$ имеем $\lambda_m^{(2)} = \pi^2 m^2 + 1$. В общем же случае известно, что

$$c m^{2s} \leq \lambda_m^{(2s)} \leq \frac{1}{c} m^{2s},$$

где c зависит только от s , и поэтому

$$c \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 m^{-2s} \leq \|f\|_{-s}^2 \leq \frac{1}{c} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 m^{-2s}.$$

Формула для нормы, аналогичная (11), имеет место и в $H_0^s(I)$. Очевидно, что

$$\|v\|_s^2 = \sum_{m=1}^{\infty} v_m^2 \lambda_m^{(2s)}. \quad (12)$$

В качестве последнего штриха к портрету пространства $H^{-s}(I)$ вычислим $\|f'\|_{-1}$, точнее, вычислим эквивалентную ей величину. В силу леммы 11.4 норма и полунорма в $H_0^1(I)$ эквивалентны. (Как, впрочем, и в любом $H_0^s(I)$). Поэтому в $H^{-1}(I)$ можно определить эквивалентную норму путем использования в (4) вместо нормы в $H_0^1(I)$ соответствующей полунормы. Пусть

$$\|\widetilde{l}_f\| = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|(f, v)|}{|v|_1}.$$

Тогда вместо (6) будем иметь

$$l_f(v) = (u', v'),$$

а функция Грина из (10) примет вид

$$\tilde{G}_2(x; \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & x \leq \xi, \\ (1 - x)\xi, & x \geq \xi. \end{cases} \quad (13)$$

Поэтому

$$\|\widetilde{f}\|_{-1}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_2(x; \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi,$$

а

$$\|\widetilde{f'}\|_{-1}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}_2(x; \xi) f'(x) f'(\xi) dx d\xi.$$

Преобразуем правую часть интегрированием по частям. Первое интегрирование проходит безболезненно, ибо

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{G}_2(x; \xi) = \begin{cases} 1 - \xi, & x < \xi \\ -\xi, & x > \xi \end{cases} = \chi(\xi - x) - \xi,$$

где $\chi(\xi)$ — функция Хевисайда (см. 1.14) — всего лишь разрывна при $x = \xi$. Второе интегрирование по частям по ξ нужно проводить либо отдельно по $(0, x)$ и $(x, 1)$, либо с использованием обобщенной производной функции $\chi(\xi - x)$, равной $\delta(\xi - x)$. В любом случае будем иметь

$$\|\widetilde{f'}\|_{-1}^2 = \|f\|_0^2 - (f, 1)^2.$$

2. Априорные оценки решения

Для исследования скорости сходимости метода конечных элементов в L_2 и в H^{-s} нам потребуются оценки решения задачи, которую мы собираемся решить этим методом, в различных нормах. Будем рассматривать ту же смешанную задачу, что и в лекциях 11,12 при исследовании сходимости в H^1 .

Т е о р е м а 1 (об априорных оценках). *Если выполнены условия (11.16) и решение задачи (11.4), (11.14), (11.15) существует, то для него справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_1 \leq \frac{2\sqrt{2}}{c_0} (\|f\|_0 + |g|). \quad (14)$$

Если к тому же выполнены условия (11.17) и

$$|p'(x)| \leq c_3, \quad (15)$$

то

$$|u|_2 \leq c_4(\|f\|_0 + |g|), \quad (16)$$

где

$$c_4 = \frac{1}{c_0} \left[\frac{2\sqrt{2}(c_2 + c_3)}{c_0} + 1 \right].$$

Доказательство. Пусть решение задачи (11.4), (11.14), (11.15) существует. Полагая в (11.4) $v = u$ и принимая во внимание лемму 11.5, получим

$$\frac{c_0}{2} \|u\|_1^2 \leq a(u, u) = l(u) = \int_0^1 f u dx + gu(1).$$

К интегралу в правой части применим неравенство Коши-Буняковского, а для оценки $u(1)$ воспользуемся леммой 11.1. В результате найдем, что

$$\frac{c_0}{2} \|u\|_1^2 \leq \|f\|_0 \|u\|_0 + \sqrt{2}|g| \|u\|_1 \leq \sqrt{2}(\|f\|_0 + |g|) \|u\|_1,$$

откуда и следует (14).

Для доказательства (16) воспользуемся дифференциальной формулировкой задачи, именно уравнением (11.12). Из этого уравнения имеем

$$u'' = \frac{1}{p(x)} [-p'u' + qu - f],$$

а с учетом (11.16), (11.17) и (15) находим, что

$$|u''| \leq \frac{1}{c_0} (c_3|u'| + c_2|u| + |f|).$$

Вычисляя L_2 -норму левой и правой частей и используя неравенство треугольника, будем иметь

$$\|u''\|_0 \leq \frac{1}{c_0} (c_3 \|u'\|_0 + c_2 \|u\|_0 + \|f\|_0) \leq \frac{c_2 + c_3}{c_0} \|u\|_1 + \frac{1}{c_0} \|f\|_0.$$

Но $\|u\|_1$ уже оценена, так что, подставляя сюда эту оценку (14), приходим к (16). Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Если коэффициенты и правая часть задачи (11.12), (11.13) таковы, что $u \in H^m(I)$, $m = 3, 4, \dots$, то наряду с (14) и (16) справедливы оценки*

$$|u|_m \leq c(m)(\|f\|_{m-2} + |g|), \quad (17)$$

где $c(m)$ — положительные постоянные, не зависящие ни от u , ни от f , ни от g .

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем.

3. Сходимость в L_2

Как уже отмечалось в лекции 12, из теоремы 12.3 (теоремы 12.5) о сходимости конечноэлементного решения из S_1^h (S_k^h) в норме $H^1(I)$ со скоростью $O(h)$ ($O(h^k)$) следует его сходимость и в $L_2(I)$ с той же скоростью. Однако в силу теорем 12.2 и 12.4 погрешность интерполяции в $L_2(I)$ имеет на единицу больший порядок малости по h , чем в $H^1(I)$. Докажем, что аналогичным свойством обладает и конечноэлементное решение.

Т е о р е м а 3. *Если выполнены условия (11.16) и решение $u(x)$ задачи (11.12), (11.13) принадлежит $H^{k+1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$, то решение задачи (11.7) с $a(u, v)$ и $l(v)$ из (11.14) и $H^h = \tilde{S}_k^h$ из (12.16), (12.17) (приближенное решение) сходится к решению задачи (11.12), (11.13) в смысле нормы пространства $L_2(I)$ со скоростью $O(h^{k+1})$, т.е.*

$$\|u - u^h\|_0 \leq ch^{k+1}|u|_{k+1},$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от h , ни от u .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем уточняющее обозначение для линейной формы $l(v)$. Пусть (ср. с (3))

$$l_\varphi(v) \equiv \int_0^1 \varphi(x)v(x) dx. \quad (18)$$

Определим вспомогательную функцию $w(x)$ как решение задачи

$$w(x) \in \tilde{H}^1(I) : a(v, w) = l_\varphi(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^1(I) \quad (19)$$

и положим здесь $v = u - u^h$. Тогда с учетом теоремы 11.1 и неравенства Шварца

$$l_\varphi(u - u^h) = a(u - u^h, w) = a(u - u^h, w - i_{h,1}w) \leq \|u - u^h\|_a \|w - i_{h,1}w\|_a.$$

Для оценки правой части этого неравенства применим сначала лемму 11.5, а затем теорему 12.4 об аппроксимации и теорему 12.5 о сходимости в $H^1(I)$. Будем иметь

$$l_\varphi(u - u^h) \leq c \|u - u^h\|_1 \|w - i_{h,1}w\|_1 \leq c h^{k+1} |u|_{k+1} |w|_2.$$

Оценим теперь $|w|_2$ при помощи теоремы 1 и положим $\varphi \equiv u - u^h$. В результате получим

$$l_{u-u^h}(u - u^h) = \int_0^1 (u - u^h)^2 dx = \|u - u^h\|_0^2 \leq c h^{k+1} |u|_{k+1} \|u - u^h\|_0,$$

откуда после сокращения обеих частей неравенства на $\|u - u^h\|_0$ и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

4. Сходимость в H^{-s}

Имеет место

Т е о р е м а 4. *Если выполнены условия (11.6) и решение $u(x)$ задачи (11.12), (11.13) принадлежит $H^{k+1}(I)$, $k \in \mathbb{N}$, то решение задачи (11.7) с $a(u, v)$ и $l(v)$ из (11.14) и $H^h = \tilde{S}_k^h$ из (12.16), (12.17) (приближенное решение) сходится к решению задачи (11.12), (11.13) в смысле нормы пространства $H^{-s}(I)$, $s = 1, \dots, k-1$ со скоростью $O(h^{k+s+1})$. Именно,*

$$\|u - u^h\|_{-s} \leq c h^{k+s+1} |u|_{k+1}, \quad s = 1, 2, \dots, k-1, \quad (20)$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от h , ни от u .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w(x)$ есть решение задачи (19). Как и при доказательстве теоремы 3 найдем, что

$$l_\varphi(u - u^h) \leq c \|u - u^h\|_1 \|w - i_{h,s+1}w\|_1 \leq c h^{k+s+1} |u|_{k+1} |w|_{s+2}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_{-s} &= \sup_{\varphi \in \dot{H}_0^s} \frac{|(u - u^h, \varphi)|}{\|\varphi\|_s} = \sup_{\varphi \in \dot{H}_0^s} \frac{l_\varphi(u - u^h)}{\|\varphi\|_s} \leq \\ &\leq ch^{k+s+1} \sup_{\varphi \in \dot{H}_0^s} \frac{|u|_{k+1}|w|_{s+2}}{\|\varphi\|_s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Но в силу теоремы 2

$$|w|_{s+2} \leq c(s+2)\|\varphi\|_s,$$

что вместе с (21) приводит к искомой оценке (20). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Разумеется, теорема 3 является частным случаем теоремы 4, ибо

$$\|f\|_0 = \sup_{v \in L_2(I)} \frac{(f, v)}{\|v\|_0},$$

т.е. пространство $L_2(I)$ сопряжено само к себе в смысле скалярного произведения (\cdot, \cdot) .

5. Упражнения

1. Доказать, что $\|\widetilde{f'}\|_{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_m^2$, где $\bar{f}_m = (f, \bar{\mu}_m)$, а $\bar{\mu}_m = \sqrt{2} \cos \pi m x$.
2. Доказать, что $\|\widetilde{\sin k\pi x}\|_{-1} = 1/(\sqrt{2}k\pi)$.
3. Доказать, что $\| -f'' + f \|_{-2} = \|f\|_0$.
4. Доказать, что $\|u - u^h\|_{-s} \leq ch^{l+s+1}|u|_{l+1}$, $l = 1, \dots, k$, $s = 0, \dots, k-1$.
5. Выяснить, где при доказательстве теоремы 3 использовано условие (11.16).
6. Выяснить, где при доказательстве теоремы 4 использовано условие $s \leq k-1$. Какова величина $\|u - u^h\|_{-k}$?

Лекция 15

СУПЕРСХОДИМОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Установленная в предыдущей лекции оценка скорости сходимости МКЭ в смысле *негативных норм* $H^{-s}(I)$, казалось бы, не должна представлять сколь-нибудь существенный практический интерес: обычно интересуются точностью метода в смысле норм C , H^1 или, на худой конец, в L_2 . Однако утверждение теоремы 14.4 содержит весьма значительную информацию о разности между u и u^h . Можно показать, что функция Грина $G_{2s}(x; \xi)$, фигурирующая в определении нормы пространства $H^{-s}(I)$ формулой (14.10), неотрицательна и, следовательно, бóльшая по порядку малость $\|u - u^h\|_{-s}$ по сравнению с $\|u - u^h\|_0$ должна свидетельствовать о том, что на $e^{(i)}$ существуют нули функции $u - u^h$, где она меняет знак.*) Если бы мы знали эти нули, то мы знали бы не приближенное, а точное решение в этих точках. Разумеется, положение этих нулей зависит не только от метода решения, но и от самой функции $u(x)$, и найти их, за отдельными исключениями, не представляется возможным. Однако можно пытаться искать точки из малых окрестностей этих нулей, которые уже не зависят от u (но зависят от метода) и в которых разность между u и u^h является малой величиной более высокого порядка, чем, например, $\|u - u^h\|_1$. Такие точки называются *точками суперсходимости* МКЭ.

1. Суперсходимость в узлах

Напомним формулировку задачи, исследованием конечноэлементного решения которой мы занимаемся. Найти решение краевой задачи

*) Например, функциональная последовательность $\sin k\pi x$, $k \in \mathbb{N}$, всего лишь ограничена в $C(I)$ и даже в $L_2(I)$. Однако, как следует из задачи 14.2, $\|\sin k\pi x\|_{-1} = \sqrt{2}/(k\pi)$, и в смысле H^{-1} эта последовательность является сходящейся к нулю.

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u &= f(x), \quad x \in I, \\
u(0) = 0, \quad p(1)u'(1) + \varkappa u(1) &= g,
\end{aligned} \tag{1}$$

коэффициенты которой подчинены условиям

$$p(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \varkappa \geq 0. \tag{2}$$

Мы изучаем конечноэлементное решение этой задачи, т.е. функцию

$$u^h(x) \in \tilde{S}_k^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_k^h, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_0^1 \left(p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx + \varkappa u(1)v(1), \\
l(v) &= \int_0^1 f v dx + gv(1),
\end{aligned} \tag{4}$$

а \tilde{S}_k^h определяется (12.16), (12.17) и есть совокупность кусочно полиномиальных степени k непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x = 0$.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия (2) и решение $u(x)$ задачи (1) принадлежит $H^{k+1}(I)$, то узлы x_i конечноэлементной сетки, служащие концами элементов $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$, являются точками суперсходимости конечноэлементного решения u^h из (3). В этих точках справедлива оценка*

$$\max_i |u(x_i) - u^h(x_i)| \leq c h^{2k} |u|_{k+1}, \tag{5}$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от u , ни от h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w(x)$ есть решение вариационной задачи (14.19). Положим правую часть этой задачи $\varphi(x) = \delta(x - x_i)$. При таком выборе правой части задача (14.19) определяет функцию точечного источника (функцию Грина), которую обозначим через $G(x; x_i)$.

$$a(v(x), G(x; x_i)) = v(x_i). \tag{6}$$

Полагая в (6) $v(x) = u(x) - u^h(x)$ и используя теорему 11.1 (об ортогональной проекции), после применения неравенства Шварца и леммы 11.5 будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x_i) - u^h(x_i)| &= a(u - u^h, G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)) \leq \\ &\leq c_4 \|u - u^h\|_1 \|G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\|_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценка первого сомножителя известна из теоремы 12.5, так что осталось оценить второй сомножитель. Поскольку $G(x; x_i) \in H^{k+1}(I)$, то для оценки этого сомножителя применить теорему 12.4 непосредственно нельзя.

Покажем, что требуемую гладкость $G(x; x_i)$ имеет на $(0, x_i)$ и на $(x_i, 1)$. Для этого установим сначала оценку $G(x; x_i)$ в $H^1(I)$. Полагая в (6) $v(x) = G(x; x_i)$ и применяя леммы 11.5 и 11.1, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{2} \|G(x; x_i)\|_1^2 &\leq a(G(x; x_i), G(x; x_i)) = G(x_i; x_i) \leq \\ &\leq \sqrt{2} \|G(x; x_i)\|_1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|G(x; x_i)\|_1 \leq \frac{2\sqrt{2}}{c_0}. \quad (8)$$

Далее, по определению функции точечного источника, сосредоточенного в точке $x = x_i$

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG(x; x_i)}{dx} \right) + q(x)G(x; x_i) = 0, \quad 0 < x < x_i, \quad x_i < x < 1.$$

Отсюда с учетом (8), как и при доказательстве теорем 14.1 и 14.2, находим, что

$$|G(x; x_i)|_{H^{k+1}(0, x_i)}^2 + |G(x; x_i)|_{H^{k+1}(x_i, 1)}^2 \leq c.$$

Итак, из теоремы 12.4 с учетом вышеприведенного неравенства имеем оценку

$$\begin{aligned} \|G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\|_1^2 &= \\ &= \|G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\|_{H^1(0, x_i)}^2 + \\ &+ \|G(x; x_i) - i_{h,k}G(x; x_i)\|_{H^1(x_i, 1)}^2 \leq ch^{2k}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку и оценку из теоремы 12.5 в (7), приходим к (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Легко проверить, что если коэффициенты уравнения (1) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, то

$$G(x; x_i) = i_{h,k} G(x; x_i).$$

В этом случае из (7) следует, что $u(x_i) - u^h(x_i) = 0$, т.е. в узлах, являющихся концами элементов, точное и приближенное решения совпадают.

2. Сходимость в C

Мы уже достаточно подробно изучили сходимость метода конечных элементов в различных нормах. Однако пока открытым остается вопрос о скорости его поточечной сходимости. Из теоремы 12.5 и леммы 11.1, правда, вытекает оценка поточечной сходимости $O(h^k)$, но эта оценка не является точной. На самом деле, имеет место

Т е о р е м а 2. Если решение $u(x)$ задачи (1) принадлежит $C^{k+1}(\bar{I})$, а u^h — решение задачи (3), (4), то при выполнении условий (2), (11.17) справедлива оценка

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{C(\bar{I})} \leq c h^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_{C(\bar{I})}, \quad (9)$$

где $c = \text{const} > 0$ не зависит ни от u , ни от h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала зафиксируем тот факт, что $u^h(x)$ есть ортогональная в смысле энергетического скалярного произведения $a(\cdot, \cdot)$ проекция $u(x)$ на \tilde{S}_k^h , т.е.

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in \tilde{S}_k^h. \quad (10)$$

Затем введем билинейную форму

$$\tilde{a}(u, v) = \int_0^1 p(x) u'(x) v'(x) dx + \kappa u(0) v(0) \quad (11)$$

и определим проекцию $u(x)$ на \tilde{S}_k^h , но теперь уже в смысле $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$

$$\tilde{u}^h \in \tilde{S}_k^h \quad : \quad \tilde{a}(u - \tilde{u}^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in \tilde{S}_k^h. \quad (12)$$

Пусть, кроме того,

$$\tilde{a}^{(i)}(u, v) = \int_{e^{(i)}} p(x) u'(x) v'(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$P_k(e^{(i)}; w) = \left\{ v(x) \in P_k(e^{(i)}) \mid v(x) - w(x) \in H_0^1(e^{(i)}) \right\}, \quad (14)$$

а $\tilde{u}^{h(i)}$ — локальная проекция $u(x)$ на элементе $e^{(i)}$

$$\tilde{u}^{h(i)} \in P_k(e^{(i)}; u) : \quad \tilde{a}^{(i)}(u - \tilde{u}^{h(i)}, v) = 0 \quad \forall v \in P_k(e^{(i)}; 0). \quad (15)$$

Введенные функции \tilde{u}^h и $\tilde{u}^{h(i)}$ потребуются нам при оценке $|u - u^h|_C$.

Перейдем к получению оценки (9). Используя неравенство треугольника, находим, что

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_C &= \|u - \tilde{u}^h + \tilde{u}^h - u^h\|_C \leq \|u - \tilde{u}^h\|_C + \|\tilde{u}^h - u^h\|_C = \\ &= \|u^h - \tilde{u}^h\|_C + \max_i \|u - \tilde{u}^h\|_{C(e^{(i)})} = \\ &= \|u^h - \tilde{u}^h\|_C + \max_i \|u - \tilde{u}^{h(i)} + \tilde{u}^{h(i)} - \tilde{u}^h\|_{C(e^{(i)})} \leq \\ &\leq \|u^h - \tilde{u}^h\|_C + \max_i \|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})} + \max_i \|\tilde{u}^h - \tilde{u}^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Займемся оценкой слагаемых из правой части (16). Начнем с первого слагаемого. В силу (10) с учетом (4) и (11)

$$0 = a(u - u^h, v^h) = \tilde{a}(u - u^h, v^h) + (q(u - u^h), v^h).$$

Вычитая из правой части этого соотношения (12), найдем, что

$$\tilde{a}(u^h - \tilde{u}^h, v^h) = (q(u - u^h), v^h),$$

а полагая здесь $v^h = u^h - \tilde{u}^h$, будем иметь

$$\|u^h - \tilde{u}^h\|_{\tilde{a}}^2 = (q(u - u^h), u^h - \tilde{u}^h).$$

Оценим левую часть снизу сначала при помощи леммы 11.5, а затем при помощи леммы 11.1. Для оценки правой части примем во внимание (11.7) и воспользуемся неравенством Коши-Буняковского. Замечая теперь, что $\|v\|_0 \leq \|v\|_C$ и используя теорему 14.3, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{4} \|u^h - \tilde{u}^h\|_C^2 &\leq \frac{c_0}{2} \|u^h - \tilde{u}^h\|_1^2 \leq \|u^h - \tilde{u}^h\|_{\tilde{a}}^2 \leq c_2 \|u - u^h\|_0 \|u^h - \tilde{u}^h\|_0 \leq \\ &\leq c_2 c h^{k+1} |u|_{k+1} \|u^h - \tilde{u}^h\|_C \leq c_2 c h^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_C \|u^h - \tilde{u}^h\|_C. \end{aligned}$$

После сокращения обеих частей этого неравенства на $\|u^h - \tilde{u}^h\|_C$ приходим к искомой оценке

$$\|u^h - \tilde{u}^h\|_C \leq c h^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_C. \quad (17)$$

Перейдем к оценке второго слагаемого правой части (16). Пусть $\tilde{G}^{(i)}(x; \xi)$ — функция Грина дифференциального оператора, порождаемого билинейной формой (13) и граничными условиями первого рода. Определяющее ее вариационное уравнение имеет вид

$$v(x) = \tilde{a}^{(i)}(\tilde{G}^{(i)}(x; \xi), v(\xi)) \quad \forall v(\xi) \in H_0^1(e^{(i)}).$$

Полагая здесь $v(x) = u - \tilde{u}^{h(i)}$ и оценивая правую часть при помощи неравенства Шварца, с учетом леммы 11.5 будем иметь

$$|u(x) - \tilde{u}^{h(i)}| \leq c_4 \|\tilde{G}^{(i)}(x; \xi)\|_{\tilde{a}^{(i)}} \|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{H_0^1(e^{(i)})}.$$

Для оценки $\|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{H_0^1(e^{(i)})}$ воспользуемся теоремой 12.5 и примем во внимание, что $|u|_{H^{k+1}(e^{(i)})} \leq \sqrt{h} \|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}$. В результате получим

$$|u(x) - \tilde{u}^{h(i)}(x)| \leq c_4 c h^{k+1/2} \|\tilde{G}^{(i)}(x; \xi)\|_{\tilde{a}^{(i)}} \|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}. \quad (18)$$

Оценим теперь функцию Грина. Легко видеть, что (ср. с (13.5))

$$\tilde{G}^{(i)}(x; \xi) = \begin{cases} \int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{p(t)} \int_{\xi}^{x_i} \frac{dt}{p(t)} / \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{p(t)}, & x \leq \xi, \\ \int_{x_{i-1}}^{\xi} \frac{dt}{p(t)} \int_x^{x_i} \frac{dt}{p(t)} / \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{p(t)}, & x \geq \xi \end{cases}$$

и, следовательно, $\|\tilde{G}^{(i)}(x; \xi)\|_{\tilde{a}^{(i)}} \leq \sqrt{h/c_0}$. Подставляя это неравенство в (18), получим искомую оценку

$$\|u - \tilde{u}^{h(i)}\|_{C(e^{(i)})} \leq c h^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_{C(e^{(i)})}. \quad (19)$$

Осталось оценить последнее слагаемое правой части (16). Для этого продолжим функцию $v(x) \in P_k(e^{(i)}; 0)$ из (14) на I нулем и результат обозначим через $v_I(x)$. Очевидно, что $v_I(x) \in S_k^h$. Отсюда с учетом (12) находим, что

$$0 = \tilde{a}(u - \tilde{u}^h, v_I) = a^{(i)}(u - \tilde{u}^h, v) \quad \forall v \in P_k(e^{(i)}; 0).$$

Вычитая правую часть этого соотношения из (15), будем иметь

$$\tilde{a}^{(i)}(\tilde{u}^h - \tilde{u}^{h(i)}, v) = 0 \quad \forall v \in P_k(e^{(i)}; 0). \quad (20)$$

Так как по построению (см. (12), (15)) функция $z(x) = \tilde{u}^h - \tilde{u}^{h(i)} \in P_k(e^{(i)}; \tilde{u}^h - u)$, то в силу (20) она является решением вариационной задачи

$$z \in P_k(e^{(i)}; \tilde{u}^h - u) : \quad \tilde{a}^{(i)}(z, v) = 0 \quad \forall v \in P_k(e^{(i)}; 0),$$

а в силу теоремы 2.1 и задачи минимизации

$$\tilde{a}^{(i)}(z, z) = \inf_{v \in P_k(e^{(i)}; \tilde{u}^h - u)} \tilde{a}^{(i)}(v, v).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{a}^{(i)}(z, z) \leq \tilde{a}^{(i)}(\varphi, \varphi)$, где $\varphi(x)$ — принадлежащая $P_k(e^{(i)}; \tilde{u}^h - u)$ линейная функция, и с учетом (11.16), (11.17) имеем

$$|z|_{H^1(e^{(i)})}^2 \leq \frac{1}{c_0} \tilde{a}^{(i)}(z, z) \leq \frac{c_1}{c_0} \int_{e^{(i)}} (\varphi')^2 dx = \frac{c_1}{c_0} [z(x_{i-1}) - z(x_i)]^2 / h.$$

Сделаем в левой части замену переменной $(x - x_{i-1})/h = t$ (см. (12.12) и далее), а правую часть оценим при помощи неравенства Коши

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \hat{z}^{(i)}(t) \right]^2 dt \leq 2 \frac{c_1}{c_0} [z^2(x_{i-1}) + z^2(x_i)].$$

Добавим к обеим частям этого неравенства $(\hat{z}^{(i)}(0))^2 = z^2(x_{i-1})$ и воспользуемся леммой 13.7, в силу которой $(\hat{z}^{(i)}(0))^2 + |\hat{z}^{(i)}|_1^2 \sim \|\hat{z}^{(i)}\|_1^2$, а вновь полученную левую часть оценим снизу при помощи леммы 11.1. В результате получим

$$\|\hat{z}^{(i)}\|_{C(\bar{I})}^2 = \|z\|_{C(e^{(i)})}^2 \leq c [z^2(x_{i-1}) + z^2(x_i)]. \quad (21)$$

Нам осталось вспомнить, что $z(x_i) = (\tilde{u}^h - u)(x_i)$ и воспользоваться теоремой 1, в силу которой $|(\tilde{u}^h - u)(x_i)| \leq ch^{2k}|u|_{k+1}$. Подставляя эти оценки в правую часть (21) и извлекая из обеих частей неравенства квадратные корни, будем иметь оценку

$$\|z\|_{C(e^{(i)})} \leq ch^{2k}|u|_{k+1} \leq ch^{2k}\|u^{(k+1)}\|_C, \quad (22)$$

которая является даже более сильной, чем мы хотели. Искомая оценка (9) следует из (17), (19), (22) и (16). Теорема доказана.

3. Пример

В завершение построим конечноэлементное решение следующей задачи

$$u'' = 6x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad (23)$$

и изучим структуру его погрешности. Будем искать решение из пространства S_2^h . Пусть, как обычно, $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$, а дополнительные узлы обозначим через $x_{i-1/2}$, $i = 1, \dots, N$. В силу замечания конечноэлементное решение задачи (23) в узлах x_i совпадает с точным решением этой задачи, имеющим вид $u(x) = x^3$. Поэтому достаточно найти только $u^h(x_{i-1/2})$. Матрица функций формы квадратичного элемента имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)} &= \\ &= \frac{2}{h^2} [(x - x_{i-1/2})(x - x_i), 2(x - x_{i-1})(x_i - x), (x - x_{i-1/2})(x - x_{i-1})], \end{aligned}$$

где $h = x_i - x_{i-1}$, а матрица жесткости есть

$$K^{(i)} = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Правая часть интересующего нас уравнения для определения $u^h(x_{i-1/2})$ задается второй компонентой вектора нагрузки $F^{(i)}$ и есть

$$\begin{aligned} F^{(i)} &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} 6x \frac{4}{h^2} (x - x_{i-1})(x_i - x) dx = \\ &= -24h \int_0^1 (ht + x_{i-1})t(1-t) dt = -4h(x_i - h/2). \end{aligned}$$

Искомое уравнение имеет вид

$$-\frac{8}{3h}u^h(x_{i-1}) + \frac{16}{3h}u^h(x_{i-1/2}) - \frac{8}{3h}u^h(x_{i+1}) = -4h(x_i - h/2).$$

Поскольку $u^h(x_i) = u(x_i) = x_i^3$, то отсюда находим, что

$$u^h(x_i - h/2) = (x_{i-1/2})^3,$$

т.е. значения приближенного решения и в узлах $x_{i-1/2}$ совпадают со значениями точного решения. Тем самым,

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \frac{2}{h^2} [(x - x_{i-1/2})(x - x_i)x_{i-1}^3 + (x - x_{i-1/2})(x - x_{i-1})x_i^3 + \\ &+ 2(x - x_{i-1})(x_i - x)x_{i-1/2}^3], \quad x \in e^{(i)}, \end{aligned}$$

или, вводя локальную переменную $t = (x - x_{i-1})/h$,

$$\begin{aligned} u^h &= \left(3x_i h^2 - \frac{3h^3}{2}\right) t^2 + \left(3x_i^2 h - 6x_i h^2 + \frac{5h^3}{2}\right) t + \\ &+ (x_i^3 - 3x_i^2 h + 3x_i h^2 - h^3). \end{aligned}$$

Точное же решение в локальных переменных имеет вид

$$u = h^3 t^3 + 3h^2 x_{i-1} t^2 + 3h x_{i-1}^2 t + x_{i-1}^3$$

и потому

$$u - u^h = h^3 t(t - 1/2)(t - 1).$$

Лекция 16

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СХОДИМОСТИ В 2D

При исследовании сходимости МКЭ в двумерном случае мы будем пользоваться, как и раньше, основной теоремой 11.2, в силу которой энергетическая норма разности между точным и приближенным решениями оценивается сверху энергетической нормой разности между точным решением и произвольной функцией из конечноэлементного пространства. Правильную оценку скорости сходимости МКЭ в одномерном случае мы получили, выбирая в качестве этой функции интерполянт точного решения, принадлежащий конечноэлементному подпространству. Поскольку в одномерном случае обобщенное решение из $H^1(I)$ непрерывно, то проблем с построением интерполянта не было, тем более, что для оценки точности интерполирования мы накладывали на точное решение дополнительные условия гладкости, например, $u \in H^2(I)$. В двумерном случае $H^1(\Omega) \not\subset C(\bar{\Omega})$, однако, как будет доказано, $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, и при условии, что $u(x) \in H^2(\Omega)$, интерполянт точного решения может быть построен. Поскольку для оценки точности интерполяции все равно приходится предполагать дополнительную гладкость интерполируемой функции, то сделанное предположение является вполне приемлемым.

1. Вложение $W_1^2(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$

Начнем с определения пространств $H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ и $W_1^2(\Omega)$. Это соболевские пространства функций, модули обобщенных производных которых до второго порядка суммируемы со второй и первой степенью, соответственно. Если $\|v\|_{L_p(\Omega)}^p := \int_{\Omega} |v|^p dx dy$, $p \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_p^2}^p = & \|v\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L_p}^p + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\|_{L_p}^p + \\ & + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\|_{L_p}^p + 2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\|_{L_p}^p . \end{aligned}$$

Л е м м а 1. Пусть Ω есть ограниченная область в \mathbb{R}^2 с границей $\partial\Omega$, принадлежащей C^1 или являющейся полигональной. Тогда

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c \|v\|_{W_1^2(\Omega)},$$

где c не зависит от v .

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для единичного квадрата. Преобразуем интеграл по некоторому прямоугольнику от второй смешанной производной

$$\begin{aligned} \int_{x'}^x d\xi \int_{y'}^y \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} d\eta &= \int_{x'}^x \frac{\partial v(\xi, y)}{\partial\xi} d\xi - \int_{x'}^x \frac{\partial v(\xi, y')}{\partial\xi} d\xi = \\ &= v(x, y) - v(x', y) - \int_{x'}^x \frac{\partial v(\xi, y')}{\partial\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|v(x, y)| \leq |v(x', y)| + \left| \int_{x'}^x \frac{\partial v(\xi, y')}{\partial\xi} d\xi \right| + \left| \int_{x'}^x d\xi \int_{y'}^y \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} d\eta \right|.$$

Проинтегрируем это неравенство по $(x', y') \in \Omega$

$$|v(x, y)| \leq \int_0^1 |v(x', y)| dx' + \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial v(\xi, y')}{\partial\xi} \right| d\xi dy' + \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} \right| d\xi d\eta. \quad (1)$$

Далее,

$$v(x, y) = \int_{y'}^y \frac{\partial v(x, \eta)}{\partial\eta} d\eta + v(x, y')$$

и, следовательно,

$$|v(x, y)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right| dy + |v(x, y')|.$$

Проинтегрируем это неравенство по $(x, y') \in \Omega$

$$\int_0^1 |v(x, y)| dx \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |v(x, y)| dx dy.$$

Комбинируя полученную оценку с (1), найдем, что

$$|v(x, y)| \leq \|v\|_{L_1} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_1} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L_1} + \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\|_{L_1} \leq \|v\|_{W_1^2(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку $H^2(\Omega) \subset W_1^2(\Omega)$, то

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Последнее неравенство остается справедливым и в трехмерном случае, однако приведенное доказательство здесь не проходит.

2. Оценка интерполяции на базисном треугольнике

Пусть \hat{e} есть базисный треугольник, изображенный на рис. 1, а $\hat{v}(s, t) \in H^2(\hat{e})$. В силу леммы 1 функция $\hat{v}(s, t)$ непрерывна, и можно построить ее интерполяционный многочлен первой степени

$$\hat{v}(s, t) = \hat{v}_1 \hat{\zeta}_1 + \hat{v}_2 \hat{\zeta}_2 + \hat{v}_3 \hat{\zeta}_3,$$

где $\hat{\zeta}_k$ — барицентрические координаты (см. п. 8.3) на \hat{e} . Очевидно,

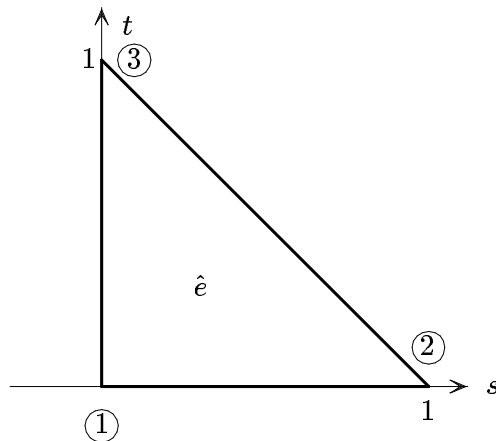


Рис. 1

что

$$\hat{v}(s, t) = \hat{v}(0, 0) + [\hat{v}(1, 0) - \hat{v}(0, 0)]s + [\hat{v}(0, 1) - \hat{v}(0, 0)]t. \quad (2)$$

Л е м м а 2. Если $\hat{v} \in H^2(\hat{e})$, то

$$\|\hat{v} - \hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} + \|\widehat{\nabla}(\hat{v} - \hat{iv})\|_{L_2(\hat{e})} \leq c \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{e})},$$

где $\widehat{\nabla}$ — оператор градиента, а c — постоянная, не зависящая от \hat{v} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим сначала нормы интерполянта и его градиента.

$$\|\hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} = \sqrt{\int_{\hat{e}} (\hat{iv})^2 ds dt} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{\hat{e}} |\hat{iv}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\hat{v}\|_{C(\hat{e})}.$$

Из (2)

$$\widehat{\nabla} \hat{iv} = [\{\hat{v}(1,0) - \hat{v}(0,0)\} \{\hat{v}(0,1) - \hat{v}(0,0)\}]^T$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{\nabla} \hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\{\hat{v}(1,0) - \hat{v}(0,0)\}^2 + \{\hat{v}(0,1) - \hat{v}(0,0)\}^2} \leq 2 \|\hat{v}\|_{C(\hat{e})}.$$

Воспользуемся этими оценками при получении оценок интерполяции. Принимая во внимание замечание 1 и упражнение 13.2, находим, что

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - \hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} &\leq \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{e})} + \|\hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} \leq \\ &\leq \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{e})} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\hat{v}\|_{C(\hat{e})} \leq c \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{e})} \leq c \widetilde{\|\hat{v}\|}_{H^2(\hat{e})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично

$$\|\widehat{\nabla}(\hat{v} - \hat{iv})\|_{L_2(\hat{e})} \leq c \widetilde{\|\hat{v}\|}_{H^2(\hat{e})}. \quad (4)$$

Пусть $\hat{p}_1(s, t) \in P_1(\hat{e})$. Очевидно, что $(\hat{v} - \hat{p}_1) - \hat{i}(\hat{v} - \hat{p}_1) = \hat{v} - \hat{iv}$. Поэтому из (3) следует, что

$$\|\hat{v} - \hat{iv}\|_{L_2(\hat{e})} \leq c \widetilde{\|\hat{v} - \hat{p}_1\|}_{H^2(\hat{e})},$$

а из (4) —

$$\|\widehat{\nabla}(\hat{v} - \hat{iv})\|_{L_2(\hat{e})} \leq c \widetilde{\|\hat{v} - \hat{p}_1\|}_{H^2(\hat{e})}.$$

Выбирая теперь $\hat{p}_1(s, t)$ как в упражнении 13.3, приходим к равенству

$$\|\widehat{\hat{v}} - \hat{p}_1\|_{H^2(\hat{e})} = |\hat{v}|_{H^2(\hat{e})},$$

что вместе с двумя предыдущими неравенствами приводит к утверждению леммы. Лемма доказана.

3. Оценка интерполяции на конечном элементе e

Пусть e — конечный элемент, изображенный на рис. 2, а ζ_k —

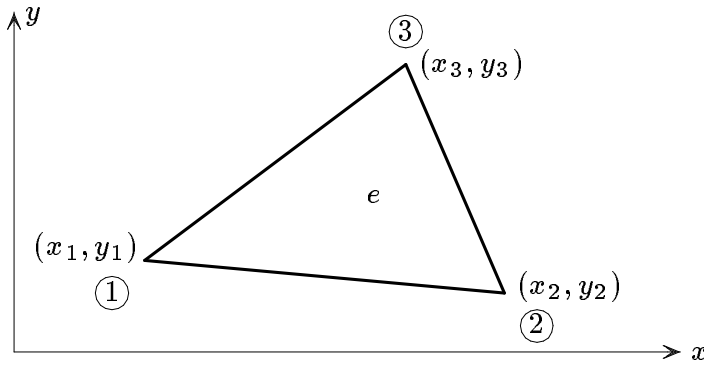


Рис. 2

его барицентрические координаты. В силу (8.12), (8.10) декартовы и барицентрические координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\zeta_2 + (x_3 - x_1)\zeta_3 + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)\zeta_2 + (y_3 - y_1)\zeta_3 + y_1. \end{aligned}$$

Для базисного треугольника \hat{e} , изображенного на рис. 1, $\zeta_2 = s$, $\zeta_3 = t$, и поэтому

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t + y_1 \end{aligned}$$

есть аффинное преобразование, осуществляющее отображение \hat{e} на e . Обозначим матрицу Якоби этого преобразования через \hat{J} :

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial s & \partial x / \partial t \\ \partial y / \partial s & \partial y / \partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\|v\|_{L_2(e)}^2 = \int_e v^2(x, y) dx dy = \int_{\hat{e}} |\det \hat{J}| \hat{v}^2(s, t) ds dt = |\det \hat{J}| \|\hat{v}\|_{L_2(\hat{e})}^2. \quad (5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \end{aligned}$$

то

$$\hat{\nabla} \hat{v} = \hat{J}^T \nabla v, \quad \nabla v = (\hat{J}^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}, \quad (6)$$

где $\hat{\nabla}$ и ∇ — операторы градиентов. Отсюда для евклидовой длины вектора ∇v получаем оценку

$$\|\nabla v\|^2 \leq \|\hat{J}^{-1}\|^2 \|\hat{\nabla} \hat{v}\|^2,$$

и, следовательно,

$$\|\nabla v\|_{L_2(e)}^2 \leq \|\hat{J}^{-1}\|^2 |\det \hat{J}| \|\hat{\nabla} \hat{v}\|_{L_2(\hat{e})}^2. \quad (7)$$

При оценке интерполяции на e для того, чтобы можно было воспользоваться леммой 2, нужна оценка $|\hat{v}|_{H^2(\hat{e})}$ через $|v|_{H^2(e)}$. По определению

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{H^2(\hat{e})}^2 &= \int_{\hat{e}} \left[\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t \partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial s \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} \right)^2 \right] ds dt = \\ &= \int_{\hat{e}} \left(\left\| \hat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \hat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\|^2 \right) ds dt. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу (6) первая компонента вектора $\hat{\nabla} \hat{v}$ равна первой компоненте вектора $\hat{J}^T \nabla v$, т.е. $\partial \hat{v} / \partial s = (\hat{J}^T \nabla v)_1$. Поэтому

$$\hat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} = \hat{J}^T \nabla (\hat{J}^T \nabla v)_1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\|^2 &= \left\| \hat{J}^T \nabla (\hat{J}^T \nabla v)_1 \right\|^2 \leq \|\hat{J}\|^2 \left\| \nabla (\hat{J}^T \nabla v)_1 \right\|^2 = \\ &= \|\hat{J}\|^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (\hat{J}^T \nabla v)_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} (\hat{J}^T \nabla v)_1 \right)^2 \right] = \\ &= \|\hat{J}\|^2 \left[(\hat{J}^T \nabla \frac{\partial v}{\partial x})_1^2 + (\hat{J}^T \nabla \frac{\partial v}{\partial y})_1^2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left\| \widehat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\|^2 \leq \|\hat{J}\|^2 \left[(\hat{J}^T \nabla \frac{\partial v}{\partial x})_2^2 + (\hat{J}^T \nabla \frac{\partial v}{\partial y})_2^2 \right]$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \right\|^2 + \left\| \widehat{\nabla} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right\|^2 &\leq \|\hat{J}\|^2 \left(\left\| \hat{J} \nabla \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \hat{J} \nabla \frac{\partial v}{\partial y} \right\|^2 \right) \leq \\ &\leq \|\hat{J}\|^4 \left(\left\| \nabla \frac{\partial v}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \nabla \frac{\partial v}{\partial y} \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство и принимая во внимание (8), получим

$$|\hat{v}|_{H^2(\hat{e})}^2 \leq \|\hat{J}\|^4 |\det \hat{J}|^{-1} |v|_{H^2(e)}^2.$$

Искомая связь между H^2 -нормами по \hat{e} и e установлена. С учетом этого неравенства в силу (5), (7) и леммы 2 находим, что

$$\begin{aligned} \|v - i_h v\|_{L_2(e)}^2 &\leq c \|\hat{J}\|^4 |v|_{H^2(e)}^2, \\ \|\nabla(v - i_h v)\|_{L_2(e)}^2 &\leq c \|\hat{J}^{-1}\|^2 \|\hat{J}\|^4 |v|_{H^2(e)}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Осталось оценить нормы \hat{J} и \hat{J}^{-1} . Для этого достаточно найти максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\hat{J}^T \hat{J}$, через которые указанные нормы выражаются, однако эти выражения довольно громоздки. Для оценки мы воспользуемся геометрическими соображениями.

Пусть

$$\xi = B\hat{\xi} + \mathbf{b} \quad (10)$$

аффинное преобразование, переводящее треугольник \hat{e} плоскости Ost в треугольник e плоскости Oxy . Обозначим через \hat{h} и h диаметры этих треугольников, т.е. диаметры минимальных кругов, содержащих \hat{e} и e , соответственно, а через $\hat{\rho}$ и ρ — диаметры вписанных в \hat{e} и e окружностей.

Л е м м а 3. Для норм операторов B и B^{-1} , согласованных с евклидовой нормой вектора, справедливы оценки

$$\|B\| \leq h/\hat{\rho}, \quad \|B^{-1}\| \leq \hat{h}/\rho.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$\|B\| = \sup_{\|\hat{\xi}\|=1} \|B\hat{\xi}\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\hat{\xi}\|=\hat{\rho}} \|B\hat{\xi}\|. \quad (11)$$

Любой вектор $\hat{\xi}$ длины $\hat{\rho}$ можно представить в виде $\hat{\xi} = \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2$, где $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in \hat{e}$. Для этого достаточно взять разность между подходящими диаметрально противоположными точками вписанной в e окружности, диаметр которой как раз равен $\hat{\rho}$. При этом в силу (10)

$$B\hat{\xi} = B\hat{\xi}_1 - B\hat{\xi}_2 = (\xi_1 - \mathbf{b}) - (\xi_2 - \mathbf{b}) = \xi_1 - \xi_2,$$

где $\xi_1, \xi_2 \in e$. Поскольку диаметр e равен h , то $\|\xi_1 - \xi_2\| \leq h$ и, следовательно,

$$\|B\hat{\xi}\| \leq h.$$

Подставляя эту оценку в (11), приходим к первому неравенству, утверждаемому леммой. Второе неравенство доказывается аналогично. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Поскольку для прямоугольного треугольника \hat{e} , изображенного на рис. 1, диаметр $\hat{h} = \sqrt{2}$, а $\hat{\rho} = 4\hat{h} \sin \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\pi}{8} = 2 - \sqrt{2}$, то

$$\|\hat{J}\| \leq h/(2 - \sqrt{2}), \quad \|\hat{J}^{-1}\| \leq \sqrt{2}/\rho. \quad (12)$$

Л е м м а 4. Пусть диаметр конечного элемента e равен h , а диаметр вписанной в него окружности — ρ . Тогда

$$\|v - i_h v\|_{L_2(e)} \leq c h^2 |v|_{H^2(e)}.$$

Если к тому же $\rho \geq c h$, то и

$$\|\nabla(v - i_h v)\|_{L_2(e)} \leq c h |v|_{H^2(e)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы вытекает из оценок (9) и (12).

З а м е ч а н и е 2. Утверждение леммы остается в силе и в том случае, если, например, одну из сторон треугольника надлежащим образом заменить гладкой кривой.

4. Аппроксимация и сходимость

Пусть π^h — триангуляция области Ω , т.е. $\bar{\Omega} = \bigcup_{e^{(i)} \in \pi^h} e^{(i)}$, причем диаметры всех конечных элементов $e^{(i)}$ ограничены сверху h :

$$\max_i h^{(i)} \leq h.$$

О п р е д е л е н и е 1. Триангуляция π^h называется *регулярной*, если для каждого конечного элемента $e^{(i)} \in \pi^h$

$$\rho^{(i)} \geq c h,$$

где c не зависит от триангуляции.

Т е о р е м а 1. Если триангуляция π^h полигональной области Ω регулярная, а функция $v(x, y) \in H^2(\Omega)$, то

$$\|v - i_h v\|_1 \leq c h |v|_2,$$

где c не зависит ни от триангуляции, ни от v .

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 4.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 является обобщением на двумерный случай теоремы 12.2.

В области Ω рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (13)$$

Вариационная формулировка этой задачи такова: найти

$$u \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (14)$$

где

$$a(u, v) := \iint_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v \, dx dy, \quad l(v) := \iint_{\Omega} f v \, dx dy. \quad (15)$$

Приближенным решением этой задачи будет функция

$$u^h \in \mathring{S}_1^h : a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \mathring{S}_1^h, \quad (16)$$

где S_1^h — введенное в лекции 8 пространство кусочно-линейных непрерывных функций на триангуляции π^h , а $\mathring{S}_1^h \subset H_0^1$ — его подпространство. В силу неравенства Фридрихса из упражнения 11.5 квадратичная форма $a(v, v)$ на $H_0^1(\Omega)$ положительно определена и, следовательно, является квадратом энергетической нормы, эквивалентной норме в $H^1(\Omega)$. В силу теоремы 11.2

$$\|u - u^h\|_1 \leq c \|u - i_h u\|_1, \quad (17)$$

и, следовательно, имеет место

Т е о р е м а 2. Если решение задачи (13) $u(x, y) \in H^2(\Omega)$, решение задачи (16) $u^h \in \mathring{S}_1^h$, а триангуляция π^h области Ω регулярная, то

$$\|u - u^h\|_1 \leq c h |u|_2,$$

где постоянная c не зависит ни от u , ни от триангуляции.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из неравенства (17) и теоремы 1.

З а м е ч а н и е 4. Условие $u(x, y) \in H^2(\Omega)$ для полигональных областей является довольно ограничительным. Известно, что если полигональная область выпукла, то это условие при $f(x, y) \in L_2(\Omega)$

заведомо выполняется, а если она таковой не является, то, вообще говоря, $u(x, y) \notin H^2(\Omega)$ даже при сколь угодно гладкой $f(x, y)$. В этом случае $u(x, y)$ принадлежит лишь пространству H^α дробного порядка $\alpha \in (1, 2)$, но мы здесь определение этих пространств не давали. Разумеется, для невыпуклых многоугольников теорема 2 неприменима. В этом случае для оценки скорости сходимости нужны новые оценки интерполяции с учетом меньшей гладкости интерполируемой функции (и меньшей точности). Отметим, что и для невыпуклых многоугольников возможна оценка точности $O(h)$, однако для этого нужно при решении использовать триангуляцию, специальным образом сгущающуюся к вершинам невыпуклых углов. Решение смешанной задачи из лекции 8 также, вообще говоря, H^2 не принадлежит.

5. Упражнения

1. Пусть Ω — полигональная область, а $u(x, y) \in H^2(\Omega)$ — решение задачи (13). Приближенное решение этой задачи определим как (16). Доказать, что

$$\|u - u^h\|_0 \leq c h^2 |u|_2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться доказательством теоремы 14.3.

2. Пусть Ω — полигональная область, а $u(x, y) \in H^3(\Omega)$ — решение задачи (13). Приближенное решение этой задачи определим как (16), но с заменой S_1^h на S_2^h — пространство кусочно-квадратичных непрерывных функций, введенных в п.1 лекции 10. Доказать, что

$$\|u - u^h\|_1 \leq c h^2 |u|_3, \quad \|u - u^h\|_{-1} \leq c h^4 |u|_3.$$

У к а з а н и е. Обобщить оценки (9) на случай $i_h v \in P_2(e)$. Воспользоваться доказательством теоремы 14.4.

Лекция 17

СХЕМЫ С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

До сих пор мы рассматривали МКЭ в галеркинском варианте, который, в частности, предполагает, что билинейная и линейная формы в исходной задаче и в конечноэлементной совпадают. Однако сохранение этого предположения делает рассмотренные нами МКЭ практически нереализуемыми, ибо для построения матрицы жесткости и вектора нагрузки нужно вычислять некоторые интегралы, которые в элементарных функциях могут не выражаться. Поэтому необходимо использование приближенного вычисления интегралов, а это сразу выводит нас за рамки метода Галеркина. В этом, вообще говоря, ничего страшного нет; просто теперь нужно еще уметь оценивать влияние приближенного интегрирования на точность получаемого приближенного решения. Целью настоящей лекции как раз и является выяснение этого вопроса. В частности, будут указаны условия, при выполнении которых точность конечноэлементного решения с использованием приближенного интегрирования не уменьшается по сравнению с соответствующим галеркинским вариантом.

1. Постановка задачи и всякая всячина

Рассмотрим (см. п. 1 лекции 11) задачу отыскания функции

$$u \in H : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \quad (1)$$

Раньше эту задачу мы решали приближенно при помощи МКЭ галеркинско-го типа. Именно, искали

$$u^h \in H^h \subset H : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \quad (2)$$

Теперь вместо приближенного решения u^h — решения задачи (2) — будем искать "возмущенное" приближенное решение

$$u_*^h \in H^h : \quad a_*(u_*^h, v^h) = l_*(v^h) \quad \forall v^h \in H^h. \quad (3)$$

Будем при этом предполагать, что билинейная форма $a_*(w^h, v^h)$ равномерно H^h -эллиптическая, т.е.

$$\exists \theta > 0, \theta \neq \theta(h), \quad \forall v^h \in H^h, \quad \theta \|v^h\|_H^2 \leq a_*(v^h, v^h). \quad (4)$$

Наша задача — оценить влияние возмущений форм $a(w^h, v^h)$ и $l(v^h)$, определяемых $a_*(w_*^h, v^h)$ и $l_*(v^h)$, на приближенное решение u^h .

При анализе простейших ситуаций полезна

Т е о р е м а 1. Пусть выполнено условие (4). Тогда для разности решений задач (2) и (3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u^h - u_*^h\|_H^2 \leq & \frac{1}{\theta} [|a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a(u^h, u^h - u_*^h)| + \\ & + |l_*(u^h - u_*^h) - l(u^h - u_*^h)|]. \end{aligned} \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (2) и (3), находим, что

$$\begin{aligned} a_*(u^h - u_*^h, u^h - u_*^h) &= a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a_*(u_*^h, u^h - u_*^h) = \\ &= a_*(u^h, u^h - u_*^h) - l_*(u^h - u_*^h) = \\ &= [a_*(u^h, u^h - u_*^h) - a(u^h, u^h - u_*^h)] - [l_*(u^h - u_*^h) - l(u^h - u_*^h)]. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание условие (4), приходим к (5). Теорема доказана.

Применим доказанную теорему для анализа МКЭ, в котором коэффициенты билинейной и линейной форм заменены их приближениями.

П р и м е р 1. Пусть

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \int_0^1 (p(x)w'v' + q(x)wv) dx = \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} (pw'v' + qwv) dx, \\ l(v) &= \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} f v dx, \\ a_*(w, v) &= \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} (p_* w'v' + q_* wv) dx, \quad l_*(v) = \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} f_* v dx \end{aligned} \quad (6)$$

и для коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и $p_*(x)$, $q_*(x)$ выполнены условия (11.16). Тогда условие (4) тоже выполнено. Используя неравенства Коши-Буняковского и Коши, находим, что

$$\begin{aligned} |a_*(w, v) - a(w, v)| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{e^{(i)}} [(p_*^{(i)} - p)w'v' + (q_*^{(i)} - q)wv] dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \max_{e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p| + |q_*^{(i)} - q|) \int_{e^{(i)}} (|w'v'| + |wv|) dx \leq \\ &\leq \max_i \max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)|) \|w\|_1 \|v\|_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично

$$|l_*(v) - l(v)| \leq \max_i \max_{x \in e^{(i)}} |f_*^{(i)} - f(x)| \|v\|_1. \quad (8)$$

Подставляя теперь оценки (7) и (8) при $w = u^h$ и $v = u^h - u_*^h$ в (5), будем иметь

$$\begin{aligned} \|u^h - u_*^h\|_1 &\leq \frac{1}{\theta} \left\{ \max_i \max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)|) \|u^h\|_1 + \right. \\ &\quad \left. + \max_i \max_{x \in e^{(i)}} |f_*^{(i)} - f(x)| \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из рассуждений типа использованных при доказательстве теоремы 14.1 вытекает, что для приближенного решения $u^h(x)$ справедлива априорная оценка (14.14), т.е. $\|u^h\|_1 \leq c \|f\|_0 = \text{const}$. Подставляя эту оценку в (9), находим, что

$$\|u^h - u_*^h\|_1 \leq c \max_i \max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)| + |f_*^{(i)} - f(x)|).$$

Пусть $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C^1[0, 1]$ и $g_*^{(i)}$ — интерполянт нулевой степени на $e^{(i)}$ функции $g(x)$. Тогда

$$\max_{x \in e^{(i)}} (|p_*^{(i)} - p(x)| + |q_*^{(i)} - q(x)| + |f_*^{(i)} - f(x)|) = O(h),$$

где $h = \max_i h^{(i)}$, и, следовательно,

$$\|u^h - u_*^h\|_1 = O(h).$$

Если $u^h \in S_1^h$, то в силу теоремы 12.3 $\|u - u^h\|_1 = O(h)$, а поэтому и

$$\|u - u_*^h\|_1 \leq \|u - u^h\|_1 + \|u^h - u_*^h\|_1 = O(h),$$

т.е. указанная аппроксимация коэффициентов p , q и f не уменьшает порядка скорости сходимости МКЭ в смысле нормы пространства H^1 .

З а м е ч а н и е 1. При такой аппроксимации коэффициентов скорость сходимости в L_2 и суперсходимость в узлах x_i для $u_*^h \in S_1^h$, вообще говоря, не сохраняется.

Если $a_*(w, v)$ и $l_*(v)$ строятся по $a(w, v)$ и $l(v)$ при помощи квадратурных формул, то для оценки точности u_*^h теорема 1 оказывается не столь полезной. Здесь нам потребуется более тонкая

Т е о р е м а 2 (лемма Стренга). *Если выполнено условие (4) и билинейная форма $a(w, v)$ непрерывна, т.е.*

$$\exists \theta > 0, \quad \forall w, v \in H, \quad |a(w, v)| \leq \frac{1}{\theta} \|w\|_H \|v\|_H, \quad (10)$$

то

$$\|u - u_*^h\|_H \leq c \left\{ \inf_{w^h \in H^h} \left[\|u - w^h\|_H + \sup_{v^h \in H^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_H} \right] + \sup_{v^h \in H^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_H} \right\}. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть w^h и v^h — произвольные элементы из пространства H^h . Тогда

$$\begin{aligned} a_*(u_*^h - w^h, v^h) &= a_*(u_*^h, v^h) - a_*(w^h, v^h) = \\ &= l_*(v^h) - a_*(w^h, v^h) - l(v^h) + a(u, v^h) - a(w^h, v^h) + a(w^h, v^h) = \\ &= a(u - w^h, v^h) + [a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)] + [l_*(v^h) - l(v^h)]. \end{aligned}$$

Полагая здесь $v^h = u_*^h - w^h$ и принимая во внимание (4) и (10), заключаем, что

$$\begin{aligned} \theta \|u_*^h - w^h\|_H &\leq \frac{1}{\theta} \|u - w^h\|_H + \\ &+ \frac{|a(w^h, u_*^h - w^h) - a_*(w^h, u_*^h - w^h)|}{\|u_*^h - w^h\|_H} + \frac{|l_*(u_*^h - w^h) - l(u_*^h - w^h)|}{\|u_*^h - w^h\|_H} \leq \\ &\leq \frac{1}{\theta} \|u - w^h\|_H + \sup_{v^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_H} + \sup_{v^h} \frac{|l_*(v^h) - l(v^h)|}{\|v^h\|_H}. \end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с неравенством

$$\|u - u_*^h\|_H \leq \|u - w^h\|_H + \|u_*^h - w^h\|_H$$

и беря нижнюю грань по $w^h \in H^h$, получим (11). Теорема доказана.

Для оценки влияния квадратурных формул, используемых при вычислении элементов матрицы жесткости и вектора нагрузки, на точность метода конечных элементов нам потребуются некоторые нормы, которые раньше в этом тексте не встречались. Именно, пусть

$$\|v\|_{L_p} := \left(\int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

есть норма банахова пространства $L_p(0, 1)$ функций, модуль которых суммируем с p -ой степенью. Эта норма является обобщением на случай $p \in [1, \infty)$ гильбертовой нормы $L_2(0, 1)$. Далее, пусть

$$\|v\|_{L_\infty} := \operatorname{vray} \max_{x \in [0, 1]} |v(x)| \equiv \operatorname{ess} \sup_{x \in [0, 1]} |v(x)| := \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L_p}.$$

Банахово пространство $L_\infty(0, 1)$ состоит из существенно ограниченных функций, т.е. из функций, которые либо сами ограничены, либо становятся таковыми после исправления на множестве меры нуль. Например, функция, изображенная на рис. 1, имеет L_∞ -норму равную 1, в то время как ее максимальное значение равно 2.

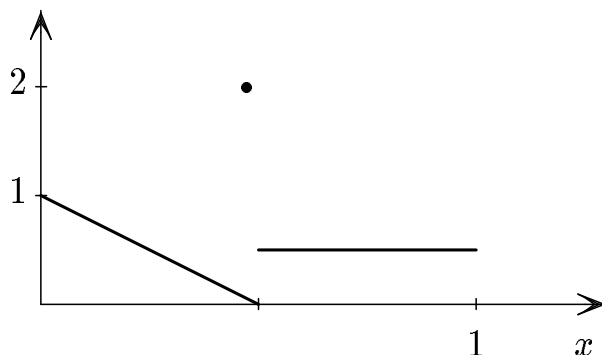


Рис. 1

Отметим, что если $v(x) \in C[0, 1]$, то $\|v\|_C = \|v\|_{L_\infty}$.
Наконец, пусть

$$\|v\|_{W_p^s} := \left(\sum_{l=0}^s \|v^{(l)}\|_{L_p}^p \right)^{1/p} \sim \sum_{l=0}^s \|v^{(l)}\|_{L_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

есть норма соболевского пространства $W_p^s(0, 1)$ функций, чьи l -е обобщенные производные до порядка s суммируемы с p -ой степенью. Известно, что при $p \leq q$ пространство W_q^s вкладывается в пространство W_p^s , и имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_p^s} \leq \|v\|_{W_q^s}, \quad p \leq q. \quad (12)$$

Если введенные нормы будут использоваться для измерения функций, заданных на множестве, отличном от единичного отрезка, то это множество будет указано в скобках рядом с идентификатором нормы, например, $W_p^s(e^{(i)})$.

Напомним, что оценить сверху некоторую норму функции через ее более слабую норму, вообще говоря, нельзя. Например, справедлива оценка (11.18) из леммы 11.1, а обратное неравенство невозможно. Однако, этот запрет снимается для конечномерных пространств. При этом постоянная в обратном неравенстве становится зависящей от размерности рассматриваемого конечномерного пространства. Частный случай таких оценок содержит

Л е м м а 1 (обратное неравенство). Пусть функция $v^h(x)$ такова, что $v^h|_{e^{(i)}} \in P_k(e^{(i)})$. Тогда для любых целых $l \leq m \leq k$

$$|v^h|_{H^m(e^{(i)})} \leq c \left(h^{(i)}\right)^{l-m} |v^h|_{H^l(e^{(i)})}, \quad (13)$$

где c — постоянная, не зависящая от $h^{(i)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{w}(t) = (\hat{v}(t))^{(l)}$, где $\hat{v}(t) \in \hat{P}_k$. В силу определения полунормы и конечномерности \hat{P}_k справедливы неравенства

$$|\hat{w}|_{m-l} \leq \|\hat{w}\|_{m-l} \leq c \|\hat{w}\|_0 = c|\hat{w}|_0.$$

Подставляя сюда представление $\hat{w}(t)$, будем иметь

$$|\hat{v}^{(l)}|_{m-l} = |\hat{v}|_m \leq c|\hat{v}^{(l)}|_0 = c|\hat{v}|_l. \quad (14)$$

Постоянная c здесь и выше зависит только от k . Сделаем замену переменной

$$t = (x - x_{i-1})/h^{(i)}. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что

$$\hat{v}(t) = \hat{v}\left(\frac{x - x_{i-1}}{h^{(i)}}\right) = v^h(x), \quad x \in e^{(i)},$$

приходим к тождеству

$$|\hat{v}|_j = \left(h^{(i)}\right)^{j-1/2} |v^h|_{H^j(e^{(i)})}, \quad j = 0, \dots, k. \quad (16)$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из неравенства (14). Лемма доказана.

При исследовании метода конечных элементов очень полезна следующая

Л е м м а 2 (Брэмбля-Гилберта). Пусть f — линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве $W_p^s(0, 1)$ и обращающийся в нуль на полиномах $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$. Тогда существует такая положительная постоянная c , зависящая только от функционала, что

$$|f(v)| \leq c|v|_{W_p^s} \quad \forall v \in W_p^s(0, 1).$$

Доказательство, чтобы не загромождать изложение, проведем при дополнительных предположениях, что $p \geq 2$ и f непрерывен и на H^s . В силу этого предположения при любой $v \in W_p^s(0, 1)$, $p \geq 2$, справедливо неравенство

$$|f(v)| \leq c \|v\|_s.$$

По предположению леммы для любого $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$

$$f(v + p) = f(v),$$

что вместе с предыдущим неравенством приводит к оценке

$$|f(v)| \leq c \|v + p\|_s,$$

а если принять во внимание лемму 13.11, то будем иметь

$$|f(v)| \leq c \widetilde{\|v + p\|_s}.$$

Выбирая теперь $p(x) \in P_{s-1}(0, 1)$ согласно лемме 13.12, найдем, что

$$|f(v)| \leq c |v|_s.$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из (12). Лемма доказана.

2. Использование квадратур

Пусть $\hat{g}(t)$ — непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$. Для приближенного вычисления $\int_0^1 \hat{g}(t) dt$ введем в рассмотрение квадратурную формулу

$$\hat{S}(\hat{g}) := \sum_{l=1}^L \hat{\omega}_l \hat{g}(t_l^*), \quad (17)$$

где $\hat{\omega}_l$ — веса квадратурной формулы, а t_l^* — узлы. Пусть эта квадратурная формула точна на полиномах m -ой степени, т.е.

$$\hat{E}(\hat{p}) := \int_0^1 \hat{p}(t) dt - \hat{S}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_m(0, 1). \quad (18)$$

Квадратурная формула $\hat{S}(\hat{g})$ индуцирует квадратурные формулы на конечных элементах $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$. Именно, делая замену переменной (15), получим

$$\begin{aligned} \int_{e^{(i)}} g(x) dx &= h^{(i)} \int_0^1 g(x_{i-1} + h^{(i)}t) dt = h^{(i)} \int_0^1 \hat{g}^{(i)}(t) dt \sim \\ &\sim h^{(i)} \hat{S}(\hat{g}^{(i)}) = \sum_{l=1}^L \omega_l^{(i)} g(x_{i-1} + h^{(i)}t_l^*) = \sum_{l=1}^L \omega_l^{(i)} g(x_l^{(i)}) = S^{(i)}(g). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\omega_l^{(i)} = h^{(i)} \hat{\omega}_l, \quad x_l^{(i)} = x_{i-1} + h^{(i)}t_l^*. \quad (20)$$

Положим

$$a_*(w, v) := \sum_{i=1}^N S^{(i)}(pw'v' + qwv), \quad l_*(v) := \sum_{i=1}^N S^{(i)}(fv). \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(w, v) - a_*(w, v) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{e^{(i)}} (pw'v' + qwv) dx - S^{(i)}(pw'v' + qwv) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ E^{(i)}(pw'v') + E^{(i)}(qwv) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$E^{(i)}(g) = \int_{e^{(i)}} g(x) dx - S^{(i)}(g), \quad (23)$$

а

$$l(v) - l_*(v) = \sum_{i=1}^N E^{(i)}(fv). \quad (24)$$

Тем самым, чтобы воспользоваться теоремой 2, нужно уметь оценивать $E^{(i)}$ из (23) от соответствующих аргументов.

Л е м м а 3. Пусть функции $v^h(x)$ и $w^h(x)$ таковы, что их сужения на конечный элемент $e^{(i)}$ суть полиномы степеней $k_1 = k'_1 + \bar{k}_1$ и $k_2 = k'_2 + \bar{k}_2$, соответственно, т.е.

$$v^h(x) \big|_{e^{(i)}} \in P_{k_1}(e^{(i)}), \quad w^h(x) \big|_{e^{(i)}} \in P_{k_2}(e^{(i)}), \quad (25)$$

а $a(x)$ — достаточно гладкая функция. Тогда, если квадратурная формула $\hat{S}(\hat{g})$ точна на многочленах степени $m \geq \bar{k}_1 + \bar{k}_2$

$$\hat{E}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}_m, \quad m \geq \bar{k}_1 + \bar{k}_2, \quad (26)$$

то

$$|E^{(i)}(aw^h v^h)| \leq c h^{m+1-\bar{k}_1-\bar{k}_2} \|a\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^{k'_2}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^{k'_1}(e^{(i)})}, \quad (27)$$

где k'_1 и \bar{k}_1 — неотрицательные целые числа, а постоянная c не зависит от h .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы Брэмбла-Гилберта

$$|\hat{E}(\hat{g})| \leq \hat{c} |\hat{g}|_{W_\infty^{m+1}}.$$

Пусть

$$\hat{g}(t) = \hat{a}(t)\hat{w}(t)\hat{v}(t), \quad \hat{v}(t) \in \hat{P}_{k_1}, \quad \hat{w}(t) \in \hat{P}_{k_2}. \quad (28)$$

Тогда на основании формулы Лейбница и в силу конечномерности \hat{P}_{k_1} и \hat{P}_{k_2}

$$\begin{aligned} |\hat{E}(\hat{g})| &\leq \hat{c} |\hat{g}|_{W_\infty^{m+1}} \leq \hat{c} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} |\hat{w}|_{W_\infty^l} |\hat{v}|_{W_\infty^{j-l}} \\ &\leq \hat{c} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} |\hat{w}|_l |\hat{v}|_{j-l}. \end{aligned} \quad (29)$$

Сделаем замену переменной (15). Очевидно, что

$$|\hat{a}|_{W_\infty^{m+1-j}} = (h^{(i)})^{m+1-j} |a|_{W_\infty^{m+1-j}(e^{(i)})}.$$

Принимая во внимание это соотношение и соотношения (16), из (29) с учетом (28) находим, что

$$\begin{aligned} & | E^{(i)}(aw^h v^h) | = h^{(i)} | \hat{E}(\hat{a}\hat{w}\hat{v}) | \leq \\ & \leq c (h^{(i)})^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{l=0}^j |a|_{W_\infty^{m+1-j}(e^{(i)})} |w^h|_{H^l(e^{(i)})} |v^h|_{H^{j-l}(e^{(i)})} \leq \\ & \leq c (h^{(i)})^{m+1} \|a\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^{k_2}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^{k_1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Но в силу обратного неравенства (13)

$$\| \cdot \|_{H^{k_j}(e^{(i)})} \leq c (h^{(i)})^{-\bar{k}_j} \| \cdot \|_{H^{k'_j}(e^{(i)})}, \quad j = 1, 2.$$

Комбинируя это неравенство с предыдущей оценкой, получим (27). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Путем усложнения доказательства оценка (27) леммы 3 может быть усилена за счет ослабления требования к гладкости функции $a(x)$.

Теорема 2, дающая оценку точности возмущенной задачи, содержит условие (4) — условие H^h -эллиптичности возмущенной квадратичной формы. Выяснить ограничения, накладываемые на квадратурную формулу для выполнения этого условия, нам поможет

Л е м м а 4. Пусть A и B — симметричные неотрицательные матрицы с совпадающими ядрами. Тогда отвечающие им квадратичные формы эквивалентны, т.е. существует постоянная $\delta > 0$, что

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \delta \mathbf{x}^T B \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \delta^{-1} \mathbf{x}^T B \mathbf{x}, \quad \delta > 0. \quad (30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{Z} = \ker A = \ker B$, $p = \dim \mathbb{Z} < n$ и $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Y}$. Поскольку $Az = Bz = 0$ при $z \in \mathbb{Z}$, а $A\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \ni B\mathbf{y}$ при $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$, то для любого $\mathbf{x} = z + \mathbf{y}$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{y}^T B \mathbf{y}. \quad (31)$$

Обозначим через λ_{p+1} минимальное отличное от нуля собственное значение матрицы A , а через λ_n — ее максимальное собственное значение.

Для матрицы B аналогичную роль играют числа μ_{p+1} и μ_n . Очевидно, что

$$\begin{aligned}\lambda_{p+1}\|\mathbf{y}\|^2 &\leq \mathbf{y}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_n \|\mathbf{y}\|^2, \\ \mu_{p+1}\|\mathbf{y}\|^2 &\leq \mathbf{y}^T B \mathbf{y} \leq \mu_n \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\lambda_{p+1}}{\mu_n} \mathbf{y}^T B \mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{y} \leq \frac{\lambda_n}{\mu_{p+1}} \mathbf{y}^T B \mathbf{y}.$$

Отсюда и из (31) приходим к (30) с $\delta = \min\{\lambda_{p+1}/\mu_n, \mu_{p+1}/\lambda_n\}$. Лемма доказана.

Л е м м а 5. Пусть $v^h \in S_k^h$, и для $\int_0^1 \hat{g}(t) dt$ задана квадратурная формула (17) с положительными весами $\omega_l > 0$. Тогда для справедливости неравенства

$$c |v^h|_1^2 \leq \sum_{i=1}^N S^{(i)} (|dv^h/dx|^2) \leq c^{-1} |v^h|_1^2, \quad c \neq c(h), \quad (32)$$

достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1° число узлов квадратурной формулы $L \geq k$,

2° квадратурная формула \hat{S} точна на $\hat{P}_{2(k-1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (19) доказываемая оценка (32) эквивалентна неравенству

$$c |\hat{v}|_1^2 \leq \hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) \leq c^{-1} |\hat{v}|_1^2 \quad \hat{v} \in \hat{P}_k. \quad (33)$$

Поскольку $(d\hat{v}/dt)^2 \in \hat{P}_{2(k-1)}$, то при выполнении условия 2°

$$|\hat{v}|_1^2 = \hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2)$$

и неравенства (32) имеют место с $c = 1$.

Пусть выполнено условие 1°. Обозначим через $\Phi = [\hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2 \dots \hat{\varphi}_{k+1}]$ матрицу функций формы базисного элемента $\hat{e} = [0, 1]$, а через

$$\hat{v} = [\hat{v}_1 \hat{v}_2 \dots \hat{v}_{k+1}]^T$$

— его вектор узловых значений. Тогда $\hat{v}(t) = \hat{\Phi} \hat{v}$ и

$$|\hat{v}|_1^2 = \int_0^1 |d\hat{\Phi}/dt \hat{v}|^2 dt = \hat{v}^T \hat{K} \hat{v},$$

где

$$\hat{K} = [\hat{k}_{ij}], \quad \hat{k}_{ij} = \int_0^1 d\hat{\varphi}_i/dt d\hat{\varphi}_j/dt dt.$$

Аналогично находим, что

$$\hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) = \hat{v}^T \hat{K}_* \hat{v},$$

где

$$\hat{K}_* = [\hat{k}_{*ij}], \quad \hat{k}_{*ij} = \hat{S}(d\hat{\varphi}_i/dt d\hat{\varphi}_j/dt).$$

Покажем, что ядра этих матриц совпадают. Очевидно, что, если $|\hat{v}|_1 = 0$, то $\hat{v}(t) = \text{const}$, т.е.

$$\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = \dots = \hat{v}_{k+1}. \quad (34)$$

С другой стороны, в силу положительности весов квадратурной формулы равенство $\hat{S}(|d\hat{v}/dt|^2) = 0$ возможно лишь тогда, когда неотрицательная функция $(d\hat{v}/dt)^2$ обращается в нуль во всех узлах квадратурной формулы, т.е.

$$|d\hat{v}/dt| \Big|_{t=t_l^*} = 0, \quad l = 1, \dots, L.$$

Поскольку $d\hat{v}/dt \in \hat{P}_{k-1}$, а $L \geq k$, то эти соотношения могут иметь место только для тождественно нулевой функции $d\hat{v}/dt \equiv 0$, $0 \leq t \leq 1$. Поэтому $\hat{v}(t) \equiv \text{const}$ и $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = \dots = \hat{v}_{k+1}$, что совпадает с (34).

Итак, ядра \hat{K} и \hat{K}_* совпадают. Собственные числа матрицы \hat{K} зависят только от выбранных функций формы и не зависят от разбиения отрезка $[0, 1]$ на конечные элементы. Собственные числа матрицы \hat{K}_* зависят еще от квадратурной формулы \hat{S} , но также не зависят от элементов $e^{(i)}$. Эти рассуждения вместе с леммой 4 приводят к (33), а, следовательно, и к (32). Лемма доказана.

Л е м м а 6. Пусть $v^h \in \tilde{S}_k^h$ из (12.17), билинейная форма $a_*(w^h, v^h)$ задается соотношением (21), а квадратурная формула \hat{S} подчинена условиям леммы 5. Тогда, если для коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ выполнены условия (11.16), то

$$a_*(v^h, v^h) \geq c \|v^h\|_1^2, \quad c \neq c(h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку весовые коэффициенты квадратурной формулы предполагаются положительными, то в силу (11.16) из (17) следует, что

$$a_*(v^h, v^h) \geq c_0 \sum_{i=1}^N S^{(i)}(|dv^h/dx|^2),$$

а применение леммы 5 приводит к оценке

$$a_*(v^h, v^h) \geq c_0 c \|v^h\|_1^2.$$

В силу леммы 11.2 при $v \in \tilde{H}^1(0, 1)$ справедлива оценка $|v|_1 \geq \|v\|_0$. Поскольку $\tilde{S}_k^h \subset \tilde{H}^1(0, 1)$, а $v^h \in \tilde{S}_k^h$, то окончательно

$$a_*(v^h, v^h) \geq \frac{c_0 c}{2} \|v^h\|_1^2, \quad v^h \in \tilde{S}_k^h.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть квадратурная формула имеет положительные коэффициенты, является точной на многочленах из \hat{P}_m , $m \geq k - 1$, и число ее узлов $L \geq k$. Тогда, если $u(x)$ — решение задачи (1), (6), (11.15), и выполнены условия (11.16), (11.17), а u_*^h — решение задачи (3), (21) при $H^h = \tilde{S}_k^h$, то

$$\begin{aligned} & \|u - u_*^h\|_1 \leq \\ & \leq c \left\{ h^k |u|_{k+1} + h^{m-k+2} \left[(\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}}) \|u\|_{k+1} + \|f\|_{W_\infty^{m+1}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. В рассматриваемой ситуации лемма 6 имеет место, и, следовательно, предположения (4) теоремы 2 выполнены. В силу этой теоремы справедлива оценка

$$\|u - u_*^h\|_1 \leq c \left\{ \inf_{w^h \in \tilde{S}_k^h} \left[\|u - w^h\|_1 + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)|}{\|v^h\|_1} \right] + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_1} \right\}.$$

Положим здесь $w^h = i_{h,k}u$ и воспользуемся теоремой 12.4, в силу которой

$$\|u - i_{h,k}u\|_1 \leq c h^k |u_{k+1}|.$$

Будем иметь

$$\|u - u_*^h\|_1 \leq c \left\{ h^k |u_{k+1}| + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|a(i_{h,k}u, v^h) - a_*(i_{h,k}u, v^h)|}{\|v^h\|_1} + \sup_{v^h \in \tilde{S}_k^h} \frac{|l(v^h) - l_*(v^h)|}{\|v^h\|_1} \right\}. \quad (35)$$

Далее, поскольку

$$|a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h)| = \left| \sum_{i=1}^N \left[E^{(i)} \left(p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} \right) + E^{(i)}(qw^h v^h) \right] \right|, \quad (36)$$

то следует воспользоваться леммой 3, да не один раз. Заменяем сначала в лемме 3 функцию v^h на dv^h/dx , а w^h на dw^h/dx и положим $a(x) = p(x)$. Это будет означать, что $k_1 = k_2 = k - 1$. Положим теперь $k'_1 = 0$, а $k'_2 = k - 1$, т.е. $\bar{k}_1 = k - 1$, $\bar{k}_2 = 0$. Тогда неравенство (27) леммы 3 примет вид

$$\left| E^{(i)} \left(p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} \right) \right| \leq c h^{m-k+2} \|p\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Если же в лемме 3 функции w^h и v^h оставить на месте и положить $a(x) = q(x)$, то $k_1 = k_2 = k$. Пусть, кроме того, $k'_1 = 1$, а $k'_2 = k$, т.е. $\bar{k}_1 = k - 1$, $\bar{k}_2 = 0$. В этом случае будем иметь

$$| E^{(i)}(qw^h v^h) | \leq c h^{m-k+2} \|q\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Отсюда и из предшествующего неравенства находим, что

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)} \left(p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} + qw^h v^h \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{m-k+2} \left(\|p\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \right) \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Эти оценки подставим в (36) и к результату подстановки применим неравенство Коши, в результате чего будем иметь

$$\begin{aligned} & | a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h) | \leq \sum_{i=1}^N \left| E^{(i)} \left(p \frac{dw^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} + qw^h v^h \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{m-k+2} \left(\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}} \right) \sqrt{\sum_{i=1}^N \|w^h\|_{H^k(e^{(i)})}^2} \|v^h\|_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим $\|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})}$. В силу неравенства треугольника и оценок (12.23)

$$\begin{aligned} & \|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})} \leq \|u\|_{H^k(e^{(i)})} + \|u - i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})} \leq \\ & \leq \|u\|_{H^k(e^{(i)})} + ch \|u\|_{H^{k+1}(e^{(i)})} \leq c \|u\|_{H^{k+1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Полагая в (37) $w^h = i_{h,k}u$ и используя эту оценку, будем иметь

$$\begin{aligned} & | a(i_{h,k}u, v^h) - a_*(i_{h,k}u, v^h) | \leq \\ & \leq c h^{m-k+2} \left(\|p\|_{W_\infty^{m+1}} + \|q\|_{W_\infty^{m+1}} \right) \|u\|_{k+1} \|v^h\|_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Обратимся к последнему слагаемому правой части (35)

$$l(v^h) - l_*(v^h) = \sum_{i=1}^N E^{(i)}(fv^h). \quad (39)$$

Снова воспользуемся леммой 3 теперь при $a(x) = f(x)$, $w^h = 1$ и v^h . Тогда $k_1 = k$, $k_2 = k'_2 = \bar{k}_2 = 0$. Положим $k'_1 = 1$, т.е. $\bar{k}_1 = k - 1$. При указанных значениях параметров из (27) следует, что

$$| E^{(i)}(fv^h) | \leq c h^{m-k+2} \|f\|_{W_\infty^{m+1}(e^{(i)})} \|v^h\|_{H^1(e^{(i)})}.$$

Отсюда и из (39) с использованием неравенства Коши получаем оценку

$$| l(v^h) - l_*(v^h) | \leq c h^{m-k+2} \|f\|_{W_\infty^{m+1}} \|v^h\|_1.$$

Комбинируя (38) и это неравенство с (36), получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из теорем 3 и 12.5 следует, что порядок точности в норме пространства H^1 приближенного решения u_*^h не уменьшается по сравнению с u^h , если используемые квадратурные формулы будут точны на многочленах степени $m \geq 2(k-1)$. Отметим, что при таких m главный член билинейной формы

$$\int_0^1 p(x) \frac{du^h}{dx} \frac{dv^h}{dx} dx$$

будет вычисляться точно, если $u^h, v^h \in S_k^h$, а $p \equiv \text{const}$.

З а м е ч а н и е 4. Требования к гладкости коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и правой части $f(x)$ могут быть снижены, если принять во внимание замечание 2.

3. Оценки в слабых нормах

В четырнадцатой лекции было показано (теоремы 14.3 и 14.4), что в слабых нормах ($\|\cdot\|_{-s}$) точность приближенного решения $u^h \in S_k^h$ повышается до $O(h^{k+s+1})$, $s \leq k-1$. Интересно выяснить, сохраняются ли эти оценки для u_*^h , и, если сохраняются, при каких ограничениях на квадратурную формулу \hat{S} . Чтобы выяснить это, нам потребуется утверждение, в некотором смысле аналогичное теореме 2.

Пусть w — решение следующей задачи:

$$w \in H : \quad a(v, w) = l_\varphi(v) \quad \forall v \in H. \quad (40)$$

Обозначим через W' пространство, сопряженное к $W \subset L_2(0, 1)$.

Т е о р е м а 4. Если u , u_*^h и w — решения задач (1), (3) и (40), соответственно, то

$$\|u - u_*^h\|_{W'} = \sup_{\varphi \in W} \frac{1}{\|\varphi\|_W} \inf_{v^h \in H^h} \{a(u - u_*^h, w - v^h) - [a(u_*^h, v^h) - a_*(u_*^h, v^h)] + [l(v^h) - l_*(v^h)]\}. \quad (41)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (40)

$$\begin{aligned} l_\varphi(u - u_*^h) &= a(u - u_*^h, w) = a(u - u_*^h, w - v^h) + a(u - u_*^h, v^h) = \\ &= a(u - u_*^h, w - v^h) + a(u, v^h) - a(u_*^h, v^h) + a_*(u_*^h, v^h) - l_*(v^h) = \\ &= a(u - u_*^h, w - v^h) + [a_*(u_*^h, v^h) - a(u_*^h, v^h)] + [l(v^h) - l_*(v^h)]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|u - u_*^h\|_{W'} = \sup_{\varphi \in W} \frac{(\varphi, u - u_*^h)}{\|\varphi\|_W} = \sup_{\varphi \in W} \frac{l_\varphi(u - u_*^h)}{\|\varphi\|_W},$$

то, подставляя сюда найденное представление $l_\varphi(u - u_*^h)$ и принимая во внимание, что $v^h \in H^h$ — любая, получим (41). Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Если квадратурная формула (17) точна на $\hat{P}_{2(k-1)}$, и выполнены условия теоремы 3, то

$$\|u - u_*^h\|_{-s} = O(h^{s+k+1}), \quad s = 0, 1, \dots, k-2. \quad (42)$$

Если, к тому же, $\hat{E}(\hat{p}) = 0 \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}_{2k-1}$, то дополнительно

$$\|u - u_*^h\|_{-k+1} = O(h^{2k}), \quad (s = k-1). \quad (43)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для сокращения записи введем обозначения

$$a(w^h, v^h) - a_*(w^h, v^h) = (a - a_*)(w^h, v^h), \quad l(v^h) - l_*(v^h) = (l - l_*)(w^h, v^h).$$

Пусть в (40) $a(w, v)$ и $l(v)$ задаются соотношениями (6), а $H = H_0^1$. Тогда из (41) следует, что

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} &\leq c \sup_{\varphi \in H_0^s} \frac{1}{\|\varphi\|_s} \inf_{v^h \in S_{k,0}^h} [\|u - u_*^h\|_1 \|w - v^h\|_1 + \\ &+ |(a - a_*)(u_*^h, v^h)| + |(l - l_*)(v^h)|]. \end{aligned}$$

Полагая здесь $v^h = i_{h,s+1}w$ с $s+1 \leq k$ и применяя теорему 3 о сходимости при $m = 2(k-1)$ и теорему 12.4 об оценке интерполяции, будем иметь

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} &\leq c \sup_{\varphi \in H_0^s} \frac{1}{\|\varphi\|_s} [h^k (\|u\|_{k+1} + \|f\|_{W_\infty^{2k-1}}) h^{s+1} \|w\|_{s+2} + \\ &+ |(a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w)| + |(l - l_*)(i_{h,s+1}w)|]. \end{aligned}$$

В силу теоремы 14.2 справедливы априорные оценки

$$\|w\|_{s+2} \leq c \|\varphi\|_s \quad \text{и} \quad \|u\|_{k+1} \leq c \|f\|_{k-1} \quad (44)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|u - u_*^h\|_{-s} &\leq c [h^{s+k+1} \|f\|_{W_\infty^{2k-1}} + \\ &+ \frac{|(a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w)|}{\|\varphi\|_s} + \frac{|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)|}{\|\varphi\|_s}]. \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь оценим влияние квадратур. Начнем с младшего члена. В силу леммы 3 при $m = k + s \leq 2(k-1)$, $k_1 = k'_1 = s+1$, $k_2 = k'_2 = 0$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$ и $w^h \equiv 1$ с $\|w^h\|_{L_2(e^{(i)})} = \sqrt{h^{(i)}}$ имеем

$$\left| E^{(i)}(f i_{h,s+1}w) \right| \leq c h^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})} \sqrt{h^{(i)}} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}. \quad (46)$$

Поэтому с учетом неравенства Коши находим, что

$$\begin{aligned} |(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| &= \left| \sum_{i=1}^N E^{(i)}(f i_{h,s+1}w) \right| \leq \\ &\leq c h^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \sum_{i=1}^N (h^{(i)})^{1/2} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq \\ &\leq c h^{k+s+1} \|f\|_{W_\infty^{k+s+1}} \left(\sum_{i=1}^N (\|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}^2) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для оценки норм, стоящих под знаком суммы, воспользуемся неравенством треугольника и оценкой (12.23) при $k = l = s + 1$

$$\begin{aligned} \|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} &\leq \|i_{h,s+1}w - w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} + \|w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq \\ &\leq ch\|w\|_{H^{s+2}(e^{(i)})} + \|w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \leq c\|w\|_{H^{s+2}(e^{(i)})}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляя эту оценку в правую часть предыдущего неравенства, найдем, что

$$|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| \leq ch^{k+s+1}\|f\|_{W_\infty^{k+s+1}}\|w\|_{s+2},$$

а принимая во внимание первую из оценок (42), будем иметь

$$|(l - l_*)(i_{h,s+1}w)| \leq ch^{k+s+1}\|f\|_{W_\infty^{k+s+1}}\|\varphi\|_s. \quad (48)$$

Требуемая оценка последнего слагаемого правой части (45) найдена.

Обратимся к оценке второго слагаемого правой части (45). Здесь рассуждения нужно несколько видоизменить по сравнению с рассуждениями, использованным только что. Если этого не сделать, то мы зайдем в тупик: появляющаяся в процессе оценок величина $\|u_*^h\|_{H^k(e^{(i)})}$ при $k > 1$ через известные величины разумным способом оценена быть не может. Поэтому функцию u_*^h , фигурирующую в (45), нужно заменить на $i_{h,k}u$, т.е. сначала воспользоваться оценкой

$$\begin{aligned} |(a - a_*)(u_*^h, i_{h,s+1}w)| &\leq |(a - a_*)(i_{h,k}u, i_{h,s+1}w)| + \\ &+ |(a - a_*)(u_*^h - i_{h,k}u, i_{h,s+1}w)|. \end{aligned} \quad (49)$$

При оценке правой части (49) теперь уже снова можно пользоваться леммой 3, ибо $\|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})}$ оценивать мы умеем (см. (45)), а $(u_*^h - i_{h,k}u)$ достаточно оценить в $H^1(e^{(i)})$, так как мала сама эта функция.

Итак, по лемме 3 при $k_1 = k'_1 = k$, $k_2 = k'_2 = s + 1$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$ и

$$m = k + s \leq 2(k - 1), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \left| E^{(i)}(q i_{h,k}u i_{h,s+1}w) \right| &\leq \\ &\leq ch^{k+s+1}\|q\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})}\|i_{h,k}u\|_{H^k(e^{(i)})}\|i_{h,s+1}w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}, \end{aligned}$$

а при $k_1 = k'_1 = k - 1$, $k_2 = k'_2 = s$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$ и том же $m = k + s$

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)} \left(p \frac{d i_{h,k} u}{dx} \frac{d i_{h,s+1} w}{dx} \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} \|p\|_{W_\infty^{k+s+1}(e^{(i)})} \|i_{h,k} u\|_{H^k(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}. \end{aligned}$$

Отсюда, как и из (46) находим, что

$$\begin{aligned} & | (a - a_*) (i_{h,k} u, i_{h,s+1} w) | \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s+1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s+1}}) \|f\|_{k-1} \|\varphi\|_s. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее, снова в силу леммы 3 при $m = k + s - 1$, $k_1 = k$, $k'_1 = 1$, $k_2 = k'_2 = s + 1$, $\bar{k}_1 = k - 1$, $\bar{k}_2 = 0$

$$\begin{aligned} & | E^{(i)} (q (u_*^h - i_{h,k} u) i_{h,s+1} w) | \leq \\ & \leq c h^{s+1} \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}(e^{(i)})} \|u_*^h - i_{h,k} u\|_{H^1(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})}, \end{aligned}$$

а при $m = k + s - 1$, $k_1 = k - 1$, $k'_1 = 0$, $k_2 = k'_2 = s$, $\bar{k}_1 = k - 1$, $\bar{k}_2 = 0$

$$\begin{aligned} & \left| E^{(i)} \left(p \frac{d}{dx} (u_*^h - i_{h,k} u) \frac{d}{dx} i_{h,s+1} w \right) \right| \leq \\ & \leq c h^{s+1} \|p\|_{W_\infty^{k+s-1}(e^{(i)})} \|u_*^h - i_{h,k} u\|_{H^1(e^{(i)})} \|i_{h,s+1} w\|_{H^{s+1}(e^{(i)})} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & | (a - a_*) (u_*^h - i_{h,k} u, i_{h,s+1} w) | \leq \\ & \leq c h^{s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s-1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}}) \|u_*^h - i_{h,k} u\|_1 \|\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Используя теперь неравенство треугольника, теорему 3 о сходимости и теорему 12.4 об оценке интерполяции, найдем, что

$$\|u_*^h - i_{h,k} u\|_1 \leq \|u_*^h - u\|_1 + \|u - i_{h,k} u\|_1 \leq c h^k \|u\|_{k+1}.$$

Комбинируя эту оценку с предыдущим неравенством, будем иметь

$$\begin{aligned} & | (a - a_*) (u_*^h - i_{h,k} u, i_{h,s+1} w) | \leq \\ & \leq c h^{k+s+1} (\|p\|_{W_\infty^{k+s-1}} + \|q\|_{W_\infty^{k+s-1}}) \|u\|_{k+1} \|\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Мы получили все предварительные оценки. Подставляя эту оценку и оценку (51) в (49), а результат подстановки и оценку (48) в (45), с учетом (50) получим (42). Утверждение (43) вытекает из предшествующего утверждения, если на точность используемых квадратурных формул вместо (50) наложить более жесткое ограничение

$$k + s = m \leq 2k - 1.$$

Теорема доказана.

4. Примеры квадратурных формул и квадратурных схем

Из теоремы 3, замечания 3 и теоремы 4 следует, что для сохранения всех свойств сходимости квадратурные схемы МКЭ должны использовать квадратуры, точные на многочленах степени $m = 2k - 1$, где k — степень многочленов конечноэлементного пространства. Таким свойством обладают квадратурные формулы Гаусса, имеющие k узлов. Приведем несколько квадратурных формул Гаусса для отрезка $[0, 1]$

$$\begin{aligned} k = 1 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \hat{g}(1/2); \\ k = 2 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \frac{1}{2} \left[\hat{g} \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) + \hat{g} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \right]; \\ k = 3 : \quad \hat{S}(\hat{g}) &= \frac{5}{18} \hat{g} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{9} \hat{g} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{5}{18} \hat{g} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Помимо формул Гаусса заслуживают внимание формула трапеций, точная на линейных функциях

$$\hat{S}(\hat{g}) = \frac{1}{2} [\hat{g}(0) + \hat{g}(1)]. \quad (53)$$

Воспользуемся квадратурными формулами (52), (53) для построения вектора нагрузки и матриц жесткости и массы линейного элемента. Линейные конечные элементы используются при отыскании приближенного из S_1^h решения уравнения (1.1). Матрица функций формы в этом случае задается соотношением (4.8), а сами функции формы — соотношением (4.6). В (4.6) предполагается, что все элементы имеют одинаковую длину, равную h . Если длины конечных элементов различны и

суть $h^{(i)}$, то делители h в формуле (4.6) нужно заменить на $h^{(i)}$. Вектор нагрузки определяется соотношением (6.25), а матрицы жесткости и массы — соотношениями (6.16) и (6.20), соответственно. Согласно замечанию 3 и теореме 4 в рассматриваемом случае $u^h \in S_1^h$, при построении квадратурных схем МКЭ достаточно использовать первую из формул (52) или формулу (53), которые точны на линейных функциях. Использование второй и третьей формул (52) приводит к более высокой точности при вычислении интегралов, но это никак не сказывается на точности приближенного решения $u_*^h \in S_1^h$, ибо сам факт принадлежности приближенного решения S_1^h ограничивает его точность по отношению к точному решению $u(x)$, например, в норме L_2 величиной $O(h^2)$.

Будем снабжать обозначения вектора нагрузки и матриц жесткости и массы, вычисленных при помощи формул (52) дополнительным значком звездочка, а величины, вычисленные при помощи (53) — две звездочки. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_*^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} f_{i-1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & K_*^{(i)} &= \frac{p_{i-1/2}}{h^{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_*^{(i)} &= \frac{h^{(i)} q_{i-1/2}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{**}^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{bmatrix}, & K_{**}^{(i)} &= \frac{p_{i-1} + p_i}{2h^{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ M_{**}^{(i)} &= \frac{h^{(i)}}{2} \begin{bmatrix} q_{i-1} & 0 \\ 0 & q_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

Соответствующие разностные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
& p_{i-1/2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} - p_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} + \\
& + \frac{1}{2} \left(h^{(i)} q_{i-1/2} \frac{u_{i-1}^h + u_i^h}{2} + h^{(i+1)} q_{i+1/2} \frac{u_i^h + u_{i+1}^h}{2} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \left(h^{(i)} f_{i-1/2} + h^{(i+1)} f_{i+1/2} \right), \\
& \frac{p_{i-1} + p_i}{2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} - \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} + \frac{h^{(i)} + h^{(i+1)}}{2} q_i u_i^h = \\
& = \frac{h^{(i)} + h^{(i+1)}}{2} f_i.
\end{aligned}$$

Если матрицу жесткости элемента взять из (54), а матрицу массы и вектор нагрузки из (55), то получим широко известную разностную схему

$$-\frac{2}{h^{(i)} + h^{(i+1)}} \left[p_{i+1/2} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h^{(i+1)}} - p_{i-1/2} \frac{u_i^h - u_{i-1}^h}{h^{(i)}} \right] + q_i u_i^h = f_i.$$

С точки зрения теории разностных схем все эти схемы имеют второй порядок точности в смысле сеточной нормы L_∞^h ($\|v\|_{L_\infty^h} := \max_i |v_i|$) (ср. с теоремой 15.1).

5. Замечания о квадратурных схемах в $2D$

Ясно, что поводов для использования квадратур при построении схем МКЭ в двумерном случае еще больше, чем в одномерном. Теоретическая основа их использования лежит в утверждениях, аналогичных леммам 3 и 5. Мы не будем их доказывать и даже не будем формулировать в общем виде. Отметим лишь, что при использовании треугольных конечных элементов k -ой степени условие H -эллиптичности (4) (или аналог леммы 5), обеспечивающее разрешимость сеточной задачи, будет выполнено, если квадратурная формула имеет положительные коэффициенты и точна на всех многочленах до $2(k-1)$ степени (как и в одномерном случае). Что касается скорости сходимости такой квадратурной схемы МКЭ, то ее точность в H^1 не ухудшается по сравнению с

галеркинской схемой, если используемые квадратурные формулы, как и в одномерном случае, точны на многочленах степени $2k - 2$. Для того, чтобы сохранить скорость сходимости и в H^{-k+1} , точность квадратурных формул нужно повысить на единицу до $2k - 1$.

Приведем несколько квадратурных формул на треугольнике e , которые можно использовать при построении схем МКЭ.

1°. Одноточечная квадратурная формула с узлом в центре тяжести треугольника. Барицентрические координаты центра тяжести суть

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1/3,$$

а весовой коэффициент

$$\omega = \text{mes } e.$$

Эта формула точна на многочленах первой степени и может быть использована вместе с конечноэлементным пространством S_1^h из восьмой лекции.

2°. Трехточечная квадратурная формула с узлами в вершинах треугольника, координаты которых определяются соотношениями

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = 1, \quad \zeta_3 = 1,$$

и одинаковыми весовыми коэффициентами

$$\omega = \text{mes } e/3.$$

Эта формула также точна на $P_1(e)$.

3°. Семиточечная квадратурная формула, шесть узлов которой совпадают с узлами квадратичного элемента из лекции 10, а седьмой расположен в центре тяжести. Вершинам, серединам сторон и центру тяжести, соответственно, отвечают весовые коэффициенты

$$\omega = \text{mes } e/20, \quad \omega = 2 \text{ mes } e/5, \quad \omega = 9 \text{ mes } e/20.$$

Эта формула точна на многочленах третьей степени и может быть использована вместе с конечноэлементным пространством S_2^h .

Существуют и более простые в некотором смысле формулы, точные на $P_3(e)$. Известна четырехточечная формула, обладающая этим свойством, но один из ее весовых коэффициентов отрицателен, и поэтому ее

использование при построении схем МКЭ нежелательно. У аналогичной шеститочечной формулы узлы расположены не так удобно, как у семиточечной (три в серединах сторон и три внутри).

Другие квадратурные формулы, точные на многочленах более высокой степени, можно найти, например, в [3], [12].

Скажем несколько слов о квадратурных формулах для прямоугольных элементов. Обратим внимание только на две формулы: одноточечную формулу с узлом в центре прямоугольника, которую можно трактовать как произведение одномерных формул прямоугольников, и четырехточечную формулу с узлами в вершинах, трактуемую как произведение формул трапеций. Обе эти формулы точны на билинейных функциях, а, следовательно, и на линейных. Применим их для вычисления отвечающей оператору Лапласа матрицы жесткости (10.9) билинейного элемента. Поскольку в (10.9) под интегралом стоят квадратичные функции, то найденные с использованием этих квадратурных формул матрицы жесткости будут отличаться от точной матрицы (10.10), равно как и получаемые разностные аппроксимации оператора Лапласа будут отличаться от (10.11). Аппроксимационные же свойства метода нарушаться не должны.

Вычисления показывают, что при использовании одноточечной квадратурной формулы для приближенного вычисления (10.9) вместо (10.10) мы получим

$$K_*^{(i,j)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

а при использовании четырехточечной формулы —

$$K_{**}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Легко видеть, что эти матрицы совсем не похожи ни между собой, ни на точную матрицу (10.10), в то время как порождаемые ими разностные

аппроксимации оператора Лапласа близки к (10.11). В самом деле, для односточечной формулы это

$$\left(u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} + \frac{h^2}{2} u_{\bar{x}x\bar{y}y} \right)_{ij}, \quad (58)$$

а для четырехточечной —

$$(u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y})_{ij}. \quad (59)$$

С точки зрения теории разностных схем все эти аппроксимации, включая (10.11), имеют погрешность $O(h^2)$, а (59) даже совпадает с аппроксимацией из (9.8), порожденной матрицей жесткости (9.1) треугольного линейного элемента. В теории разностных схем аппроксимация (58) считается плохой. Плохой она является и с нашей точки зрения, ибо порождающая ее матрица (56) имеет ранг, равный единице, в то время как ранг точной матрицы жесткости (10.10), равно как и матрицы (57), равен трем. Поэтому ядра матриц (10.10) и (56) различны, и ни о какой оценке типа (32) речи быть не может. Односточечная квадратурная формула обеспечивает достаточную аппроксимацию, но одного узла недостаточно для равномерной H -эллиптичности получаемой квадратичной формы.

6. Упражнения

1. Построить матрицы жесткости, массы и векторы нагрузки из (54) и (55).

2. Убедиться, что рассмотренные квадратурные формулы на треугольнике в самом деле обладают указанной точностью.

3. Построить матрицы жесткости (56) и (57).

Лекция 18

ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В предыдущих лекциях при рассмотрении МКЭ для уравнения Пуассона с теми или иными граничными условиями мы предполагали, что область полигональна, и, следовательно, ее можно разбить, например, на треугольники с прямолинейными сторонами. Но в вычислительной практике встречается достаточно много задач для областей, границы которых либо криволинейны, либо содержат криволинейные участки. Как быть здесь? Можно ли приспособить МКЭ для решения и таких задач? Ответ, конечно, утвердительный, однако в большинстве случаев трактовать МКЭ следует более широко.

Пусть Ω — область, граница $\partial\Omega$ которой криволинейна. Разобьем

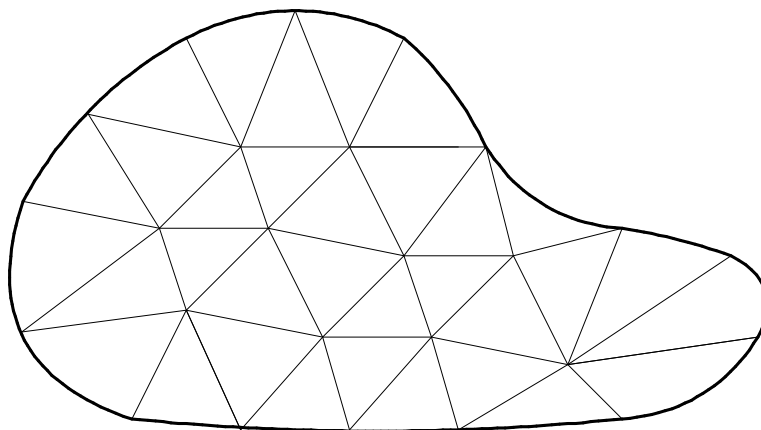


Рис. 1

эту область на треугольники, часть из которых (расположенных в окрестности границы) может иметь одну криволинейную сторону (см. рис. 1). Зададим в вершинах треугольников какие-нибудь значения и построим по ним кусочно-линейную, непрерывную, линейную на каждом треугольнике, функцию. Совокупность всех таких функций назовем S^h (размерность этой совокупности — пространства — равна числу различных вершин треугольников).

Предположим, что нам предъявлена для решения следующая задача:

$$-\Delta u + u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Присутствие младшего члена с нужным знаком в этом уравнении гарантирует существование единственного решения рассматриваемой задачи *Неймана*. Вариационная постановка задачи (1), (2) такова: найти

$$u \in H^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) dx dy, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Так как $S^h \subset H^1(\Omega)$, то приближенное решение можно определить обычным образом: найти

$$u^h \in S^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in S^h, \quad (3)$$

и, вроде бы, никаких проблем: в силу замечания 16.2 для решения задачи (3) справедлива оценка из теоремы 16.2.

Проблемы, однако, есть.

- Поскольку прилегающие к $\partial\Omega$ треугольники имеют криволинейную сторону, то вычисление интегралов по ним становится практически неосуществимым.

- Если бы граничное условие (2) было неоднородным или это было *граничное условие третьего рода*

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \kappa u \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

то линейная форма $l(v)$ или билинейная форма $a(u, v)$ дополнительно содержали бы интегралы по $\partial\Omega$, и при реализации соответствующей задачи (3) их тоже нужно было бы как-то вычислять.

• Наконец, если бы вместо естественных граничных условий (2) или (4) было поставлено главное граничное условие, например,

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

то конечноэлементную задачу мы смогли бы поставить, лишь образовав новое конечномерное пространство \mathring{S}^h из функций, которые тождественно равны нулю на всех треугольниках (с криволинейными и прямолинейными сторонами), у которых хотя бы одна вершина лежит на $\partial\Omega$. Только в этом случае \mathring{S}^h будет принадлежать $H_0^1(\Omega)$, и главное граничное условие для приближенного решения будет выполнено. Ясно, что это плохо с точки зрения точности получаемого приближенного решения, в чем легко убедиться на одномерной модели.

1. Простейшая аппроксимация криволинейной границы

Преодоление тех трудностей, которые мы обнаружили при использовании криволинейных конечных элементов, может быть осуществлено путем отказа от треугольников с криволинейными сторонами *произвольного вида*.

Пусть Ω — выпуклая область с гладкой границей $\partial\Omega$. Построим ее триангуляцию π^h . Для этого разобьем Ω на треугольники, часть из которых будет иметь одну криволинейную сторону. В криволинейных треугольниках соединим вершины, расположенные на $\partial\Omega$, отрезками прямых, в результате чего из криволинейных треугольников получим прямолинейные. Обозначим объединение всех прямолинейных треугольников из $\bar{\Omega}$ через $\Omega_h = \bigcup_{e^{(i)} \in \pi^h} e^{(i)}$. Теперь уже, вообще говоря, $\bar{\Omega} \neq \Omega_h$, однако в силу выпуклости области $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$. Это будет *аппроксимация области Ω* .

Рассмотрим задачу (1), (5). Ее вариационная формулировка такова: найти

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

Пусть $\mathring{S}^h(\Omega_h)$ — конечноэлементное пространство кусочно-линейных непрерывных функций, заданных на Ω_h и обращающихся в нуль на $\partial\Omega_h$. Продолжим все функции из $\mathring{S}^h(\Omega_h)$ нулем с Ω_h на Ω . Обозначим новое

пространство через $\mathring{S}^h(\Omega)$. Очевидно, что функции из $\mathring{S}^h(\Omega)$ кусочно-линейны, непрерывны и $\mathring{S}^h(\Omega) \subset H_0^1$. Тем самым, приближенным решением задачи (6) можно объявить функцию

$$u^h \in \mathring{S}^h(\Omega) : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \mathring{S}^h(\Omega).$$

Для реализации этой задачи потребуются вычисление интегралов (точное или приближенное) только по треугольникам с прямолинейными сторонами, а это мы делать умеем.

В силу теоремы 11.1

$$a(u - u^h, u - u^h) = \inf_{v^h \in \mathring{S}^h(\Omega)} a(u - v^h, u - v^h).$$

Но

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}(u - v^h) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(u - v^h) \right]^2 + (u - v^h)^2 \right\} dx dy = \\ & = \int_{\Omega \setminus \Omega_h} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right\} dx dy = \text{const}, \end{aligned}$$

ибо на $\Omega \setminus \Omega_h$ функции $v^h \in \mathring{S}^h(\Omega)$ тождественно нулевые.

Пусть

$$a_h(u^h, v^h) = \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial v^h}{\partial x} + \frac{\partial u^h}{\partial y} \frac{\partial v^h}{\partial y} + u^h v^h \right) dx dy.$$

Тогда

$$a_h(u - u^h, u - u^h) = \inf_{v^h \in \mathring{S}^h(\Omega_h)} a_h(u - v^h, u - v^h). \quad (7)$$

Полагая теперь $v^h = i_h u$ и принимая во внимание, что

$$c_0 \|v\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq a_h(v, v) \leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega_h)}^2,$$

получим оценку

$$c_0 \|u - u^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq c_1 \|u - i_h u\|_{H^1(\Omega_h)}^2.$$

Если $u(x) \in H^2(\Omega)$, а триангуляция Ω_h регулярна, и $\max_{\Omega_h} e^{(i)} \leq h$, то в силу теоремы 16.1

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h.$$

Мы доказали, что, если приближенное решение принадлежит S_1^h , то для однородной задачи Дирихле в выпуклой области замена криволинейных треугольников прямолинейными не приводит к уменьшению порядка точности в H^1 .

На самом деле выпуклость Ω здесь не при чем, хотя мы и пользовались этим в своих рассуждениях. Тот же результат верен и для невыпуклых областей с гладкой границей. (Не путать с невыпуклыми полигональными областями.) Действительно, пусть Ω — невыпуклая область с гладкой границей. Как и в выпуклом случае построим Ω_h . Теперь уже, вообще говоря, $\Omega_h \not\subset \bar{\Omega}$, и мы не можем построить приближенное решение, поскольку $f(x, y)$ на Ω_h не везде определена. Что касается граничных узлов Ω_h , то, несмотря на то, что не вся $\partial\Omega_h$ принадлежит $\bar{\Omega}$, указанные узлы расположены на $\partial\Omega$.

Пусть область $\tilde{\Omega}$ такова, что $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ и $\Omega_h \subset \tilde{\Omega}$ для всех допустимых триангуляций π^h . "Гладко" продолжим решение $u(x, y)$ задачи (16.13) с Ω на $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{u}(x, y) \in H^2(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{u}(x, y) |_{\Omega} = u.$$

Продолжим f из (16.13) с Ω на $\tilde{\Omega}$ по формуле

$$\tilde{f} = -\Delta \tilde{u}. \quad (8)$$

Теперь мы можем определить приближенное решение следующим образом:

$$u^h \in \mathring{S}^h(\Omega_h) : a_h(u^h, v^h) = l_h(v^h) \quad \forall v^h \in \mathring{S}^h(\Omega_h), \quad (9)$$

где

$$a_h(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega_h} (\nabla \tilde{u})^T (\nabla \tilde{v}) dx dy, \quad l_h(\tilde{v}) = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \tilde{v} dx dy. \quad (10)$$

Заметим, что u^h из (9) не есть галеркинское решение задачи (6), поскольку $a_h \neq a$.

Оценим разность между u^h и \tilde{u} . В силу неравенства треугольника

$$\|\tilde{u} - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} + \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}. \quad (11)$$

Если $v^h \in \mathring{S}^h(\Omega_h)$, то в силу (10) и неравенства Фридрихса из упражнения 11.5

$$\begin{aligned} c \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 &\leq a_h(u^h - v^h, u^h - v^h) = \\ &= a_h(u^h, u^h - v^h) - a_h(v^h, u^h - v^h) = \\ &= l_h(u^h - v^h) - a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) + a_h(\tilde{u} - v^h, u^h - v^h). \end{aligned}$$

Поскольку $u^h - v^h \in \mathring{S}^h(\Omega_h)$, то

$$-a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) = \int_{\Omega_h} \Delta \tilde{u} (u^h - v^h) dx dy,$$

а принимая во внимание (8), находим, что

$$l_h(u^h - v^h) - a_h(\tilde{u}, u^h - v^h) = \int_{\Omega_h} (u^h - v^h)(\tilde{f} + \Delta \tilde{u}) dx dy = 0.$$

Тем самым,

$$c \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq a_h(\tilde{u} - v^h, u^h - v^h) \leq \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} \|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}.$$

Сокращая на $\|u^h - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}$ и комбинируя полученное неравенство с (11), получим оценку

$$\|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq (1 + c^{-1}) \|\tilde{u} - v^h\|_{H^1(\Omega_h)}.$$

Принимая теперь во внимание, что граничные узлы Ω_h расположены на $\partial\Omega$, а по построению $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$, можно положить $v^h = i_h \tilde{u}$, что приведет к уже рассмотренной задаче об оценке интерполяции и искомой оценке

$$\|\tilde{u} - u^h\|_{H^1(\Omega_h)} \leq c h |\tilde{u}|_{H^2(\Omega_h)}^2.$$

З а м е ч а н и е 1. Вообще говоря, построенное приближенное решение в невыпуклой области зависит от способа продолжения правой части уравнения и его коэффициентов, если они не постоянные, на $\bar{\Omega}$. Однако, для вычисления (приближенного) матрицы жесткости и вектора нагрузки обычно используются квадратурные формулы, и, если узлами квадратурной формулы являются лишь узлы конечных элементов, то этой зависимости не будет, и реально ничего продолжать не нужно.

2. Квадратичные треугольные элементы в криволинейной области

Из упражнения 16.2 следует, что в полигональной области решение задачи (16.16) с $S_2^h = \{v^h \in C(\bar{\Omega}) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)})\}$ вместо S_1^h приближает в H^1 решение задачи (16.13) $u(x, y) \in H^3(\Omega)$ с погрешностью $O(h^2)$. Выясним, переносится ли этот результат на области с гладкой границей, как это было в случае кусочно-линейных приближенных решений.

Для простоты мы будем предполагать, что область Ω выпуклая, а $\Omega_h = \cup e^{(i)} \subset \bar{\Omega}$ построена так же, как и в п. 1 (см. рис. 2). Теперь,

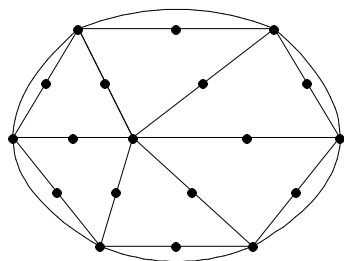


Рис. 2

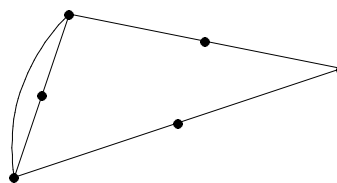


Рис. 3

правда, узлами $e^{(i)}$ являются не только его вершины, но и середины сторон. Пусть конечноэлементное пространство задается соотношением

$$S_2^h(\Omega_h) = \{v^h \in C(\Omega_h) \mid v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)})\},$$

а приближенное решение задачи (16.13) ищется в подпространстве

$$\overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h) = \{v^h \in S_2^h(\Omega_h) \mid v^h|_{\partial\Omega_h} = 0\}.$$

Именно,

$$u^h \in \mathring{S}_2^h(\Omega_h) : a_h(u^h, v^h) = l_h(v^h) \quad \forall v^h \in \mathring{S}_2^h(\Omega_h),$$

где a_h и l_h заданы соотношениями (10). Как и в п. 1 (см. (7)), находим, что для любой $v^h \in \mathring{S}_2^h(\Omega_h)$

$$a_h(u - u^h, u - u^h) \leq a_h(u - v^h, u - v^h). \quad (12)$$

Однако теперь брать $i_{h,2}u$ в качестве v^h нельзя, так как $i_{h,2}u \notin \mathring{S}_2^h(\Omega_h)$, хотя $i_{h,2}u \in S_2^h(\Omega_h)$. Чтобы описать подходящий выбор v^h , разобьем все узлы конечных элементов из триангуляции π^h на два непересекающихся множества. К первому множеству отнесем узлы $(x_i, y_i) = Q_i \in \mathring{\Omega}_h \cup \partial\Omega$, где $\mathring{\Omega}_h$ — внутренняя часть Ω_h (напомним, что $\Omega_h = \bar{\Omega}_h$), а ко второму — $(x_i, y_i) = P_i \in \partial\Omega_h \setminus \partial\Omega$. Теперь введем в рассмотрение функцию $\tilde{u}(x, y)$, которая в узлах Q_i совпадает с $u(x, y)$, а в узлах P_i равна нулю. Положим затем в (12)

$$v^h(x, y) = i_{h,2}\tilde{u}(x, y) \in \mathring{S}_2^h(\Omega_h).$$

Итак, отсюда, из (10) и (12) обычным образом находим, что

$$\begin{aligned} |u - u^h|_{H^1(\Omega_h)}^2 &\leq |u - i_{h,2}\tilde{u}|_{H^1(\Omega_h)}^2 = |u - i_{h,2}u + i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq \\ &\leq 2|u - i_{h,2}u|_{H^1(\Omega_h)}^2 + 2|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2. \end{aligned}$$

В силу обобщения теоремы 16.1 на случай $i_{h,2}v \in S_2^h(\Omega_h)$ (см. указание к упражнению 16.2),

$$|u - i_{h,2}u|_{H^1(\Omega_h)}^2 \leq c h^4 |u|_{H^3(\Omega_h)}^2,$$

а

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 = \sum_i u^2(P_i) \int_{e^{(i)}} |\nabla \varphi_i|^2 dx dy,$$

где суммирование осуществляется по описанному выше второму множеству узлов. В этом множестве содержится $O(h^{-1})$ узлов (именно

столько элементов примыкает к $\partial\Omega$). По определению базисных функций φ_i справедливо равенство $|\nabla\varphi_i| = O(h^{-1})$, а площадь $e^{(i)}$ есть $O(h^2)$. Поэтому

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)}^2 = O(h^{-1}) \max_i u^2(P_i).$$

Далее, поскольку расстояние от узла P_i до гладкой границы $\partial\Omega$ есть $O(h^2)$, а $u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$, то $u(P_i) = O(h^2|\nabla u|)$ и, следовательно,

$$|i_{h,2}(u - \tilde{u})|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^{3/2}),$$

а потому и

$$|u - u^h|_{H^1(\Omega_h)} = O(h^{3/2}).$$

Это на полпорядка хуже, чем аналогичная оценка для полигональной области (см. упражнение 16.2), и, следовательно, так использовать квадратичные элементы нецелесообразно.

3. Изопараметрические конечные элементы

Вновь обратимся к области с гладкой (криволинейной) границей. В отличие от полигональных областей, где гладкость искомого решения существенно ограничена наличием углов на границе, в областях с гладкой границей решение может быть сколь угодно гладким. Здесь гладкость решения полностью определяется гладкостью входных данных: границы, граничных условий, коэффициентов и правой части уравнения. Поэтому именно для задач в гладких областях было бы целесообразным использовать многоточечные конечные элементы, которые обеспечивают высокую точность как раз на гладких решениях. Вопрос только в том: как строить такие схемы, если граница криволинейная. В п. 2 мы убедились, что использование шеститочечных прямолинейных треугольников проблему не решает.

Выход состоит в применении так называемой *изопараметрической техники*, которая наряду с прямолинейными треугольниками допускает использование треугольников со *специальными криволинейными сторонами*. (Мы уже знаем, что использование треугольников с достаточно общими криволинейными сторонами приводит к практически непреодолимым вычислительным трудностям при построении матрицы

жесткости и вектора нагрузки.) Очевидно, что можно ограничиться треугольниками с одной криволинейной стороной, которая прилегает к границе $\partial\Omega$.

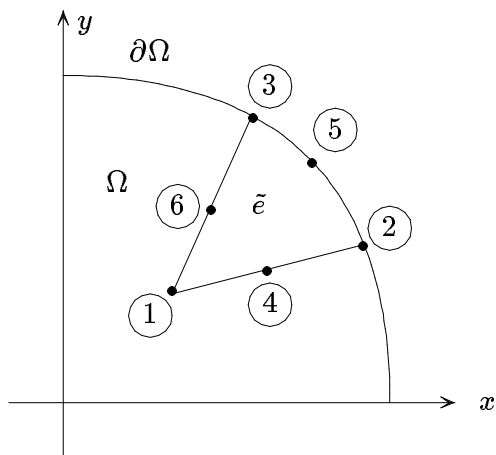


Рис. 4

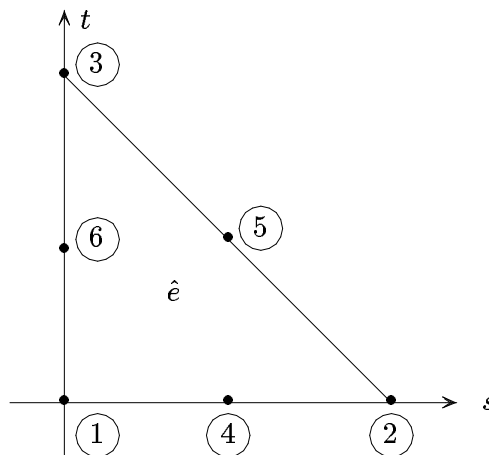


Рис. 5

На рис. 4 изображена часть области Ω и шеститочечный криволинейный треугольник \tilde{e} , узлы которого расположены в вершинах, в серединах прямолинейных сторон и где-то на криволинейной стороне. В данном контексте правильнее было бы говорить не о криволинейном треугольнике, а только о принадлежащих его границе шести узлах. Введем в рассмотрение базисный прямоугольный треугольник \hat{e} с узлами в вершинах и серединах сторон (см. рис. 5) и установим его связь с \tilde{e} . У нас нет никаких шансов отобразить базисный треугольник \hat{e} на криволинейный \tilde{e} при помощи простых функций. От этой затеи откажемся сразу. Поставим более скромную задачу: отобразить узлы \hat{e} в узлы \tilde{e} . Это можно сделать при помощи квадратичного преобразования

$$x = P_2(s, t), \quad y = Q_2(s, t).$$

Очевидно, что

$$x = \sum_{j=1}^6 x_j \varphi_j, \quad y = \sum_{j=1}^6 y_j \varphi_j, \quad (13)$$

где (x_j, y_j) — координаты j -го узла на плоскости Oxy , а φ_j — функции формы квадратичного треугольного элемента (10.1), (10.2)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), & \varphi_2 &= \zeta_2(2\zeta_2 - 1), & \varphi_3 &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\ \varphi_4 &= 4\zeta_1\zeta_2, & \varphi_5 &= 4\zeta_2\zeta_3, & \varphi_6 &= 4\zeta_1\zeta_3.\end{aligned}$$

Изучим преобразование (13). Барцентрические координаты на базисном треугольнике имеют простой вид:

$$\zeta_2 = s, \quad \zeta_3 = t, \quad \zeta_1 = 1 - s - t.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (1 - s - t)(1 - 2s - 2t), & \varphi_2 &= s(2s - 1), & \varphi_3 &= t(2t - 1), \\ \varphi_4 &= 4(1 - s - t)s, & \varphi_5 &= 4st, & \varphi_6 &= 4(1 - s - t)t.\end{aligned}$$

Отсюда и из (13) находим, что, например,

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (-3x_1 - x_2 + 4x_4)s + (-3x_1 - x_3 + 4x_6)t + \\ &+ 2(x_1 + x_2 - 2x_4)s^2 + 2(x_1 + x_3 - 2x_6)t^2 + 4(x_1 - x_4 + x_5 - x_6)st.\end{aligned}$$

Поскольку четвертый и шестой узлы расположены в серединах сторон, то

$$x_4 = (x_1 + x_2)/2, \quad x_6 = (x_1 + x_3)/2,$$

и квадратичное преобразование превращается в билинейное

$$\begin{aligned}x &= A_1 + B_1s + C_1t + D_1st, \\ y &= A_2 + B_2s + C_2t + D_2st,\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= x_1, & B_1 &= x_2 - x_1, & C_1 &= x_3 - x_1, & D_1 &= -2(x_2 + x_3 - 2x_5), \\ A_2 &= y_1, & B_2 &= y_2 - y_1, & C_2 &= y_3 - y_1, & D_2 &= -2(y_2 + y_3 - 2y_5).\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Если бы рассматриваемый криволинейный треугольник \tilde{e} был прямолинейным, и пятый узел располагался в середине стороны, то $x_5 = (x_2 + x_3)/2$, $y_5 = (y_2 + y_3)/2$, и коэффициенты D_1 и

D_2 преобразования (14) были бы равны нулю, т.е. преобразование (14) фактически было бы не квадратичным, а линейным.

Изучим теперь вопрос о том, куда преобразование (14), переводящее узлы в узлы, переводит базисный треугольник \hat{e} . Пусть $s = 0$. Тогда $x = A_1 + C_1 t$, $y = A_2 + C_2 t$. Отсюда следует, что сторона базисного треугольника, расположенная на прямой $s = 0$, переходит в прямолинейный отрезок, расположенный на прямой $(x - A_1)/C_1 = (y - A_2)/C_2$. Аналогично, при $t = 0$ $(x - A_1)/B_1 = (y - A_2)/B_2$, т.е. если средины четвертый и шестой узлы криволинейного треугольника расположены в серединах прямолинейных сторон, то преобразованием (14) прямолинейные стороны базисного треугольника \hat{e} переводятся в прямолинейные стороны \tilde{e} .

Прежде чем выяснять, куда переходит гипотенуза базисного треугольника \hat{e} , исследуем вопрос об обратимости преобразования (14). Пусть

$$(s, t) \longrightarrow (x', y') \longrightarrow (x, y),$$

т.е. преобразование (14) осуществляется в два этапа, причем последнее преобразование $(x', y') \longrightarrow (x, y)$ линейное и такое, при котором в вершины \tilde{e} переходят вершины равнобедренного прямоугольного треугольника плоскости $Ox'y'$ (см. рис. 6). Именно

$$x'_1 = 0, \quad y'_1 = 0; \quad x'_2 = 1, \quad y'_2 = 0; \quad x'_3 = 0, \quad y'_3 = 1.$$

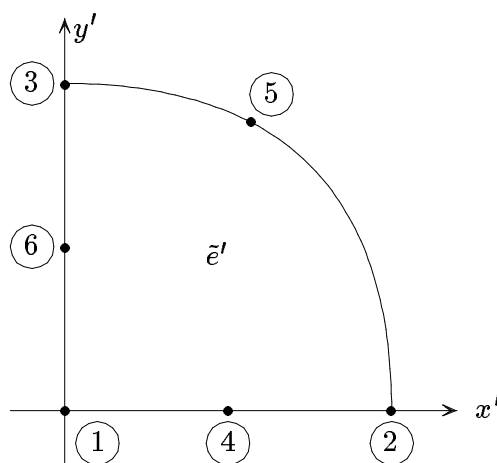


Рис. 6

Тогда $x'_4 = 1/2$, $y'_4 = 0$ и $x'_6 = 0$, $y'_6 = 1/2$, а x'_5 и y'_5 — какие-то. Якобиан этого преобразования постоянен и, следовательно, не обращается в нуль. С этой точки зрения нужно изучить только преобразование $(s, t) \rightarrow (x', y')$. Для него

$$\begin{aligned} A'_1 &= 0, & B'_1 &= 1, & C'_1 &= 0, & D'_1 &= 4(x'_5 - 1/2) =: a, \\ A'_2 &= 0, & B'_2 &= 0, & C'_2 &= 1, & D'_2 &= 4(y'_5 - 1/2) =: b, \end{aligned} \quad (15)$$

т.е.

$$x' = s + ast, \quad y' = t + bst. \quad (16)$$

Якобиан этого преобразования $\det \hat{J}(s, t) = 1 + at + bs$ линеен и не обращается на \hat{e} в нуль, если в вершинах \hat{e} имеет значения одного знака. Поскольку

$$\det \hat{J}(0, 0) = 1, \quad \det \hat{J}(1, 0) = 1 + b, \quad \det \hat{J}(0, 1) = 1 + a,$$

то преобразование (16) будет невырожденным на \hat{e} , если и $1 + a > 0$, и $1 + b > 0$. Отсюда в силу (15) вытекают следующие условия на координаты узла (x'_5, y'_5) :

$$x'_5 > 1/4, \quad y'_5 > 1/4. \quad (17)$$

Эти условия ограничительные. Например, для криволинейного треугольника, изображенного на рис. 7, они не выполняются, в то время

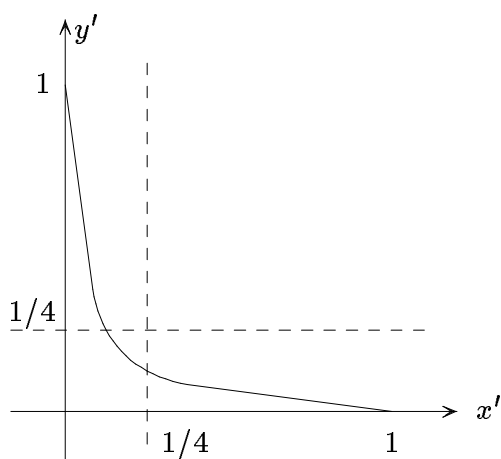


Рис. 7

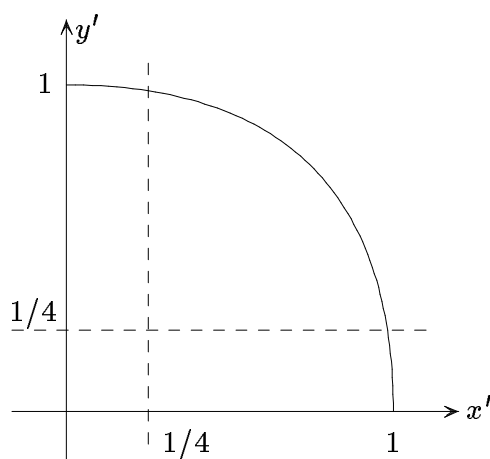


Рис. 8

как для криволинейного треугольника, изображенного на рис. 8, имеется большая свобода для выбора точки на криволинейной границе. Следует, однако, заметить, что треугольник на рис. 7 вряд ли обладает хорошими аппроксимационными свойствами, и его целесообразно разбить на два треугольника, после чего проблема будет снята.

Теперь посмотрим, куда на плоскости $Ox'y'$ переходит гипотенуза базисного треугольника. Отметим, что при реальных вычислениях нам это нигде не понадобится, и здесь мы удовлетворяем лишь собственное любопытство. Принимая во внимание (16) и рис. 5, находим, что искомая кривая задается уравнениями

$$x' = s + ast, \quad y' = t + bst, \quad s + t = 1. \quad (18)$$

Заметим, что если $a + b = 0$, то $x' + y' = 1$, т.е. в этом случае гипотенуза переходит в отрезок прямой, как и при $a = b = 0$, но преобразование (16) остается билинейным. Пусть $a + b \neq 0$. Из первых двух уравнений (18) вытекает, что

$$bs - at = bx' - ay'.$$

Отсюда и из последнего уравнения (18) находим

$$s = \frac{bx' - ay' + a}{a + b}, \quad t = \frac{-bx' + ay' + b}{a + b},$$

а, подставляя эти значения s и t , например, в первое уравнение (18), получим уравнение кривой второго порядка

$$(bx' - ay')^2 + (b(a - b) + a + b)x' + (a(b - a) + a + b)y' - (a + b + ab) = 0. \quad (19)$$

Поскольку матрица

$$\begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

квадратичной формы $(bx' - ay')^2$ вырождена, то найденная кривая является параболой, ось которой коллинеарна вектору $[a \ b]^T$, являющемуся собственным вектором матрицы (20), отвечающим нулевому собственному значению. На рис. 9 сплошной линией изображен треугольник e' ,

криволинейная сторона которого описывается параболой (19), а штриховой линией — образ на $Ox'y'$ исходного треугольника \tilde{e} .

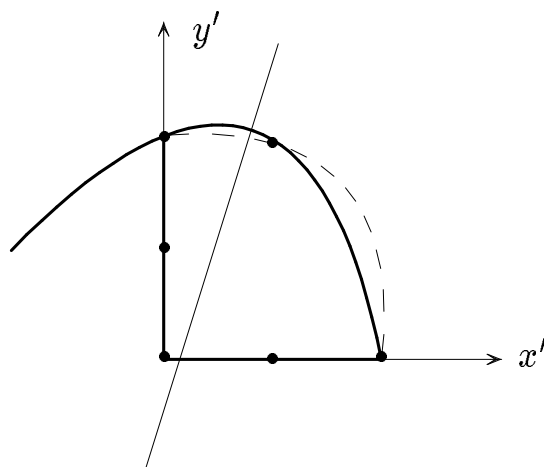


Рис. 9

Поскольку, как уже было сказано, преобразование $(x', y') \rightarrow (x, y)$ линейное, то и на исходной плоскости Oxy образом базисного треугольника \hat{e} будет криволинейный треугольник e с двумя прямолинейными сторонами и одной криволинейной — параболой. Эта парабола определяется путем задания некоторых осей и квадратичной интерполяции по узлам 3, 5 и 2, принадлежащим исходной границе $\partial\Omega$. Заменяем исходный криволинейный треугольник \tilde{e} криволинейным треугольником e . Это приведет к замене криволинейного участка границы $\partial\Omega$ в пределах \tilde{e} куском параболы, интерполирующей исходную кривую по трем узлам. В п. 2 при использовании квадратичных элементов мы пытались интерполировать гладкую границу в пределах элемента линейно, что оказалось не вполне удовлетворительно с точки зрения порядка точности приближенного решения. *Квадратичная интерполяция* границы приводит к более точной аппроксимации области Ω и в то же время снимает возникшие при линейной интерполяции проблемы с оценкой точности квадратичной интерполяции на элементе.

Теперь можно приступить к аппроксимации решения на e . Поскольку есть взаимно однозначное соответствие между e и базисным прямолинейным треугольником \hat{e} , то проще это делать на \hat{e} . Будем представлять приближенное решение в виде квадратичного многочлена на \hat{e} ,

т. е. будем считать, что

$$\hat{u}(s, t) = \sum_{j=1}^4 u_j \varphi_j(s, t), \quad (s, t) \in \hat{e}.$$

На e представление приближенного решения $u^h(x, y)$ будет более сложным, да и выписать его не так просто, но нам этого и не нужно, поскольку все вычисления можно (и нужно) проводить на \hat{e} . *Техника, при которой и криволинейная граница конечного элемента и решение на этом элементе аппроксимируются одними и теми же функциями, называется изопараметрической, а сами конечные элементы — изопараметрическими конечными элементами.* Отметим, что использованные нами в п. 1 для аппроксимации криволинейной области треугольные конечные элементы с прямолинейными сторонами вместе с кусочно-линейной аппроксимацией решения также являются изопараметрическими. Мы не будем останавливаться на оценке точности квадратичной интерполяции на изопараметрических (шеститочечных) конечных элементах.

Воспользуемся изопараметрическими шеститочечными конечными элементами при решении задачи (16.13). Посмотрим, например, как будет вычисляться матрица жесткости элемента. В отличие от п. 10.2, где матрица жесткости строилась на прямолинейном треугольнике, и все интегралы можно было вычислить точно по формуле (8.17), что привело к формуле (10.4), здесь ситуация более сложная. В исходных переменных треугольник не является прямолинейным, и нужно делать изопараметрическое преобразование переменных, чтобы перейти к базисному треугольнику с прямолинейными сторонами. Это приводит к тому, что подынтегральное выражение сильно усложняется, и появляется реальная необходимость использования квадратурных формул. Итак, от простого интеграла по сложной области мы приходим к сложному интегралу по треугольнику.

Пусть $e^{(i)}$ — изопараметрический треугольник, криволинейная сторона которого представляет собой некую параболу, в которую переходит гипотенуза базисного треугольника при преобразовании (13). Элемент $k_{pq}^{(i)}$ матрицы жесткости $K^{(i)}$ согласно (5.3) вычисляется по формуле

$$k_{pq}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Изучим вопрос о вычислении $\int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy$. Делая преобразование (13), находим, что

$$\int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \det[\hat{J}(s, t)] ds dt, \quad (21)$$

где $\hat{J}(s, t)$ — матрица Якоби преобразования (13). Для вычислений по этой формуле нам нужно знать $\partial s/\partial x$ и $\partial t/\partial x$, в то время как соотношения (13) задают преобразование путем простого представления x и y через s и t , которое обращается совсем не просто. Поэтому при вычислении $\partial s/\partial x$ и $\partial t/\partial x$, а также $\partial s/\partial y$ и $\partial t/\partial y$ мы пойдем по другому пути. Имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \hat{J}(s, t) \begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix} = \hat{J}^{-1}(s, t) \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}.$$

С другой стороны,

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy, \quad dt = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

и, следовательно, $A = \hat{J}^{-1}(s, t)$. Тем самым, искомые производные, являющиеся элементами матрицы A , находятся из решения системы $\hat{J}(s, t)A = I$. Решая эту систему, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial y/\partial t}{\det[\hat{J}(s, t)]}, & \frac{\partial t}{\partial x} &= -\frac{\partial y/\partial s}{\det[\hat{J}(s, t)]}, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= -\frac{\partial x/\partial t}{\det[\hat{J}(s, t)]}, & \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\partial x/\partial s}{\det[\hat{J}(s, t)]}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (21)

$$\begin{aligned} & \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \\ & = \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) [\det \hat{J}(s, t)]^{-1} ds dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \int_{e^{(i)}} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = \\ & = \int_{\hat{e}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \left(-\frac{\partial \hat{v}}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} \right) [\det \hat{J}(s, t)]^{-1} ds dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Подынтегральные функции в (22), (23) представляют собой дробно-рациональные функции, и для вычисления этих интегралов нужно использовать квадратурные формулы.

4. Изопараметрические четырехугольники

Изопараметрическая техника может быть применена и при использовании четырехугольных конечных элементов. В п. 10.3 рассматривались биполиномиальные и другие конечные элементы прямоугольной формы. Там отмечалось, что стороны прямоугольного конечного элемента должны быть параллельны координатным осям. Использование изопараметрической техники позволяет снять это ограничение и даже разрешает конечным элементам не иметь прямоугольную форму.

На рис. 10 изображен четырехугольник с прямолинейными сторонами, а на рис. 11 — квадрат. Отообразим вершины квадрата в соответ-

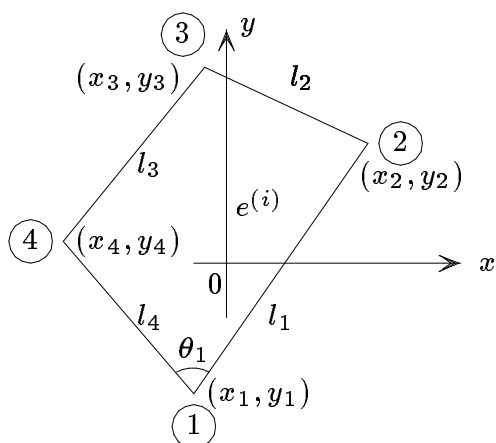


Рис. 10

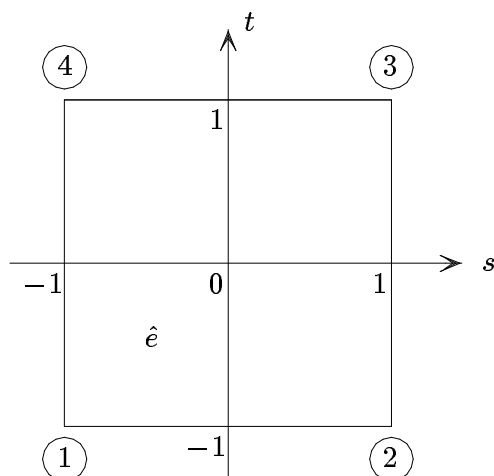


Рис. 11

ствующие вершины четырехугольника. Очевидно, что такое отображение осуществляет, например, преобразование

$$x = \sum_{j=1}^4 x_j \varphi_j(s, t), \quad y = \sum_{j=1}^4 y_j \varphi_j(s, t), \quad (24)$$

где $\varphi_j(s, t)$ — билинейные функции формы из (10.6). На самом деле, (24) осуществляет не только отображение вершин в вершины, но и всего квадрата \hat{e} в четырехугольник $e^{(i)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что стороны квадрата переходят в стороны четырехугольника, и якобиан преобразования положителен. Посмотрим, например, куда переходит при отображении (24) сторона квадрата, расположенная на прямой $t + 1 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} x(s, -1) &= x_1 \varphi_1(s, -1) + x_2 \varphi_2(s, -1) = \\ &= x_1(1-s)/2 + x_2(1+s)/2 = x_1 + (x_2 - x_1)(s+1)/2. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$y(s, -1) = y_1 + (y_2 - y_1)(s+1)/2.$$

Исключая s , находим, что

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это — уравнение прямой, проходящей через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , на которой и лежит соответствующая сторона четырехугольника \hat{e} . Итак, граница $\partial\hat{e}$ переходит в границу $\partial e^{(i)}$. Найдем якобиан преобразования (24). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{4} [(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)t], \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{1}{4} [(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)s], \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{4} [(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)t], \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{4} [(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)s],\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a + bt, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = c + bs, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = A + Bt, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = C + Bs,$$

где a, \dots, C — постоянные. Поэтому

$$\det[\hat{J}(s, t)] = (aC - cA) + (aB - bA)s + (bC - cB)t$$

есть линейная функция. Якобиан $\det[\hat{J}(s, t)]$ не будет обращаться в нуль на \hat{e} , если его значения в вершинах \hat{e} одного знака. Имеем

$$\begin{aligned}\det[\hat{J}(-1, -1)] &= \begin{vmatrix} a - b & c - b \\ A - B & C - B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ \frac{1}{4} y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} S_{\Delta_{124}} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta_1.\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются значения якобиана в других вершинах \hat{e} . Тем самым, якобиан на \hat{e} будет положительным, если четырехугольник $e^{(i)}$ является выпуклым и невырожденным, т.е. все его углы меньше π .

Итак, четырехугольник $e^{(i)}$, изображенный на рис. 10, может быть использован в качестве конечного элемента, однако приближенное решение на нем будет задаваться в виде билинейной функции не по переменным x, y , а по переменным s, t . В переменных x, y , это будет

гладкая, но более сложная функция. Последнее обстоятельство не имеет никакого значения, поскольку все вычисления при построении матрицы жесткости и вектора нагрузки проводятся в переменных s, t .

Если четырехугольник $e^{(i)}$ расположен в окрестности криволинейной границы, то одна из его сторон будет криволинейной. Заменяем в этом четырехугольнике криволинейную сторону прямолинейной, соединив его вершины, попавшие на границу, отрезком прямой. Рассуждения, аналогичные использованным в п. 1, показывают, что при билинейной аппроксимации решения такая замена не приводит к ухудшению точности приближенного решения в H^1 !

С тем же успехом при кусочно-биквадратичном приближении решения осуществляется биквадратичное отображение \hat{e} на $e^{(i)}$, в котором в серединные узлы прямолинейных сторон $e^{(i)}$ переходят соответствующие серединные узлы \hat{e} . В результате мы получаем четырехугольник с одной криволинейной стороной, которая аппроксимирует границу $\partial\Omega$ лучше, чем прямая.

5. Неоднородная задача Дирихле

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (25)$$

Будем предполагать, что область полигональна, граничная функция $g(x, y)$ непрерывна на $\partial\Omega$, и существует такая функция $v(x, y) \in H^1(\Omega)$, что $v|_{\partial\Omega} = g(x, y)$. Эта функция в дальнейшем не будет участвовать в вычислительном процессе и введена в рассмотрение исключительно из-за того, что здесь мы не имеем иной возможности описать требуемые свойства гладкости $g(x, y)$ на границе. Чтобы поставить отвечающую (25) вариационную задачу, наряду с подпространством $H_0^1(\Omega)$ нам потребуется аффинное многообразие

$$H_E^1(\Omega) := \{v \in H^1 \mid v|_{\partial\Omega} = g(x, y)\}.$$

С учетом введенного обозначения вариационная формулировка задачи (25) будет иметь вид: найти

$$u(x, y) \in H_E^1(\Omega) : \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (26)$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются соотношениями (16.15).

Прежде чем приступить к численному решению этой задачи, заметим, что она не может быть решена при помощи МКЭ галеркинского типа, ибо ни для какого конечноэлементного пространства S^h кусочно-полиномиальных функций включение в $H_E^1(\Omega)$, вообще говоря, невозможно. Исключение составляет лишь тот случай, когда сама функция $g(x, y)$ является кусочно-полиномиальной, но это предположение слишком ограничительно. Для решения задачи (26) мы вынуждены строить МКЭ не галеркинского типа. Как мы уже видели раньше при использовании численного интегрирования и изопараметрической техники, это не приводит к каким-либо серьезным последствиям для качества приближенного решения, но лишает нас возможности при исследовании сходимости пользоваться основной теоремой 11.2.

Пусть π^h — триангуляция Ω , $S^h \subset H^1(\Omega)$ — конечноэлементное пространство, а ω^h — множество всех узлов. Если S^h совпадает с S_1^h из лекции 8, т.е. является пространством непрерывных кусочно-линейных функций, то множество ω^h будет образовано вершинами треугольников из триангуляции π^h . Если S^h образовано кусочно-квадратичными функциями, то при образовании ω^h к вершинам треугольников добавятся середины их сторон. Обозначим через

$$\gamma^h = \omega^h \cap \partial\Omega$$

множество граничных узлов триангуляции π^h , и пусть

$$\mathring{S}^h := \{v^h \in S^h \mid v^h(x_k, y_k) = 0, \quad (x_k, y_k) \in \gamma^h\}.$$

Очевидно, что $\mathring{S}^h \subset H_0^1(\Omega)$. Приближенным решением задачи (26) назовем такую функцию

$$u^h \in S^h : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \mathring{S}^h, \quad (27)$$

которая удовлетворяет граничному условию

$$u^h(x_k, y_k) = g(x_k, y_k), \quad (x_k, y_k) \in \gamma^h. \quad (28)$$

З а м е ч а н и е 3. Постановка задачи (27), (28) аналогична постановке (3.23) в одномерном случае. Но, если в одномерном случае эта

постановка была эквивалентна постановке (3.22), то в рассматриваемом случае пересечение $S^h \cap H_E^1(\Omega)$, вообще говоря, пусто.

Как уже было отмечено, при исследовании сходимости решения задачи (27), (28) мы не можем воспользоваться основной теоремой 11.2, однако оценка

$$\|u^h - u\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1$$

остаётся справедливой. В самом деле, из (26) и (27) следует, что

$$a(u - u^h, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in \mathring{S}^h,$$

а поскольку $i_h u - u^h \in \mathring{S}^h$, то и

$$a(u - u^h, i_h u - u^h) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$a(i_h u - u^h, i_h u - u^h) = a(i_h u - u, i_h u - u^h).$$

Поскольку в нашем случае $a(v, v) = |v|_1^2$, то с использованием неравенства Шварца находим, что

$$|i_h u - u^h|_1 \leq c |i_h u - u|_1,$$

а привлекая неравенство Фридрихса, будем иметь

$$\|i_h u - u^h\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1.$$

Наконец, используя неравенство треугольника, отсюда получаем желаемую оценку

$$\|u^h - u\|_1 \leq \|u^h - i_h u\|_1 + \|u - i_h u\|_1 \leq c \|i_h u - u\|_1.$$

Задача оценки точности свелась к задаче оценки интерполяции, которую мы уже рассматривали. Мы не будем более распространяться на эту тему.

З а м е ч а н и е 4. Задача отыскания приближенного решения в том случае, когда область имеет криволинейную границу и используется изопараметрическая техника, ставится аналогично (27), (28) с очевидной заменой $a(u^h, v^h)$ и $l(v^h)$ на $a_h(u^h, v^h)$ и $l_h(v^h)$.

Литература

1. А н д р е е в В. Б., Р у х о в е ц Л. А. Проекционные методы. - М.: Знание, 1986. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. N 11 за 1986 г.)
2. Г а л л а г е р Р. Метод конечных элементов: основы. - М.: Мир, 1984.
3. Д а у т о в Р. З., К а р ч е в с к и й М. М. Введение в теорию метода конечных элементов. - Казань: КГУ, 2004.
4. Д е к л у Ж. Метод конечных элементов. - М.: Мир, 1976.
5. З е н к е в и ч О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975.
6. З е н к е в и ч О., М о р г а н К. Конечные элементы и аппроксимация. - М.: Мир, 1986.
7. К о р н е е в В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
8. М а р ч у к Г. И., А г о ш к о в В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981.
9. М и т ч е л л Э., У э й т Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. - М.: Мир, 1981.
10. Н о р р и Д., д е Ф р и з Ж. Введение в метод конечных элементов. - М.: Мир, 1981.
11. О г а н е с я н Л. А., Р у х о в е ц Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.- Ереван: Изд-во АН Арм-ССР, 1973.
12. С т р е н г Г., Ф и к с Д ж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977.
13. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, 1980.
14. H i n t o n E., O w e n D. R. J. Finite Element Programming. - London: Academic Press, 1977.
15. Z i e n k i e w i c z O. C. The Finite Element Methods. - London: Mc Graw-Hill Book Company (UK) Ltd., 1977.

Специализированная литература

16. Г о л о в а н о в А. И., Б е р е ж н о й Д. В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. - Казань: "ДАС", 2001.
17. К а н д и д о в В. П., Ч е с н о к о в С. С., В ы с л о у х В. А. Метод конечных элементов в задачах динамики. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
18. К о н н о р Д ж., Б р е б б и а К. Метод конечных элементов в механике жидкости. - Л.: Судостроение, 1979.
19. М о р о з о в Е. М., Н и к и ш к о в Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. - М.: Наука, 1980.
20. О б р а з ц о в И. Ф., С а в е л ь е в Л. М., Х а з а н о в Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985.
21. О д е н Д ж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976.
22. П о с т н о в В. А., Х а р х у р и м Н. Я. Метод конечных элементов в расчете судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974.
23. Р и к а р д с Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. - Рига: Зинатне, 1988.
24. С и л ь в е с т е р П. Б., Ф е р р а р и Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. - М.: Мир, 1986.
25. Ф а д е е в А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. - М.: Недра, 1987.
26. Ш а б р о в Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. - Л.: Машиностроение, 1983.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аппроксимация
 — конечноэлементная 42
 — области 224, 237
- Базис 33, 40
 Бариецентрические координаты 98
- Вектор
 — нагрузки глобальный 52, 58, 62
 — — элемента 51, 58
 — — — треугольного 100, 103
 — узловых значений глобальный 52, 59
 — — — элемента 50, 59, 71
 — — сил 51
- Граничное условие
 — главное 28, 85
 — — неоднородное 29
 — естественное 27, 85
 — первого рода 11, 91
 — третьего рода 113, 223
- Дельта-функция Дирака 15
- Задача
 — вариационная 23
 — вторая краевая 27
 — двухточечная краевая 11
 — Дирихле 193
 — — неоднородная 234
 — минимизации 22
 — Неймана 223
 — об изгибе балки 85
 — первая краевая 27
 — смешанная краевая 28, 94
 — третья краевая 28
- Изопараметрическая техника 237
- Инвариантность
 — матрицы жесткости 103
- Интерполянт 142
- Интерполяция
 — квадратичная 236
 — лагранжева 142
 — линейная 144
 — полиномиальная 148
 — эрмитова 164
- Квадратурной формулы
 — веса 202, 219
 — узлы 202, 219
- Квадратурных формул
 — примеры 116, 219
- Конечный элемент
 — биквадратичный 126
 — билинейный 124
 — изопараметрический 230, 239
 — квадратичный 68, 228
 — — треугольный 121
 — криволинейный 224
 — кубический лагранжев 83
 — кубический эрмитов 83
 — лагранжев 83
 — линейный треугольный 119
 — прямоугольный 124
 — треугольный 100
- Краевое условие
 — первого рода 27
 — третьего рода 28
- Краевые условия
 — второго рода 27
- Лемма
 — Брэмбла-Гилберта 201
 — Сеа 134
 — Стренга 198
- Матрица
 — жесткости
 — — элемента 51, 58, 72
 — — — билинейного 129
 — — — треугольного 102, 108

- — — — квадратичного 121
- — глобальная 52
- индексов 61, 108
- кинематических связей 52, 59
- массы 56, 73
- функций формы 50, 71, 101
- Якоби 188
- Метод
 - Галеркина 34
 - конечных элементов 37
 - Ритца 33
- Неравенство
 - Гельдера 137
 - Коши 137
 - Коши-Буняковского 136
 - обратное 201
 - Пуанкаре 160, 165
 - треугольника 164
 - Фридрихса 141
 - Шварца 134
- Норма
 - негативная 167
 - энергетическая 133
- Нормировка
 - эквивалентная 157
 - — вторая 159
- Носитель функции 15
- Оценка
 - априорная 170
 - квадратичной формы 139
 - интерполяции 142, 144, 148, 186, 188
- Полунорма 138
- Поток 12
- Производная
 - обобщенная 16
 - — "ступеньки" 16
- Пространство
 - конечноэлементное 39
 - конечных элементов 36
 - Соболева 16
- сопряженное 167, 212
- энергетическое 140
- $C(I)$ 136
- H 132
- H^h 132
- $H^m(I)$ 16
- $H_0^m(I)$ 17
- $\tilde{H}^1(I)$ 28
- $\tilde{H}^2(I)$ 86
- $H^{-s}(I)$ 166
- $H^1(\Omega)$ 95
- $\tilde{H}^1(\Omega)$ 95
- $H^2(\Omega)$ 184
- L_2 17, 187
- L_p 199
- L_∞ 199
- S_1^h 39, 96
- $\overset{\circ}{S}_1^h$ 39
- \tilde{S}_1^h 42, 96
- S_2^h 68
- \tilde{S}_2^h 69
- $S_{2,1}^h$ 80
- $S_{3,1}^h$ 83
- $\tilde{S}_{3,1}^h$ 86
- S_k^h 79, 148
- $S_{k,0}^h$ 80
- \tilde{S}_k^h 148
- $\overset{\circ}{S}_2^h(\Omega_h)$ 228
- $W_p^s(0, 1)$ 200
- $W_1^2(\Omega)$ 184
- Решение
 - галеркинское 34, 134
 - классическое 12
 - обобщенное 26
 - почти всюду 17
 - ритцевское 33, 132
- Сборка 52, 62, 76, 107
- Система
 - Ритца 34
 - Ритца-Галеркина 35
- Скалярное произведение

— энергетическое 133, 139

Суперсходимость

— в узлах 175

Сходимость

— в H^1 146

— в H^{-s} 173

— в L_2 172

— в C 178

— поточечная 178

Теорема

— вложения 184

— Рисса 167

— об априорных оценках 170

— Ролля 144

Триангуляция 95

— регулярная 192

Узлы

— конечного элемента 37, 70, 100, 119

— кратные 83, 88, 92

Уравнение

— вариационное 23

— второго порядка 11

— Пуассона 94

— четвертого порядка 85

— Эйлера 26

Условие

— коэрцитивности 134

— непрерывности 134

— H -эллиптичности 134

— H^h -эллиптичности 196

— на разрыве 29

— сопряжения 30

Флажок 53

Форма

— билинейная 22

— — несимметричная 134

— — симметричная 23, 134

— квадратичная 23, 139

— линейная 23

Функционал

— квадратичный 22

— линейный непрерывный 15

Функция

— базисная 40

— Грина 153, 157, 167, 176, 180

— локально-суммируемая 15

— обобщенная 15

— — регулярная 15

— — сингулярная 15

— основная 15

— финитная 14

— формы 49, 58, 70

— — квадратичного элемента 71

— Хевисайда ("ступенька") 16

Якобиан 234, 241

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — матрица.

A^T — матрица, полученная транспонированием матрицы A .

$a_j = y_{j+1 \pmod 3} - y_{j+2 \pmod 3}$, где (x_j, y_j) — декартовы координаты вершины треугольника.

$a(u, v)$ — билинейная форма.

$a_*(u^h, v^h)$ — билинейная форма, порожденная квадратурной формулой.

$a_h(u^h, v^h)$ — билинейная форма, порожденная аппроксимацией области.

$b_j = x_{j+1 \pmod 3} - x_{j+2 \pmod 3}$, где (x_j, y_j) — декартовы координаты вершины треугольника.

$C, C(\bar{I}), C(\bar{\Omega})$ — линейное пространство непрерывных на отрезке \bar{I} или на замыкании $\bar{\Omega}$ двумерной области Ω .

$C^m(I)$ — линейное пространство m раз дифференцируемых на интервале I функций.

c, c_j — постоянные в оценках, не зависящие от рядом стоящих сомножителей.

c_j — коэффициенты разложения приближенного решения по базису.

$2D$ — двумерное пространство.

\mathcal{D} — пространство основных функций.

E — модуль Юнга.

$E^{(i)}(g)$ — погрешность квадратурной формулы на конечном элементе $e^{(i)}$.

$\hat{E}(\hat{g})$ — погрешность квадратурной формулы на базисном элементе.

$e, e^{(i)}$ — конечный элемент.

\hat{e} — базисный конечный элемент.

F — глобальный вектор нагрузки.

$F^{(i)}$ — вектор нагрузки i -го элемента.

$F_{(f)}$ — глобальный вектор нагрузки до "снятия флажков".

f_m — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

(f) — "флажок".

$f(x), f(x, y)$ — правые части дифференциальных уравнений.

$G(x; \xi), G_{2s}(x; \xi)$ — функции Грина самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора (порядка $2s$).

g, \bar{g} — правая часть граничного условия.

$g_l(x, t)$ — ядро интегрального оператора.

H — гильбертово пространство.

- H^h — конечномерное подпространство пространства H .
 $H^m(I)$, $H^m(\Omega)$ — пространства Соболева целого порядка m на интервале I или в области Ω .
 $H_0^m(I)$, $H_0^m(\Omega)$ — подпространства пространств $H^m(I)$ или $H^m(\Omega)$, состоящие из функций, обращающихся в нуль вместе со своими производными до порядка $m - 1$ на границе.
 \tilde{H} — некоторое подпространство пространства H .
 H_E^1 — некоторое аффинное многообразие в пространстве H^1 .
 h — шаг равномерной сетки, максимальный размер конечного элемента.
 $h^{(i)}$ — шаг неравномерной сетки, размер конечного элемента.
 I — единичная матрица, тождественный оператор.
 I — отрезок $(0, 1)$.
 \bar{I} — замкнутый отрезок $[0, 1]$.
 i — номер конечного элемента.
 i_h — оператор интерполирования на конечном элементе.
 $i_{h,k}$ — оператор интерполирования многочленами k -ой степени на конечном элементе.
 \hat{i} , \hat{i}_k — операторы интерполирования на базисном элементе.
 J — матрица Якоби отображения.
 $J(w)$ — квадратичный функционал.
 K — глобальная матрица жесткости.
 $K^{(i)}$ — матрица жесткости конечного элемента.
 $K_{(f)}$ — глобальная матрица жесткости до "снятия флажков".
 k — степень многочленов конечномерного пространства.
 L — дифференциальный оператор.
 L — матрица индексов.
 L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций.
 L_p — пространство функций, p -я степень модуля которых суммируема, а норма задается соотношением $\|v\|_p = (\int |v|^p dx)^{1/p}$.
 L_∞ — пространство существенно ограниченных функций с нормой $\|v\|_{L_\infty} = \text{ess sup } |v(x)|$.
 l_j — длина стороны треугольника.
 $l(v)$ — линейная форма.
 $l_*(v^h)$ — линейная форма, порожденная квадратурной формулой.
 $l_h(v^h)$ — линейная форма, порожденная аппроксимацией области.
 M — глобальная матрица массы.
 $M^{(i)}$ — матрица массы конечного элемента.

- m — порядок гладкости функций.
 n — размерность конечноэлементного пространства.
 \mathbf{n} — вектор внешней нормали.
 P_k — пространство многочленов, степень которых не превосходит k .
 $P_k(e^{(i)})$ — сужение P_k на конечный элемент $e^{(i)}$.
 \hat{P}_k — сужение P_k на базисный элемент \hat{e} .
 $p(x)$ — старший коэффициент в обыкновенном дифференциальном уравнении.
 $p_k(x)$ — многочлен k -ой степени.
 $q(x)$ — коэффициент при младшем члене в обыкновенном дифференциальном уравнении.
 \mathbb{R} — множество всех вещественных чисел.
 $r(x)$ — коэффициент при первой производной в дифференциальном уравнении.
 S, S_i — площади треугольников.
 S_i — матрица кинематических связей на элементе.
 \hat{S} — квадратурная формула на базисном элементе.
 $S^{(i)}$ — квадратурная формула на конечном элементе.
 $S^{(i)}$ — матрица кинематических связей i -го элемента.
 S^h — конечноэлементное пространство.
 $S_k^h, S_{k,0}^h$ — конечноэлементное пространство лагранжевых конечных элементов k -ой степени.
 $\overset{\circ}{S}^h$ — подпространство конечноэлементного пространства S^h , состоящее из функций, обращающихся в нуль на границе.
 $S_{3,1}^h$ — конечноэлементное пространство эрмитовых элементов третьей степени.
 T — значок транспонирования.
 $\mathbf{U}_{(f)}$ — глобальный вектор узловых значений до "снятия флажков".
 $u, u(x)$ — решение дифференциального уравнения.
 u^h — конечноэлементное решение.
 u_j — значение конечноэлементного решения в узле с номером j .
 $\mathbf{u}^{(i)}$ — вектор узловых значений i -го конечного элемента.
 u_{xx}^h, u_{yy}^h — вторые разностные отношения на равномерной сетке.
 V^n — конечномерное пространство.
 W_l^p — пространство Соболева, элементами которого являются функции, чьи обобщенные производные до порядка l суммируемы со степенью p .

- W_∞^l — пространство Соболева, элементами которого являются функции, чьи обобщенные производные до порядка l существенно ограничены.
- ∇ — оператор градиента.
- $\|\cdot\|_a$ — энергетическая норма, порожденная энергетическим скалярным произведением.
- $\|\cdot\|_m$ — норма в пространстве H^m .
- $\|\cdot\|_m^*$, $\|\cdot\|_m^{**}$, $\widetilde{\|\cdot\|_m}$ — эквивалентные нормы в пространстве H^m .
- (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в L_2 .
- (f, φ) — значение обобщенной функции f на основной функции φ .
- $(\cdot, \cdot)_a$ — энергетическое скалярное произведение.
- $(\cdot, \cdot)_m$ — скалярное произведение в H^m .
- γ^h — множество граничных узлов триангуляции π^h .
- Δ — оператор Лапласа.
- Δ, Δ_i — величины определителей в формулах Крамера.
- $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.
- $\varepsilon(x)$ — относительное удлинение стержня.
- $\zeta_i, \hat{\zeta}_i$ — барицентрические координаты.
- \varkappa — коэффициент при младшем члене в граничном условии третьего рода.
- $\lambda_m, \lambda_m^{(2s)}$ — собственные значения обыкновенного дифференциального оператора второго и $2s$ -го порядков.
- $\mu_m(x)$ — собственные функции обыкновенного дифференциального оператора.
- π^h — триангуляция области.
- $\rho, \hat{\rho}$ — диаметры окружностей, вписанных в конечный и базисный треугольные элементы.
- $\sigma(x)$ — натяжение стержня.
- $\Phi^{(i)}, \bar{\Phi}^{(i)}$ — матрицы функций формы конечного элемента.
- $\varphi_j^{(i)}, \hat{\varphi}_j$ — функции формы конечного и базисного элементов.
- $\chi(x)$ — функция Хевисайда ("ступенька").
- Ω — двумерная область.
- Ω_h — объединение всех конечных элементов триангуляции π^h .
- $\partial\Omega$ — граница области Ω .
- $\partial\Omega_j$ — часть границы области Ω .